¿SEIS EUROS = MIL PESETAS? ARITMÉTICA Y ORDENADORES

Martín LARA COIRA

Teodoro LÓPEZ MORATALLA

Introducción

CUANDO salga a la luz este artículo, estará a punto de finalizar o habrá finalizado ya el *año mundial de las matemáticas*. Este evento ha motivado multitud de reflexiones en los medios de comunicación sobre esta ciencia y su enseñanza. La REVISTA GENERAL DE MARINA no ha permanecido totalmente ajena a este tema, publicando un par de artículos, respectivamente, en los tomos 238 y 239. En el primero, el contralmirante ingeniero Castro Luaces nos presenta el «método Pepín», un algoritmo para la multiplicación aproximada que, en el albor del tercer milenio, el autor reconoce como mera curiosidad o entretenimiento. En el segundo artículo, motivado por el anterior, el contralmirante Fernández Benzo hace una serie de reflexiones sobre la vigencia y utilidad de los métodos abreviados de cálculo aproximado.

Es indiscutible la gran utilidad práctica de las reglas abreviadas de cálculo aproximado, siendo muy frecuente su uso cotidiano en los cambios de unidades. No es tan lejano el uso de la proporción aproximada *seis varas igual a cinco metros*. Con más vigencia permanece la relación *dos cuartillos igual a medio litro*, regla de la que decían Salinas y Benítez (1) que «no es demasiado incorrecta y su empleo es muy expedito», y que a los cocinillas nos permite lucirnos con las recetas de la abuela.

Modernamente, nos enfrentamos a un inminente cambio de unidades como es el paso a la moneda única, el euro. La regla aproximada 6 euros = 1.000 pesetas nos resultará de mucha utilidad en el trauma que se nos avecina en breve. Sin embargo, es indudable que si queremos velar por nuestra economía doméstica, en multitud de ocasiones será muy recomendable usar la calculadora para hacer la proporción exacta: 6 euros = 998,316 pesetas.

(1) SALINAS, Ignacio, y BENÍTEZ, Manuel: *Aritmética*, 4.ª edición (1898), pág., 247.

Las reglas abreviadas para el cálculo aproximado tienen, pues, su indudable utilidad, pero hay que ser prudentes con su aplicación, que estará tanto más limitada cuanto más grosera sea la aproximación de nuestra regla.

En esta breve nota efectuaremos un somero repaso sobre las posibilidades que ofrece hoy en día la informática para efectuar cálculos precisos.

Aritmética exacta y aritmética aproximada

Los métodos abreviados de cálculo aproximado perseguían abreviar operaciones para obtener el resultado con mayor rapidez. El costo siempre era la precisión en el resultado, que sería aceptable o no según los casos.

Hoy en día, aunque el tiempo de cálculo no es un inconveniente mayor, se siguen empleando métodos abreviados en operaciones que no requieran gran precisión y sí un número elevadísimo de evaluaciones, como en la animación gráfica, donde son muy frecuentes los algoritmos interpolantes. Pero también se utilizan en otro tipo de aplicaciones, como puede ser el empleo de métodos numéricos multirrevolución en el estudio de la evolución del «escombro espacial» (2); la abreviación, más que en la modificación del artificio de cálculo, entra entonces en el concepto más general de simplificación, que consiste en eliminar de la teoría aquella parte que no es representativa para el estudio de ciertos aspectos del problema que se trata.

En otro tipo de cálculos que necesiten mayor precisión, los métodos abreviados no tienen cabida. Sin embargo, a pesar de resolver el problema en toda su complejidad, la precisión siempre queda mermada por los problemas derivados de la representación aproximada de los números, lo que produce errores de redondeo que pueden hacer que la aproximación en el resultado no sea suficiente. Por ese motivo, se dedica un gran esfuerzo al diseño de herramientas que permitan trabajar con aritmética exacta o, mejor aún, algebraicamente.

Números en «coma flotante»

Como nos recuerda el contralmirante Fernández Benzo, debido a que los ingenios de calcular se componen de elementos físicos, la representación «con coma» de los números reales conlleva, en general, una pérdida de precisión. Más aún, al proyectar la base 10 en la base 2, utilizada por la circuitería electrónica, se puede perder continuidad. Así, mientras que 1/10 se representa exactamente como 0,1 en base 10, en base 2 su representación con coma es

---

(2) CALVO, Carmen; MELENDO, Begoña, y PALACIOS, Manuel: «Ideal frame and multirevolution methods for space debris dynamics». *Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*. KAP, 375-380 (1997).

necesariamente aproximada: 0,000110011... con repetición periódica de las cuatro últimas cifras.

