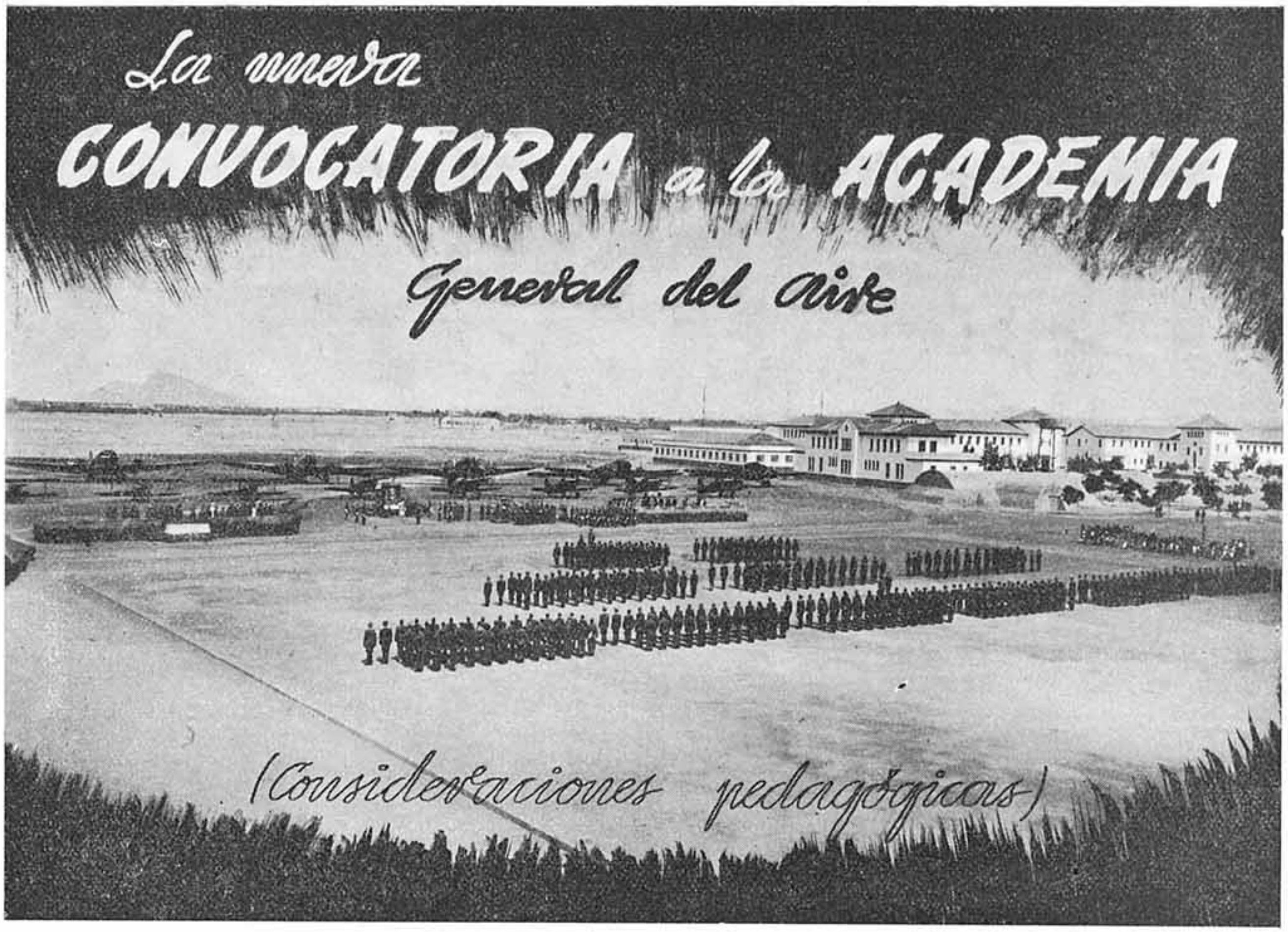


Por el General JOSE M. AYMAT

El *Boletín Oficial del Ministerio del Aire* núm. 96 publica la primera convocatoria para la Academia que ha de nutrir, directamente desde la clase de paisanos, nuestras filas de nuevos Oficiales, y el programa de los exámenes a que habrán de someterse.

