PISTAS DE AEROPUERTOS

FUERZAS QUE ACTÚAN EN LAS PISTAS DE ATERRIZAJE

Por A. RODRIGUEZ-MARTIN,
Autor de la Base aérea de Tablada.

El ingeniero H. M. Westergaard, Profesor de la Universidad de Harvard, presentó en 1939 ante el Consejo de Investigaciones sobre Caminos, de Wáshington, un extenso trabajo sobre este asunto.

Para seguir su estudio, de por sí complicado, es necesario conocer sus anteriores trabajos sobre carreteras, y nos ha parecido lo mejor seguir el resumen que han realizado los técnicos de la Portland Cement Association, que amablemente han puesto en mis manos.

El estudio original de Westergaard presentaba fórmulas basadas en el supuesto de que la reacción del subsuelo era una constante. Presentó tres fórmulas: una para cargas aplicadas en las esquinas de una losa; otra para cuando la carga actúa en los bordes a cierta distancia de la esquina, y la tercera para cargas en el interior de la losa a alguna distancia de los bordes y esquinas.

Posteriormente a la presentación de estas fórmulas, experimentos realizados en el Laboratorio del Departamento de Caminos en Arlington dieron resultados que estaban muy de acuerdo con los obtenidos por las fórmulas de Westergaard para las cargas aplicadas en esquinas y bordes, pero no para las que obraban en el interior de las losas.

En el estudio de 1939, el Profesor propuso un cambio de la fórmula para cargas en el interior. En este trabajo la fórmula original aparece como la ecuación (4), y la modificada, como la número (21). Estas dos ecuaciones consideran una carga distribuída sobre un pequeño círculo de radio R. Cuando R es grande, como en el caso de grandes ruedas de aterrizaje, es necesario realizar nuevas correcciones, lo que hace el Profesor de Harvard introduciendo la ecuación número (6).

Se llama la atención sobre el valor de C en la ecuación (21). Este valor varía con a y se computa con las ecuaciones (5), (11) y (23).

La suma de los valores obtenidos por las tres fórmulas (4), (21) y (6) representa la fuerza que actúa en la losa de una pista, cuando el subsuelo se conduce como un sólido profundo elástico con coeficiente de elasticidad, y de Poisson, constantes.

Cuando el peso por unidad en un subsuelo aumenta considerablemente, los dos coeficientes anteriores no resultan constantes; sin embargo, como se ha comprobado que las presiones por unidad en áreas bajo losas de hormigón son muy bajas, podemos admitir que son constantes para usos prácticos.

La suma de los valores de las fórmulas (4), (21) y (6) se han compilado en tres tablas, por la Portland Cement Association, para presiones de 50, 75 y 100 libras por pulgada cuadrada. Fuerzas de presiones de neumáticos y carga por rueda intermedias pueden ser obtenidas por interpolación.

ESTUDIO DEL PROBLEMA

El problema de las fuerzas que actúan en una pista de aterrizaje de hormigón es esencialmente el mismo que se presenta en el cálculo de carreteras, excepto que la carga por rueda y el área de contacto entre neumático y pavimento son mayores en el primer caso. Estas dos diferencias, especialmente la segunda, exigen una revisión de las fórmulas empleadas para carreteras.

Las fórmulas están basadas, como ya hemos dicho, en el principio de que la reacción del terreno es una cantidad constante, por la que hay que multiplicar la flexión de la losa de hormigón para encontrar los esfuerzos.

Suponemos:

E Módulo de elasticidad del hormigón supuesto constante.

u Coeficiente de Poisson para hormigón y constante 0,10.

K Reacción del terreno por unidad de superficie y de flexión (en el estudio de Westergaard, en libras por pulgadas al cubo).

a Espesor uniforme de la losa.

L Coeficiente de rigidez relativa definido por la ecuación

$$L^4 = \frac{E\,a^3}{12\,(1 - u^2)\,k}\,. \qquad (1)$$

P Peso total por rueda aplicado a considerable distancia de los bordes.

