Un caso interesante de nivelación barométrica

Por el Meteorólogo ENDERIZ

En el presente trabajo nos proponemos tratar de un caso de nivelaciones barométricas que se presenta con mucha frecuencia: es aquel en que la diferencia de cotas que se pretende determinar es pequeña; tal caso ocurre, por ejemplo, cuando un avión inicia una toma de tierra, ya que el comandante de la aeronave debe de conocer con bastante precisión las distintas alturas a que se encuentra, para saber en qué momentos debe realizar las distintas evoluciones que han de conducirle a un aterrizaje perfecto. Posteriormente nos referiremos con más extensión a este caso.

Otra cuestión que suele presentarse es la inversa; es decir, conociendo la diferencia de cotas, calcular la diferencia de presión.

Como sólo nos referiremos, según hemos anunciado, a pequeñas diferencias de cota, trataremos de encontrar fórmulas sencillas de fácil aplicación y de calcular asimismo dentro de qué límites es admisible su uso.

En los cálculos que siguen supondremos la atmósfera en reposo, ya que, dentro de las condiciones de nuestro problema, los términos dinámicos son completamente despreciables.

La fórmula diferencial de la nivelación barométrica es:

$$dp = -g\rho\, dz;$$

y suponiendo el aire gas perfecto, tendremos:

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

valor que sustituído da:

$$dp = -\frac{g}{R}\frac{p}{T}\,dz;$$

separando variables,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\frac{dz}{T}.$$

en cuyas fórmulas las letras tienen las siguientes significaciones:

p = presión.
g = gravedad.
ρ = densidad del aire.
z = altura en metros.
T = temperatura absoluta.

Integrando esta ecuación:

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{g}{R}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{T}.$$

p_0 = abajo.
z_0 = abajo.

Como T es una función desconocida de z, excepción hecha del caso, poco corriente, en que se posea el sondeo termodinámico del lugar de la nivelación, esa integral no puede calcularse de una manera exacta.

Podemos, sin embargo, conocer un valor aproximado de ella, tanto más exacto cuanto menor sea $z - z_0$.

Veamos ahora una sencilla interpretación geométrica que puede darse a esta integral.

En efecto, si hacemos

$$\frac{1}{T} = f(z),$$

tendremos:

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{T} = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

que representa el área comprendida entre la curva $\frac{1}{T} = f(z)$ y las ordenadas z_0 y z en un diagrama z, $\frac{1}{T}$ (fig. 1).

El resultado de la nivelación será tanto más exacto cuanto más perfecta sea la evaluación del área o, lo que es lo mismo, el conocimiento de la curva.

Como hemos indicado anteriormente, lo normal es que sea desconocida la distribución vertical de la temperatura, es decir, la característica de la función $T = \varphi(z)$; pero, sin embargo, esta función debe mantenerse dentro de ciertos límites marcados por la estabilidad atmosférica y los movimientos turbulentos y convectivos.

Si desarrollamos $\varphi(z)$ en serie de Mac-Laurin en las proximidades del punto z_0, tendremos:

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0 (z - z_0) + \\ + \left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_0 \frac{(z - z_0)^2}{2} + \ldots;$$

y tomando z_0 como origen de alturas,

$$T = T_0 + \left(\frac{dT}{dz}\right)_0 . z + \left(\frac{d^2 T}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{2} + \ldots$$

El coeficiente $\left(\frac{dT}{dz}\right)_0$ recibe el nombre de gradiente vertical de temperatura, y lo representaremos por la letra α.

Este gradiente puede tomar tanto valores positivos (inversiones) como valores negativos, pero generalmente comprendidos entre $-0{,}01$ y $+0{,}03$ grados/metro.

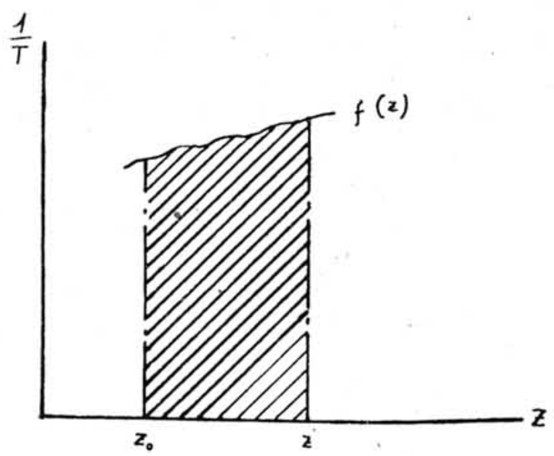

Fig. 1.