Si se consideran los límites de edad, sobre todo el mínimo de diecisiete años, de acuerdo con la no exigencia del actualmente largo Bachillerato, de cuyos cinco primeros cursos solamente se exige la aprobación, inspirado sin duda todo ello en el propósito de obtener oficiales pilotos con todas las cualidades que sublima la juventud, en cuya plenitud conviene mantenerlos ya en las Unidades, unos cuantos años, no puede esperarse una gran cultura previa en muchachos que, al sentir intensa el ansia de volar y un entusiasmo por la carrera de las Armas, y que han de probar una sólida fortaleza física, hay que suponerles más aficionados al aire libre, al deporte y a la aventura, que empollones enamorados de los libros.

Para ellos, hay que confesar que el programa es fuerte; sobre todo en su parte matemática, y porque de otros más sencillos hemos oído reclamar, y dolorse aún al cabo de los años, del trabajo, tiempo y pena que tuvieron que emplear para vencerlos, vamos a hacer unas consideraciones que animen a unos, eviten el descorazonamiento de otros, y a todos, aspirantes, preparadores, parientes y amigos de esos muchachos, les ayude a vencer esa dificultad, que el destino puso al que escribe estas líneas, en lugares de instrucción, en misión de dirección de Escuelas, y en ellas jamás satisfecho del todo del modo de, si no *cumplir*, llenar su deber, se preocupó siempre de cómo debe enseñar el maestro y cómo debe aprender a estudiar el discípulo. Pedagogía se llama esto; pero, como si el concepto se limitara a su sentido etimológico (conducción de *paidos* = *niño*), en cuanto el alumno se hace ya un mozo, o un hombre hecho, ya apenas se estudia. Se le supone, muchas veces gratuitamente, formado del todo en su aspecto estudiantil, y cada maestrillo toma su librillo, y cada muchacho se las desenvuelve como puede. Los superdotados con toda felicidad, y, encanto del maestro, a ellos dedica éste sus mejores atenciones; los malos se estrellan; al padre de alguno de ellos pudo decirle un preparador: "San José era santo, y no hacía mesas de caoba de los tablones del pino." La mayoría siguen y, a fuerza de tiempo, logran ingresar... si antes no se les pasa la edad. Y entre los humanos carpinteros, por uno genial en el Arte de enseñar, hay una docena de adocenados. Saber, poco más necesitan, eso sí, muy bien sabido, que aquello que vayan a enseñar; la dificultad está en el *cómo*.

Así se conserva aquel ingrato recuerdo: "¿Pero, alguna vez te han servido de algo las fracciones continuas?" Otro, viejo contabilista, comenta: "A pesar de la afirmación del *Salinas:* "Ocurre con frecuencia tener que dividir... por $x - a''$, y en mi vida he tenido que hacer tal división." Olvidaron sus preparadores lo que felizmente, en su magnífica obra de Matemáticas, el Coronel Parellada, texto para el Ejército de Tierra, explica cómo en el trabajo de un torno puede necesitarse las tan denigradas fracciones continuas, ni que entre otras aplicaciones, la mentada división, permite disminuir el grado de una ecuación, difícil de resolver, en cuanto tengamos raíces, con sólo dividirla por el $x - a$, valor el a de la raíz.

Libros hay, como los que para el Bachillerato escribieron Rey Pastor en colaboración con Puig Adam, los de divulgación más avanzada, como la *Matemática en la vida del hombre,* de Lancelot Hogben, o *El cálculo infinitesimal al alcance de todos,* por Thomson, modelos pedagógicos que se leen con gusto, pero no todos son así.