Al objeto de no perder precisión cuando se trabaja con aritmética real, los ordenadores utilizan la notación en «coma flotante». En esta notación, los números se representan en función de potencias de base 2, mediante el signo, el exponente y la fracción.

Sin embargo, la pérdida de precisión no sólo se produce en la representación numérica, sino que también se puede dar por la forma de operar. Ilustremos brevemente este aspecto.

Herón de Alejandría

Calculemos el área A de un triángulo cuyos lados tengan las longitudes x, y, z. La fórmula clásica, atribuida al matemático griego Herón el Viejo (nacido en Alejandría, probablemente el siglo I a. C.), es:

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

donde s es el semiperímetro: $s=(x+y+z)/2$. Apliquemos esta fórmula a un caso extremo de un triángulo cuyos lados sean $x=100,1$, $y=99,995$, $z=0,025$, y trabajemos con *5 cifras significativas.* El valor del semiperímetro resulta $s=100,1$ cuando se redondea por defecto, o bien $s=100,02$ redondeando por exceso. Mientras que en el primer caso, $s\text{-}x=0$, y con la fórmula de Herón, el área igualmente se anula $A=0$; en el segundo caso el área resulta $A=1,5813$. Sin embargo, si un curioso lector reprodujese la fórmula de Herón con su calculadora, al trabajar con más cifras significativas obtendría un resultado «exacto», $A=1,000025$, que redondeado a 5 cifras significativas es $A=1$.

IEEE Standard

Reorganicemos la fórmula de Herón en la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(x+(y+z))(x+(y-z))(z+(x-y))(z-(x-y))}.$$

Si se realizan las operaciones en el orden determinado por los paréntesis, el resultado, aun operando con sólo 5 cifras significativas, es $A=1$.

Vemos en este clásico ejemplo que no es trivial el orden en que se realizan las operaciones aritméticas, y resulta de gran importancia la adopción de un estándar que fije una serie de requerimientos que permitan trabajar con la mayor precisión posible en la aritmética de coma flotante. En el caso de la aritmética binaria de coma flotante, es generalmente aceptado el IEEE Standard 754 (3) que especifica los formatos para la representación de los números, las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada, resto y comparación), las conversiones de números binarios en coma flotante al formato de caracteres decimales, etcétera.

Números exactos

Para evitar las restricciones en precisión derivadas de las características físicas de las computadoras, hoy en día existen entornos de programación que permiten trabajar con precisión arbitraria, realizando las operaciones aritméticas mediante *software.* Desde un punto de vista conceptual, se trata de trasladar con la mayor fidelidad posible el razonamiento matemático a los ordenadores y no de modificar el razonamiento en función de las limitaciones impuestas por la máquina. Así, los números se reconocen como tales (enteros, racionales, irracionales...) y se establecen las reglas que definen las matemáticas. Por consiguiente, $1/3 + 2/3 = 1$, exactamente, y el arco cuya tangente es la unidad es exactamente $\text{arctg}(1) = \pi/4$ radianes que, con 50 cifras decimales toma el valor aproximado

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}78539816339744830961566084581987572104929234984378$$

Esta manera de funcionar se lleva a la práctica definiendo «objetos» a los que se les asignan propiedades, y no se limita a las operaciones aritméticas, sino que se extiende al álgebra, dando lugar a los programas, aplicaciones o entornos de programación conocidos como *sistemas de álgebra por ordenador,* o también *manipuladores algebraicos o simbólicos.* En tales entornos, el símbolo *pi* es un objeto que representa al número irracional π y que tiene asignadas una serie de propiedades, como, por ejemplo, $\cos \pi = -1$.

Manipuladores algebraicos

El origen de los lenguajes de manipulación algebraica está relacionado con el inicio de la *inteligencia artificial.* Ya en el año 1958, el «padre» de la *inteligencia artificial,* el estadounidense John McCarthy (1927-), había propuesto una lista de 24 ideas para los futuros lenguajes de programación; la décima,

(3) IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic: ISBN 0-7381-1165-1.

especificaba que los lenguajes deberían tener la posibilidad de manipular expresiones simbólicamente. McCarthy inventó el lenguaje LISP *(LISt Protocol* o *LISt Processing)* y en LISP se desarrollaron los primeros manipuladores simbólicos.