Admitido esto, es fácil de ver que toda $\varphi(z)$ ha de estar comprendida entre los valores dados por las $T = T_0 - 0{,}01z$ y $T = T_0 + 0{,}03z$, que serán las rectas que limitarán el sector de existencia de curvas representativas de un sondeo en el diagrama representativo del mismo.

De la consideración de los sondeos termodinámicos se deduce que el coeficiente α es constante o casi constante dentro de una capa atmosférica, pasando luego, casi bruscamente, a otro valor, al entrar en otra capa distinta.

Comoquiera que nosotros nos ceñiremos casi exclusivamente al estudio de la capa que se encuentra próxima al suelo, podremos considerar α como constante.

Si nos limitamos, pues, a este caso, la integral

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{T}$$

se convertirá en

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{T_0 + \alpha z},$$

que es inmediata y da:

$$\int_0^z \frac{dz}{T_0 + \alpha z} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T_0 + \alpha z}{T_0}$$

(Ponemos 0 en el límite inferior por haber convenido en tomar Z_0 como origen de alturas.)

Sustituyendo el valor de esta integral en la fórmula integrada de la nivelación, resulta:

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{g}{R\alpha} \ln \frac{T_0 + \alpha z}{T_0},$$

que es la fórmula exacta.

Calculemos ahora un valor aproximado de la

$$\int_0^z \frac{dz}{T_0 + \alpha z}$$

que sea más sencillo de manejar.

Para eso hacemos lo siguiente:

$$\frac{1}{T_0 + \alpha z} = \frac{1}{T_0\left(1 + \frac{\alpha z}{T_0}\right)} = \\ = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha z}{T_0}} \simeq \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right);$$

y sustituyendo este valor aproximado,

$$\int_0^z \frac{dz}{T_0 + \alpha z} \simeq \frac{1}{T_0} \int_0^z \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0}\right) dz =$$

$$= \frac{z}{T_0} \left(1 - \frac{\alpha z}{2\,T_0}\right),$$

valor que transforma la ecuación de nivelación en:

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{g\,z}{R\,T_0} \left(1 - \frac{\alpha z}{2\,T_0}\right).$$

Así, pues, hemos encontrado un valor aproximado del área antes mencionada, que en casos de valores pequeños de Z da resultados completamente satisfactorios.

Calculemos ahora la diferencia que se obtiene en el valor de la integral que estudiamos cuando se da a α dos valores distintos: α_1 y α_2; tendremos:

$$I_1 = \frac{z}{T_0} \left(1 - \frac{\alpha_1 z}{2\,T_0}\right), \qquad I_2 = \frac{z}{T_0} \left(1 - \frac{\alpha_2 z}{2\,T_0}\right)$$

$$\text{y} \qquad I_1 - I_2 = \frac{z^2}{2\,T_0{}^2} (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Si p_0 es la presión al nivel cero y p la resultante al nivel z, suponiendo $\alpha = \alpha_1$, tendremos:

$$\ln \frac{p_0}{p_1} = \frac{g}{R} I_1,$$

$$\ln \frac{p_0}{p_2} = \frac{g}{R} I_2;$$

y si $\alpha = \alpha_2$, restando miembro a miembro estas dos igualdades, resulta:

$$\ln \frac{p_0}{p_1} - \ln \frac{p_0}{p_2} = \frac{g}{R} \frac{z^2}{2\,T_0{}^2} (\alpha_2 - \alpha_1) = \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Esta fórmula nos dará, pues, la relación existente entre los valores obtenidos para la presión al nivel Z para dos valores distintos del gradiente vertical de temperatura.

Si los valores α_1 y α_2 han sido elegidos de tal manera que las rectas representativas de la función $T = T_0 + \alpha z$ comprendan dentro del ángulo que determinan la curva real del sondeo termodinámico, el valor exacto de la presión al nivel Z estará comprendido entre los valores p_1 y p_2.