Hay que hacer, si no agradable del todo, al menos, menos penoso el estudio, y evitaremos que muchachos animados del mejor espíritu renuncien a venir, que puedan comparar esta preparación con las de las diferentes ramas de la Ingeniería, que el militar ha de ser, ante todo, hombre de acción, más que un intelectual.

No, no pretendemos hacer doctores en Ciencias Exactas, ni aun ponerles en camino de ello. Sepan que la Matemática tiene una utilidad práctica para ellos; la mayor de todas: *la de poder ingresar en la Academia de Aviación.* Eso, aun sin que alcancen a comprender si es pertinente o no, la altura de la valla que se les pone a saltar. En lo militar, quien manda es más y sabe más, y hay que obedecer, dando con ello, al beber el amargo filtro, la primera muestra de disciplina y abnegación, y de devoción a la honrosa carrera de sacrificios que se proponen seguir.

Obedecer órdenes, como la de hacerse previamente piloto de vuelos sin motor, es fácil, pero precisa recordar lo que nuestro Caudillo decía al despedirse de la Academia General, al considerar la disciplina "revestida de su verdadero valor cuando el pensamiento aconseja lo contrario de lo que se nos manda, cuando el corazón pugna por levantarse en íntima rebeldía, o cuando la arbitrariedad o el error van unidos a la acción del mando".

Pero es, además, instrumento útil para mañana. Ved que la complicación del armamento actual exige a todos un gran dominio de la técnica, para saber sacarle el máximo rendimiento, y esa complicación es mayor aún en el Aire. Ved que la Navegación aérea, sin visibilidad, necesita guiarse por la radio o los astros, más difícilmente, quizá, que los marinos; que la Fotogrametría exige conocimientos profundos de Geometría y Cálculo, y sería una vergüenza necesitar que vengan *sabios* de fuera a completar lo que no sabríamos hacer.

Y si es útil la Matemática como instrumento de trabajo, como elemento formativo de la inteligencia, no lo es menos, sin que pueda argüirse, que lo mismo pudiera servir la Filosofía, que en su estudio del Hombre, elemento primordial y el más preciso y precioso de la guerra, porque aparte de que también eso se estudiará dentro de la Academia, con sus encontradas teorías y exposición a desatar la Improvisación y la Fantasía, carece del absoluto rigor científico que tiene la Matemática, y eso disciplina la mente de modo férreo y evita su extravío.

Estas cualidades son las que, desde antiguo, la caracterizan como disciplina ideal como piedra de toque de la inteligencia, del tesón para vencer y garantía de aprovechamiento de futuras enseñanzas.

Cuando eran Oficiales ya, los llamados por los años 1926 al 30, bastaba para elegirlos entre la gran concurrencia de aspirantes a Aviador, unos exámenes orientados psicotécnicamente. Nada de preparadores, el empollón que, en guarnición tranquila, se aprendiera un programa, no podía saltarse al pobre, que allá en un campamento africano, de convoy, a aguada, de la descubierta al fregado en que se jugaba la vida, se pasaba el día, y aun muchas noches, sin contar para leer, en las tranquilas, más que la mala luz de su chabola. Se sorprendía en las preguntas, y sólo quedaba bien el Oficial que conservaba claras las ideas que le enseñaron en la Academia, que luego sintió el afán de seguir aprendiendo, y en Geografía e Historia conocía lo ocurrido recientemente, que tenía facultades de improvisación, retentiva e imaginación. Y aunque pudo notarse un punto flaco en el sistema, cual era una marcada ventaja para los buenos dibujantes, por ser el dibujo un muy frecuente medio de expresión, al confrontar después los resultados a través de un anonimato absoluto, con los anteriores historiales académicos, y con el ulterior resultado de los que seguían los Cursos de Aviación, adquirimos la certeza de que ingresaban todos los excelentes, y que los flojos quedaban todos fuera. El que entre la medianía ingresaran unos u otros, siendo interesantísimo para cada cual, no tenía importancia, mirando al bien del servicio. Quizá para lo sucesivo se hubieran tenido en cuenta los merecimientos en campaña, como garantía de valores morales, imponderables en un examen que, además, hubiera redundado en satisfacción y recompensa de tales merecimientos, concepto éste que se tiene en cuenta en el régimen que acaba de establecerse.