R Radio del círculo en que P se distribuye uniformemente.

b Dependiendo de R y a según las ecuaciones

$$b = \sqrt{1{,}6\,R^2 + a^2} - 0{,}675\,a \qquad (2)$$

cuando $R < 1{,}724\,a$

$$b = a \qquad (3)$$

cuando $R > 1{,}724\,a$

o Fuerza de extensión en la parte inferior de la losa directamente bajo el centro de la presión de rueda.

o_1 Valor de o en los primeros estudios, cuando se suponía que el radio R tenía valores pequeños:

$$o_1 = 0{,}275\,(1 + u)\,\frac{P}{a^2}\,\log 10\left[\frac{E\,a^3}{k\,b^4}\right] \qquad (4)$$

o_2 Valor suplementario que debe añadirse a o_1 para obtener el propio valor de o. Solamente debe tomarse en consideración para valores elevados de R.

z_0 Flexión de la losa en el centro de la carga.

z_1 Valor de z_0 cuando R es muy pequeño.

$$z_1 = \frac{P}{8\,k\,L^2}\,. \qquad (5)$$

Las ecuaciones 1, 2, 3 y 5, y la equivalente de la 4, para E, igual tres millones de libras por pulgada cuadrada (1.360.000 kilogramos por cm²), y $u = 0{,}15$, fueron halladas por el Profesor Westergaard y publicadas en el "Public Roads", de abril de 1926.

En el estudio posterior ha presentado los siguientes resultados, que pueden ser aplicados satisfactoriamente cuando R no resulte superior al coeficiente L:

(A) La fuerza suplementaria que hay que añadir a o_1 es aproximadamente

$$o_2 = \frac{3\,(1 + u)\,P}{64\,a^2}\left(\frac{R}{L}\right)^2. \qquad (6)$$

Esta fórmula fué obtenida separadamente por W. D. Dickinson, siguiendo un distinto procedimiento.

(B) Como $1 - u^2$ varía muy poco con u, podemos, en la ecuación (1), sustituir u por el valor 0,15. Esto hace que la ecuación (6) se convierta en

$$o_2 = \frac{0{,}16\,(1 + u)\,P\,R^2}{a^3}\sqrt{\frac{k}{E\,a}}\,. \qquad (7)$$

(C) La fuerza resultante

$$o = o_1 + o_2 \qquad (8)$$

da la mayor extensión producida por el peso P. El radio R tendría que ser considerablemente mayor que L para producir la máxima extensión en otro punto diferente del centro del círculo.

(D) El ser

$$a < L \qquad (9)$$

se ha encontrado que equivale a la condición

$$o_2 < 0{,}16\,o_1\,. \qquad (10)$$

Esta condición (10) puede ser usada en lugar de la (9), para decidir si las fórmulas pueden o no ser aplicadas.

(E) La flexión bajo el centro de la carga es aproximadamente

$$z_0 = \left[\frac{P}{8\,k\,L^2}\,1 + (0{,}3665\,\log 10\,\frac{R}{L} - 0{,}2174)\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]. \qquad (11)$$

Más adelante veremos cómo se obtienen las fórmulas (4), (6) y (11).

Ahora vamos a poner un ejemplo para ver cómo se aplican las fórmulas anteriores:

Ejemplo.—Supongamos una losa de 152 milímetros de espesor.

$$\left.\begin{array}{ll} E & 281240 \text{ kgs. por cm}^2 \\ u & = 0{,}15 \\ k & 2{,}76 \text{ kgs. cm}^3 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{array}{ll} a & 152 \text{ mm.} \\ P & 13600 \text{ kgs.} \\ R & 35 \text{ cms.} \end{array}\right\} \qquad (13)$$

El valor de R corresponde a una presión de 3,5 kgs. por cm² sobre el área que recibe la carga. Las ecuaciones (3), (4), (7) y (8) dan

$$\left.\begin{array}{l} o_1 = 44{,}014 \text{ kgs. por cm}^2 \\ o_2 = 0{,}703 \text{ kgs. por cm}^2 \\ o\ = 44{,}717 \text{ kgs. por cm}^2 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Como o_2 es menor que el 16 por 100 de o, las fórmulas pueden aplicarse, lo que puede también comprobarse computando L por la ecuación (1) y observando que R es menor que L.