Como los valores p_1 y p_2 serán siempre muy próximos en nuestro caso, podemos poner $p_2 = p_1 + \varepsilon$, con lo cual tendremos:

$$\ln \left(p_1 + \frac{\varepsilon}{p_1}\right) = \frac{g}{R} \frac{z^2}{2\,T_0{}^2} \alpha_2 - \alpha_1),$$

y por tanto,

$$\ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{p_1}\right) = \frac{g}{R} \frac{z^2}{2\,T_0^2} (\alpha_2 - \alpha_1),$$

que desarrollado en serie, y despreciando las potencias superiores al primer grado, llegaremos a

$$\frac{\varepsilon}{p_1} = \frac{g}{R} \frac{z^2}{2\,T_0^2} (\alpha_2 - \alpha_1);$$

fórmula que relaciona el error cometido en la apreciación de la presión con la altura de la nivelación y con el margen admitido para variación del gradiente vertical de temperatura.

En la figura 2 encontramos representadas las curvas $\varepsilon = f(z)$ para distintos valores de $\alpha_2 - \alpha_1$. Estas curvas han sido trazadas para el valor $p =$ a 1.050 mb, y $T = 260°$ A, que son los valores extremos que pueden esperarse en nuestra Península, y que constituyen las condiciones más desfavorables para la aplicación de nuestras fórmulas simplificadas.

Como vemos en ese gráfico, en el peor de los casos, es decir, en aquel en que hemos tomado para valores de α_1 y de α_2 los valores extremos, o sea, $-0{,}01$ y $+0{,}03$, y tomando como máximo error permisible media décima de milibar, la nivelación será siempre exacta hasta los 70 metros de altura, sea cualquiera la distribución vertical real de la temperatura.

Por tanto, en todas las nivelaciones que pretendan realizarse entre puntos cuyas diferencias de cotas sean menores de los 70 metros, podremos utilizar un valor cualquiera para el gradiente vertical de temperatura.

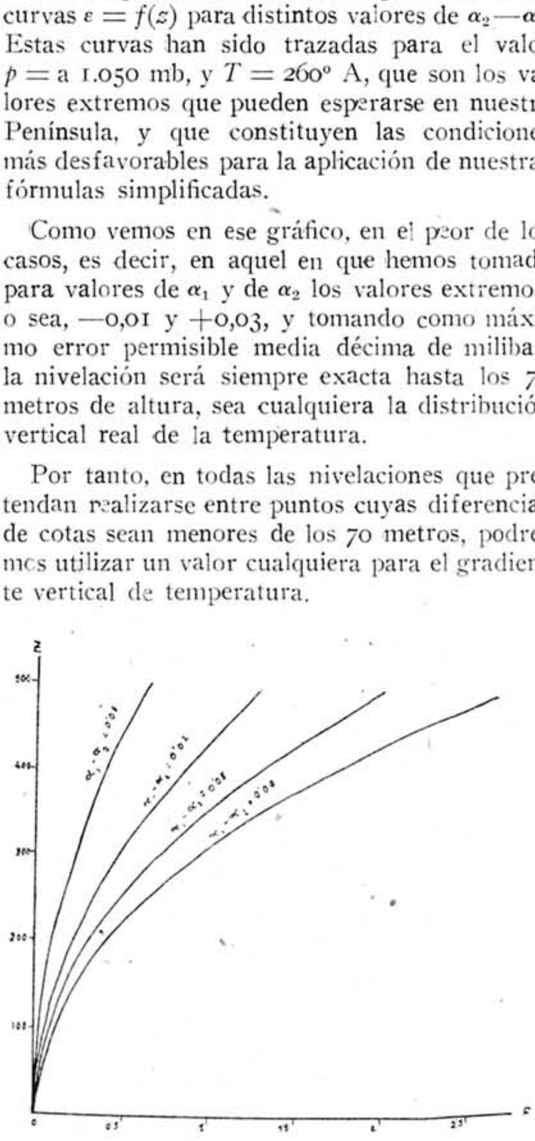

Fig. 2.

Aplicaciones.

Tratemos ahora de aplicar las teorías anteriores al caso de un avión en el momento de tomar tierra.