Ahora se trata, no de hombres de carrera, muchos de ellos con veinticinco años, ya formados, sino de jóvenes por acabar de formar, y no hay más remedio que hacer la selección por el mismo camino que anteriormente habían aquéllos seguido.

Empecemos por la Matemática, ya que su importancia dentro del cuadro general del examen y su mayor dificultad, así lo aconsejan.

En primer lugar hay que dar varias vueltas a las asignaturas, bien que no se comience por la Trigonometría hasta tener una soltura en el Algebra y en la Geometría, al menos hasta bien aprendidas las relaciones métricas del triángulo.

En la primera se prescindirá de toda demostración, limitándose a sentar bien fijas y aprendidas *las definiciones,* las cualidades que se desprenden del enunciado, *su comprobación numérica,* y, sobre todo, *su trascendencia* en el orden de resolver *problemas.*

Podrá parecer extraño este método, en ciencia en cuya enseñanza ha sido clásico no pasar adelante hasta dejar bien aprendidos hasta el último detalle los capítulos, aquí diríamos propiamente, escalones. De éstos, nos interesa la firmeza en que apoyarnos, no el análisis del material y del método de trabajo con que se han construído, y esto último vienen a ser las demostraciones. Algún ingeniero tal vez se viera en un aprieto para justificar la regla de multiplicar, y hasta cualquier tendero o ama de casa la emplean con toda seguridad. El mismo empleo de los logaritmos se hace mecánicamente, sin acordarse de que forman progresión ni que son raíces de una ecuación exponencial.

Las verdades matemáticas se demuestran: por tradición, para satisfacer el gusto de su comprobación, absolutamente general, en la enseñanza, como medio formativo, y porque se prestan a ello con el rigor absoluto que no admiten las ciencias físico-naturales, las geográficas o históricas, y menos las filosóficas. No por su necesidad de orden práctico. Es frecuente en revistas leer el planteamiento de un problema, y que el autor dice: "Hecho el cálculo resulta tal cosa"; o bien más modestamente: "A través de las convenientes transformaciones se obtiene..." Si se cree al naturalista, al geógrafo, o al historiador bajo palabra de honor, ¿por qué se ha de hacer de peor condición al matemático?

En el orden práctico no es la Matemática nada ella por sí, sino como *instrumento de trabajo.*

Este trabajo previo, que puede muy bien comprender todo un capítulo en cada lección, debe dirigirlo el Profesor, y dar lugar a un cuadro sinóptico en que se dé forma algebraica a definición y propiedades. Con el cuaderno de cuadros a la vista se resolverán, lo repetimos, problemas.

La jura de la Bandera.

No tiene una gran importancia en esta primera vuelta alguna falta de rigor, ya que se salvará en la segunda, que tiene mucha menos importancia que el tormento que suele producir el salvarla. Sirva de ejemplo: la multiplicación de ecuaciones por cierto factor, sólo legítima cuando no contiene la incógnita. Esta salvedad puede saltarse sin peligro, porque siempre se acabará por comprobar los resultados de los problemas que se pongan, que es, a fin de cuentas, lo que se hace cuando hay que quitar un denominador en que entre la incógnita.

Por la misma causa se evitarán los casos singulares o extremos que, o vengan a dar sentido irreal al resultado, o que hubieran podido ser resueltos mucho más fácilmente por otra vía.