Las ecuaciones (1), (5) y (11) dan

$$L^2 = 5536 \text{ cm}^2 \qquad L = 74{,}42 \text{ cm.} \qquad (15)$$

$$z_1 = 0{,}1111 \text{ cm.} \qquad z_0 = 0{,}1026 \text{ cm.} \qquad (16)$$

$$\frac{z_0}{z_1} = 0{,}925\,. \qquad (17)$$

Fórmulas basadas en el coeficiente de rigidez del terreno.—Este coeficiente es

$$K = k\,L. \qquad (18)$$

K se mide en kgs. por cm², o libras por pulgada cuadrada. La fórmula siguiente es una modificación de la (4):

$$o_1 - \frac{1{,}1\,(1 + u)\,P}{a^2}\left[\log\frac{a}{b} + \frac{1}{3}\log\frac{E}{K} - 0{,}089\right]. \qquad (19)$$

("Public Roads". Diciembre de 1939.)

Para los valores del ejemplo anterior encontramos

$$K = 21{,}50 \text{ kgs. por cm}^2 \qquad (20)$$

y los mismos valores para o_1, o_2 y o.

Correcciones teniendo en cuenta que las reacciones del terreno no resultan constantes.—Las fórmulas anteriores consideran k y K como constantes. Como en realidad son variables, se ha buscado o_3 como valor suplementario, para ser añadido a o_1 u o en la siguiente fórmula:

$$o_3 = -\frac{15\,(1 + u)\,C\,P}{a^2}\left(\frac{L}{L'}\right)^2, \qquad (21)$$

en la que L' es una distancia y C es el coeficiente de reducción de z_1, debido a la diferente distribución de las reacciones del terreno.

Resulta un caso particular de mucho interés aquel en que el terreno se conduce como un sólido profundo elástico, con coeficiente de elasticidad a la compresión constante E_s, y un coeficiente de Poisson u_s también constante. Cuando R es pequeño se encuentra

$$\left.\begin{array}{l} L' = 5\,L\ , \quad C = 0{,}3906\ , \\ K = 0{,}1242\,\dfrac{E_s}{1 - u_s^2} \end{array}\right\} \quad (22)$$

Como en el presente estudio se consideran valores mayores para R, es conveniente que C se reduzca al siguiente valor:

$$C = 0{,}3906\,\frac{z_0}{z_1}\,. \quad (23)$$

Para los valores empleados en nuestro ejemplo, las ecuaciones (23) y (17) dan

$$C = 0{,}3906 \times 0{,}925 = 0{,}3613\,. \quad (24)$$

Y la ecuación (21) da

$$o_3 = -\,\frac{15\,(1 + 0{,}15)\,.\,0{,}3613\,.\,13600}{15{,}2^2}\,.$$
$$.\,(1/5)^2 = -\,14{,}62 \text{ kgs. por cm}^2 \quad (25)$$

y entonces la fuerza resultante sería

$$o' = o_1 + o_2 + o_3 = 44{,}14 + 0{,}703 -$$
$$-\,14{,}62 = 30{,}09 \text{ kgs. por cm}^2. \quad (26)$$

La fuerza resultante, en nuestro caso, puede considerarse comprendida entre 44 y 30 kgs. por cm².

COMO SE OBTIENEN LAS FORMULAS BASICAS

Vamos a exponer cómo se obtienen las fórmulas (4) y (6) para las fuerzas, y la (11) para las flexiones.

Supongamos

r como la distancia horizontal al centro de la carga,

z la flexión en cada punto.

Como z va a ser función de r solamente, el operador de Laplace toma la forma

$$\Delta = \frac{d^2}{d\,r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{d\,r}\,. \quad (27)$$

Cualquier zona sin carga de la losa satisface la ecuación

$$\frac{E\,a^3}{12\,(1 - u^2)}\,\Delta^2 z + k\,z = 0\,. \quad (28)$$

("Die Elastischen Platten". Julius Springer, Berlín, 1925, página 186, y página 4 del número de marzo de 1930 del "Public Roads".)