Cuando un avión se acerca a un aeródromo donde pretende hacer escala, recibe un parte del Observatorio Meteorológico de ese campo, en el cual se le facilita la presión que existe al nivel de la pista de aterrizaje. Este dato le sirve para calibrar su altímetro y poder conocer a qué altura se encuentra en cada momento sobre el terreno.

En caso de viaje diurno y con buena visibilidad, la pericia habitual de nuestros pilotos no necesita mucha precisión en el calibrado del altímetro; en cambio, en vuelos nocturnos o con mala visibilidad se hace de todo punto imprescindible el conocimiento más exacto posible de la altura a que en cada momento se encuentra el avión sobre el suelo.

Cuando la aeronave dispone de altímetro absoluto, esto no presenta ninguna dificultad, ya que el fundamento radioeléctrico de este aparato excluye las causas de error debidas a las variaciones de las diversas magnitudes atmosféricas. En cambio, si, como es general, hemos de atenernos a los altímetros basados en la variación de la presión con la altura, será absolutamente necesario ponerlos a punto de acuerdo con las condiciones meteorológicas del aeródromo de llegada; a este fin se encamina el dato de presión que se facilita en todo QAM.

Los altímetros que se utilizan corrientemente en los aviones están calibrados de acuerdo con una atmósfera tipo que no se ajusta normalmente a la atmósfera real. Los resultados a que hemos llegado nos demuestran que desde alturas inferiores a los 70 metros, el altímetro da marcaciones cuyos valores sólo difieren de los reales en menos de medio metro, que es la altura que corresponde aproximadamente a la media décima de milibar. En la figura 3 encontramos la curva que relaciona el error cometido en la apreciación de la altura con la altura misma.

De la inspección de esta figura se deduce claramente que con un altímetro que posea una sensibilidad de una décima de milibar y que se encuentre perfectamente calibrado de acuerdo con los datos del Observatorio del campo de llegada, pueden conocerse con suficiente exactitud todas las alturas que interesan para la operación de tomar tierra.

El calibrado del altímetro se consigue colocando el *cero* de alturas a la presión señalada en el parte, y así, cuando la aeronave llegue al nivel en que el barómetro del altímetro registra esa presión, el altímetro marcará *cero;* es decir, el avión debe estar ya en el suelo.

Para que esto resulte perfecto es preciso que la presión consignada en el parte sea la que existe precisamente al nivel de la pista.

Ahora bien: los Observatorios meteorológicos, generalmente situados en la torre de mando de los campos, no pueden tener la cubeta del barómetro al nivel de la pista, y esto exige el corregir la presión dada por el barómetro de la altura a que se encuentra sobre el terreno de aterrizaje; y para realizar esta corrección también podremos aplicar las ideas expuestas anteriormente.

Esta altura, muy variable de unos campos a otros, precisará la construcción de unas tablas que den la corrección que hay que aplicar al barómetro para obtener la presión en la pista.

Como la diferencia del nivel que existe entre la cubeta del barómetro y la pista de aterrizaje es siempre inferior a los 70 metros, podremos dar al gradiente vertical de temperatura el valor que nos resulte más cómodo, en la seguridad de que la corrección que encontremos será exacta, con un error menor de media décima de milibar, que es la precisión que necesitamos.

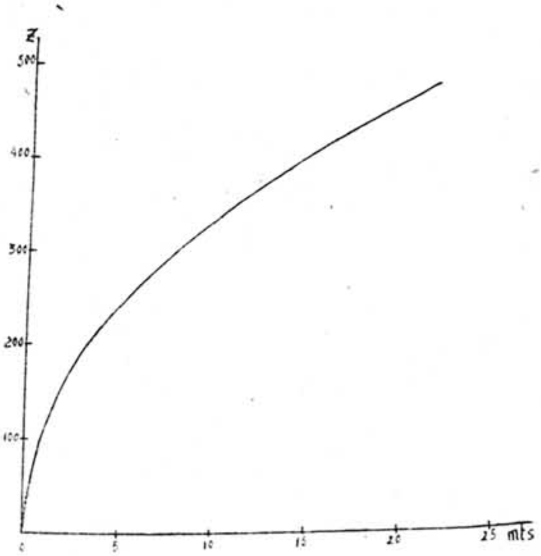

Fig. 3.