En la segunda vuelta se estudiarán las demostraciones, aparte de que las exige el programa en el examen oral, porque si en vez de seguirlas pasivamente en el libro, trata el alumno de hacérselas él mismo, con la guía del maestro, porque, sólo, pudiera encontrar demasiada dificultad, constituyen un excelente método de formación de investigación matemática. Es de advertir que las verdades fundamentales de la Matemática no son muchas; ésas son las que se pueden conservar en la memoria; las secundarias, mucho más profusas, prácticamente, o las toman los Ingenieros en memorándums o las deducen fácilmente. Incluso pensando únicamente en la oposición, es conveniente el estudio de deducción y demostración de estas verdades. Cierto aspirante al que se le había indigestado la Homotecia, como para retirarse, juramentado a ser "*mártir* antes que *confesor*", fué capaz de inventar demostraciones, algo rara alguna, pero que le valieron ingresar porque, como le dijeron al despedirle, aunque no sabía una palabra de la papeleta, había demostrado saber Geometría. Un preparador que no encontraba "los polígonos semirregulares" que pedía el programa de Marina, ideó una definición: "los que tengan iguales solamente los lados o los ángulos", y suponiendo alguna errata del programa, que tenía otras comprobadas, llegó a demostrar casi todos los teoremas pedidos. Luego, por casualidad y a tiempo, en el "Espasa" (!), encontró que los tales habían además de tener alternativamente iguales los elementos no iguales todos ellos.

Sed galantes con todas y no despreciéis ni toméis antipatía a ninguna papeleta, pero si alguna se os pusiera de morros, acordaos de mi amigo.

No debe ponerse lección para que los alumnos estudien de nuevo solos en su casa y tomársela en clase. Por el contrario, conviene que la teoría sea *inventada y desarrollada* por propio esfuerzo. Para ello es un valioso auxilio el cuadro sinóptico de la lección, que en telones de papel se llevarán cuidadosamente presentados y que irán copiando los alumnos a medida que se desarrolle la lección. El desarrollo al detalle, incluso, alguna vez, más desmenuzado que lo traiga el libro, se hará en la pizarra, quitándole importancia que no tiene.

Estos cuadros no son los que sólo con la definición y fórmulas de aplicación práctica, trazados sucesivamente, se presentaron al dar cuenta de las diversas teorías en la primera vuelta. Deben, por el contrario, permitir, con esfuerzo *asequible a todos,* reconstituir con todo detalle la lección completa, para servir de repaso aun no viendo el texto.

Es interesante evitar que el alumno lea el cálculo al pie de la letra, sino así: "Esta potencia del binomio es igual a este desarrollo homogéneo de su mismo grado, de potencias decrecientes del primer término y crecientes del segundo, con coeficientes números combinatorios del orden de su lugar." Más adelante dirá, simplemente: "Este es el desarrollo del binomio de Newton." Así se gana tiempo, se evita una lata sumamente fatigosa, se llaman las cosas por su nombre y se demuestra que se sabe lo que se dice.

Excuso decir después de esto que condenamos al fuego a esas "pizarras" donde se llenan páginas enteras para demostrar cualquier paparrucha.

PROGRESIONES

ARITMETICAS O POR DIFERENCIA

Definición: $a_{n+1} = a_n + (\pm\, d = \textit{diferencia}\ \text{constante})$.

Término general: $a_{m \pm K} = a_m \pm K\, d$.

Suma de equidistantes: $a_{1+K} + a_{m-K} = a_1 + a_m$.

Término medio: $\dfrac{a_1 + a_m}{2}$.

Suma: $\begin{cases} \text{Por extremos:} \quad s = m\,\dfrac{a_1 + a_m}{2} = m \text{ términos medios.} \\ \text{Por el 1.º y } d\text{:} \quad s = m\, a_1 + \dfrac{m\,(m-1)}{2}\, d. \end{cases}$

Interpolación de n medios: Diferencia $= \dfrac{a_K - a_{K-1}}{n-1}$.