Introduciendo L de acuerdo con la ecuación (1), la ecuación (28) se convierte

$$L^4\,\Delta^2 z + z = 0\,. \quad (29)$$

Ahora consideremos la función

$$Z = z + i\,L^2\,\Delta\,z\,, \quad (30)$$

en la que

$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Se observa que

$$L^2\,\Delta\,Z + i\,Z = i\,(L^4\,\Delta^2 z + z), \quad (31)$$

y, por consiguiente, la ecuación (29) se satisface si Z se elige como una función de r que satisfaga a la ecuación

$$L^2\,\Delta\,Z + i\,Z = 0 \quad (32)$$

y z se toma como parte real de Z.

De acuerdo con la ecuación (30) podemos formular

$$z = R_e\,Z\,, \qquad z - \frac{1}{L^2}\,I_m\,Z\,, \quad (33)$$

en donde R_e e I_m indican "Real parte de" e "Imaginaria parte de", respectivamente.

La ecuación (32) se satisface con cualquier función Bessel de orden cero, con argumento

$$\frac{r\sqrt{i}}{L}\,.$$

La función Bessel que nos interesa es la "Hankel Bessel" H_0 (1). (Información sobre estas funciones se obtienen en el libro y tablas de Jahnke and Emde "Funktionentafeln mit Formeln un Kurven". Leipzig, 1909; especialmente en las páginas 96 y 139.)

Como la función H_0 (2) no va a ser usada, podemos omitir el índice (1) en la que nos interesa.

La ecuación

$$\text{(a)}\qquad Z = \frac{1}{4\,k\,L^2}\,H_0\left(\frac{R\sqrt{i}}{L}\right) \quad (34)$$

no solamente satisface la ecuación (32), sino que converge hacia cero a infinito, y puede ser demostrado que tiene la particularidad en el origen de satisfacer a una carga, en dicho punto, igual a 1. Porque

$$\frac{d\,z}{d\,r} = \frac{d}{d\,r}\,(R_e\,Z) = 0 \quad \text{para } r = 0\,. \quad (35)$$

("Jahnke and Emde", ya citado, páginas 97 y 141.)

(a) Puede consultarse "Public Roads", abril de 1926, y el libro de F. Schleicher, "Kreisplatten auf elasticher Unterlage", Berlín, 1926, en cuya página 148 hay un análisis del problema de losas en soportes elásticos.

Para pequeños valores de r

$$L^2\,\Delta\,z = I_m\,Z = \frac{1}{4\,k\,L^2}\,\frac{2}{\pi}\,\log e\,\frac{Y\,r}{2\,L} \quad (36)$$

en la que Y es una constante. En una sección circular definida por una constante de pequeño valor para r, el esfuerzo cortante vertical por unidad de longitud puede ser obtenido por la ecuación (1), ya que

$$v = -\,k\,L\,\frac{4\,d\,\Delta\,z}{d\,r}\,z = -\,\frac{1}{2\pi r} \quad (37)$$

("Public Roads". Marzo 1930.)

lo que hace el total del esfuerzo cortante -1, como no podía menos de suceder.

Una carga unidad, distribuída uniformemente sobre la circunferencia de un círculo definido por un valor constante de r, produce el mismo valor de flexión z, y la misma curvatura z en el origen, que otra carga 1, en el origen, produce a la distancia r del origen. Por consiguiente, el valor z_0 de z y el $\Delta\,z_0$ de $\Delta\,z$, producidos en el origen por una carga P, distribuída uniformemente sobre el área del círculo $r = R$, puede ser determinada por la integral

$$W = \int_0^R Z\,\frac{P}{\pi R^2}\,2\,\pi\,r\,d\,r \quad (38)$$

y por

$$z_0 = R_e\,W \quad \text{y} \quad (\Delta\,z)_0 = L^{-2}\,I_m\,W \quad (39)$$

La curvatura $(\Delta\,z)_0$, en el origen, define el momento de flexión m_0, en el origen por unidad de longitud de sección, por la fórmula