El desarrollo de los manipuladores algebraicos se debe en gran parte a la Mecánica Celeste. Kepler estableció en sus leyes que los planetas se movían en órbitas elípticas en uno de cuyos focos estaba el Sol. Newton inventa la teoría de la gravitación y, en base a ella, demuestra las leyes de Kepler. Sin embargo, el movimiento de la Luna se resistía a ajustarse a las elipses de Kepler, por lo que en la resolución del problema hubo que ir considerando más y más efectos (el achatamiento terrestre, la influencia del Sol, etc.). Así, el astrónomo francés Charles-Eugéne Delaunay (1816-1872) dedicó 25 años de su vida a obtener una solución completamente analítica del movimiento lunar. Dicha solución proporcionaba la posición de la Luna con un error inferior a su diámetro y era válida en un intervalo de 20 años. El astrónomo estadounidense Ernest William Brown (1866-1938) empleó quince años en la resolución del mismo problema, a los que añadió otros diez años dedicados al estudio de los efectos debidos a los planetas, y aún tuvo que dedicar siete años más a ordenar sus fórmulas para que pudiesen ser de utilidad en el cálculo de almanaques náuticos. Las Tablas de la Luna de Brown proporcionaban la posición del centro de masas de la Luna con un error de tres kilómetros.

La tremenda complejidad en la manipulación de las expresiones frenaba los nuevos desarrollos e impedía la obtención de teorías que ajustasen bien el movimiento teórico de la Luna con las cada vez más precisas observaciones. Un hito en esta historia lo constituyen los trabajos del matemático estadounidense André Deprit (1926-) que, junto con otros colaboradores, lleva a la práctica el «paquete» de subrutinas MAO *(Mechanized Algebraic Operations)*, que se puede considerar el primer manipulador algebraico (4). Las mejoras en MAO permitirían automatizar más y más los cálculos, hasta que, en 1971, Deprit reproduce automáticamente los resultados de Delaunay. La automatización de los cálculos reduce a 18 meses los 25 años empleados por Delaunay y, además, permite descubrir un pequeño error en una de las expresiones obtenidas por éste.

El desarrollo de la manipulación simbólica ha sido desde entonces continuo, evolucionando en dos direcciones: manipuladores específicos, orientados a cálculos concretos, que tienen su mayor desarrollo en mecánica celeste, física teórica y teoría general de la relatividad, y manipuladores de propósito general, normalmente desarrollados por casas comerciales que los presentan dentro de «sistemas» para cálculos matemáticos o de ingeniería, que incluyen manipulación simbólica, análisis numérico y gráfico. Con respecto a estos

---

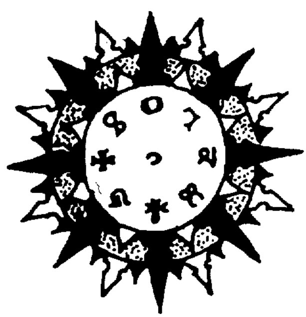
(4) ABAD, Alberto, y SEIN-ECHALUCE, M.ª Luisa: *Manipuladores Algebraicos en Mecánica Celeste*. Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 43:117-127 (1988).

últimos (Reduce, Derive, Macsyma, Maple, Mathematica, Axiom...), debido a la creciente popularidad de estas potentes herramientas de cálculo y a la competitividad entre las marcas, el desarrollo en los últimos años ha sido espectacular. Sus posibilidades son muy amplias, y van desde aplicaciones cercanas a la inteligencia artificial, permitiendo, por ejemplo, «enseñar» al sistema a programar en un lenguaje de alto nivel (5), hasta el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, siendo utilizados a tal fin en muchas universidades.

A modo de conclusión

El mantenimiento de la precisión durante un cálculo es un tema de gran importancia. En la actualidad, a pesar de disponer de medios de cálculo suficientemente rápidos y precisos, se siguen utilizando simplificaciones en muchos casos innecesarias. Un claro ejemplo se produce en la navegación astronómica, donde se determina la posición sobre la carta a través de la recta de altura. Este procedimiento abreviado (Tierra esférica, «recta» de altura, etc.) limita la precisión en sí de la propia situación. Por supuesto, existe un límite impuesto por la precisión de las observaciones obtenidas con el sextante, pero el uso de algoritmos más exactos y procedimientos estadísticos podría permitir una situación astronómica más precisa, donde, una vez realizada la observación, la determinación de la posición en la mar correspondiese en su totalidad al ordenador.

Pero ése es otro tema y se tratará más adelante.



(5) LARA COIRA, Martín: *Manipuladores algebraicos y series recurrentes de potencias*, Sección 2.3 de la Tesis Doctoral. Editada como Boletín ROA 6/95, Ministerio de Defensa, Secretaría General Técnica (1995). ISBN 84-7469-096-X.