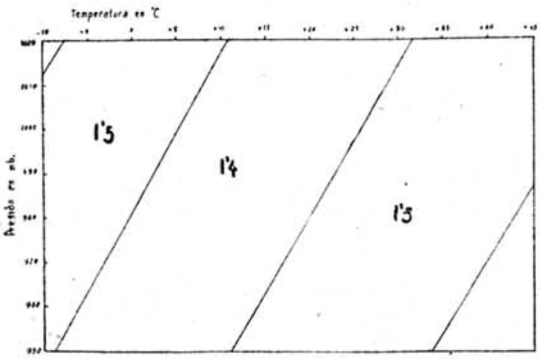

Fig. 4.

Volviendo a la fórmula general de nivelación,

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{g}{R\alpha} \ln \frac{T_0 + \alpha z}{T_0},$$

y dando a α el valor $\frac{g}{R}$ (3,421 grados cada 100 metros), resulta:

$$\ln \frac{p_0}{p} = \ln \frac{T_0 + \alpha z}{T_0};$$

o bien:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{T_0 + \alpha z}{T_0};$$

y si llamamos ε a la corrección a realizar,

$$p_0 = p + \varepsilon,$$

resulta:

$$\frac{p + \varepsilon}{p} = \frac{T_0 + \alpha z}{T_0};$$

y de aquí,

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{\alpha z}{T_0} = \frac{g}{R}\,\frac{z}{T_0},$$

que es la fórmula aproximada que proponemos para este caso.

Pasemos ahora a tratar de la disposición práctica de la tabla de reducción de presión basada en esta fórmula.

Podrían dársele diferentes formas; pero creemos que entre ellas la más sencilla de realización y más fácil de utilizar es la que exponemos a continuación:

En la figura 4 se encuentra la del aeropuerto de Sanjurjo, construída últimamente por este método, y que la usaremos como ejemplo.

La fórmula de corrección

$$\varepsilon = p\,\frac{g}{R}\,\frac{z}{T_0}$$

da para nuestro caso, en que $z = 11{,}8$ metros,

$$\varepsilon = 0{,}4036 \times \frac{p}{T_0},$$

que, tomando ε como parámetro, representa un haz de rectas en un diagrama p, T.

Así, pues, dando a ε valores distintos: $\varepsilon = 1{,}25$, $1{,}35$, $1{,}45$, ..., y representando las rectas correspondientes, obtenemos el gráfico.

El espacio comprendido entre dos rectas consecutivas, por ejemplo, la 1,35 y la 1,45, corresponde a valores de ε comprendidos entre 1,35 y 1,45; valores, por tanto, que, con un error menor de 0,05, serán *1,4*, y ésta será, pues, la corrección.

Estos espacios van iluminados con distintos colores, para facilitar su separación, llevando en el centro el valor que corresponde a su interior.

La manera de utilizarla es, pues, muy sencilla: leída la presión en el barómetro y la temperatura en la garita, tomamos estos valores como coordenadas en el diagrama, determinándose así un punto que caerá dentro de una zona, a la que corresponderá una determinada corrección.

Por ejemplo, si hemos leído una presión de 980 milibares y una temperatura de 15° C., la corrección será de1,4 milibares, y, por tanto, en el parte figurará la presión 981,4 milibares.

La ventaja de construcción de este gráfico consiste en que siendo rectas los límites de cada sector, su determinación es rapidísima.

Otra aplicación que podríamos dar a estos resultados sería la de construcción de tablas para reducir la presión de los Observatorios al nivel del mar.

Para esta reducción se supone que existe un gradiente vertical de temperatura comprendido entre 0,00 y —0,01. Si utilizamos para la construcción de esas tablas la hipótesis de una atmósfera isoterma, el error cometido sólo llegará a la media décima del milibar para alturas superiores a los 180 metros. Por tanto, esta fórmula, que es:

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{g}{R}\,\frac{z}{T},$$

podrá aplicarse a todos los Observatorios cuya altura no sobrepase esos 180 metros.

La disposición de esta tabla podrá ser análoga a la detallada anteriormente para reducir la presión al nivel del campo.

Hemos visto, pues, en qué condiciones y hasta qué alturas es admisible la sustitución de un determinado gradiente vertical de temperatura por otro que conduzca a resultados más sencillos.