$$m = -\,\frac{1 + u\,k\,L^4}{2}\,(\Delta\,z)_0\,. \quad (40)$$

Este momento de flexión define la fuerza de extensión en la parte inferior para $r = o$:

$$o = \frac{6\,m_0}{a^2}\ ; \quad (41)$$

por consiguiente,

$$o = -\,\frac{3\,(1 + u)\,k\,L^2}{a^2}\,I_m\,W. \quad (42)$$

El paso siguiente es expresar W. Por las ecuaciones (34) y (36) encontramos

$$W = \frac{P}{2\,k\,L^2\,R^2}\int_0^R r\,d\,r\,H_0\left(\frac{r\sqrt{i}}{L}\right) \quad (43)$$

o

$$W = \frac{P}{2\,i\,k\,R^2}\int_0^{\frac{R\sqrt{i}}{L}} \frac{r\sqrt{i}}{L}\,.$$
$$.\,d\left(\frac{r\sqrt{i}}{L}\right) H_0\left(\frac{r\sqrt{i}}{L}\right). \quad (44)$$

La integral en la ecuación (44) puede ser expresada en términos de la función "Hankel Bessel" H_1, de orden cero, como sigue:

$$W = \frac{P}{2\,i\,k\,R^2}\left[\frac{R\sqrt{i}}{L}\,H_1\,\frac{R\sqrt{i}}{L} + \frac{2\,i}{\pi}\right] \quad (45)$$

o

$$W = \frac{P}{2\,k\,L^2}\left[\frac{1-i}{\sqrt{2}\,R}\,(R_e + i\,I_m)\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\; H_1\left(\frac{a\sqrt{i}}{L}\right)\frac{2}{\pi}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right]. \quad (46)$$

("Jahnke and Emde", libro citado, páginas 166 y 98.)

Refiriéndonos a las ecuaciones (39), (42) y (46), encontramos la flexión en el centro del área sometida a la carga

$$z_0 = \frac{P}{2\,k\,L^2}\left[\frac{L}{a\sqrt{2}}\,(R_e + I_m)\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\; H_1\,\frac{a\sqrt{i}}{L} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right] \quad (47)$$

y la fuerza de extensión en la parte inferior de la losa bajo el centro de aplicación de la carga

$$o = \frac{3\,(1+u)\,P}{2\,a^2}\;\frac{L}{a\sqrt{2}}\,(R_e - I_m)\,\cdot$$

$$\cdot\; H_1\left(\frac{a\sqrt{i}}{L}\right). \quad (48)$$

Las ecuaciones (47) y (48) se aplican sin tener en cuenta la magnitud del área circular soportando la carga, excepto que cuando el radio R es pequeño, el valor de R será reemplazado por b, definido en la ecuación (2), por razones que pueden verse en el artículo de abril de 1926 en la revista "Public Roads".

La función $H_1\,\frac{a\sqrt{i}}{L}$ puede ser expresada como la suma de una serie convergente de potencias desiguales de $\frac{a}{L}$ más el número m, que se encuentra por la ecuación

$$\log e\left(\frac{m}{2}\right) = -\,0{,}1159\,\cdot \quad (49)$$

(Véase "Jahnke and Emde", libro ya citado, páginas 97 y 141, y página 140 de las tablas.)

Por consiguiente, z_0 y o, en las ecuaciones 47 y 48, pueden ser expresadas, similarmente, por medio de series de potencias iguales de a/L.

$$o = \frac{3\,(1+u)\,P}{2\,a^2}\left[\log e\,\frac{2\,L}{m\,R} + 1/2 -\right.$$

$$\left.-\,\frac{\pi}{32}\left(\frac{R}{L}\right)^2\right] \quad (50)$$

$$z_0 = \frac{P}{8\,k\,L^2}\left[1 + \frac{1}{2\,\pi}\,(\log e\,\frac{mR}{2\,L} -\right.$$

$$\left.-\,5/4)\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]\cdot \quad (51)$$

Por medio de la ecuación (49), las ecuaciones (50) y (51) se convierten inmediatamente en las (4), (6), (8) y (11).