GEOMETRICAS O POR COCIENTE

Crecientes o decrecientes: $a_{n+1} = a_n \left[(q \gtrless 1) = \textit{razón}\ \text{constante.}\right]$

$a_{m \pm K} = \begin{cases} a_m \,.\, q^K \\ a_m / q^K \end{cases}$

Producto: $a_{1+K} \,.\, a_{m-K} = a_1\, a_m$.

Producto total: $P = \left(\sqrt{a_1\, a}\right)^m$.

Suma: $\begin{cases} \text{(restándola de } s\, q\text{):} \quad s = \dfrac{(a_m\, q = a_{m+1}) - a_1}{q - 1}. \\ \text{por el 1.º y } q\text{:} \quad s = a_1\, \dfrac{q^m - 1}{q - 1}. \end{cases}$

Interpolación: Razón $= \sqrt[n+1]{a_K / a_{K-1}}$ $\Big\{$ Sin estar en texto para problemas.

PROGRESIONES HIPERGEOMETRICAS

Definición: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha\, n + \beta}{\alpha\, n + \gamma}$ finita, en que $\alpha\, \beta\, \gamma$ *constantes* $\Big\{$ α y $\gamma \neq 0$ a la par o denominador $\neq 0$.

Suma: Para cada n de 1 *a* m se hace producto de medios = al de extremos (el m.º en forma de identidad para no pasar de él) y se suman

$$s_m = \frac{a^m\,(m\,\alpha + \beta) - a_1\,\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}.$$

Ejemplos.—Se deducen los valores $\alpha\, \beta\, \gamma$ de la razón n.ª y se aplica la fórmula:

Para $1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3 + \ldots + m\,(m+1)$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+2}{n}$ $\qquad \alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 0,\ s_m = \dfrac{m\,(m+1)\,(m+2}{3}$,

y así los demás ejemplos.

FACTORIALES

Definición... $\begin{cases} \text{Simple......} \quad 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n = \underline{|n} = n! \\ \text{En general..} \quad F \,.\, a \text{ de grado } n \text{ y diferencia } d = a \,.\, (a + d) \,.\, (a + 2\,d) \ldots \big(a + (n-1)\,d\big) = a^{n/d}. \end{cases}$

Multiplicando los binomios sucesivamente, sale:

$a^{n/d} = a^n + a^{n-1}\, s_1\, d + a^{n-2}\, s_2\, d^2 + \ldots a\, s_{n-1}\, d^{n-1}$ $\big(s_n =$ suma de productos n.os de 1, 2, 3 ... $(n-1)\big)$.

De estos cuadros, como ejemplo, damos la lección de Progresiones, siguiendo el texto de Rey Pastor, a cuya vista se comprenderá la expresión abreviada en forma algebraica, que basta leer de las definiciones, base del cuadro. Los teoremas que son consecuencia directa de la definición se expresan en igual forma. La disposición en dos columnas establece aquí el paralelo de propiedades de las aritméticas y las geométricas.

Al leer la suma de los términos de la progresión aritmética se hará notar que puede leerse: "A efectos de suma, pueden suponerse todos los términos del valor del término medio"; y lo mismo en el correlativo producto de los de la geométrica.

Una observación hemos de hacer a la suma de la progresión geométrica. Su deducción no se hace ya tan directamente de la definición. El texto da el camino: multiplicarla por la razón y restarle la propia suma. Igual pudo decir multiplicándola por $(q - 1)$; pero el alumno, desapercibido de que ello es consecuencia del denominador $q - 1$ que nos va a salir, no adivina fácilmente la fuente de inspiración de esa genialidad, y tiene que aprenderse de *memoria* ese camino. El preparador debe, en este caso, decir sencillamente: "Sumemos los términos poniéndolos en la forma que se deducen de su definición, a ver lo que resulta, que si acabamos en una inocua identidad, ya intentaremos otro camino." Claro que el primer término, no habiéndolo anterior, habrá que ponerlo en forma de identidad. Tendremos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1\, q \\ a_3 &= a_2\, q \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a_{n-1}\, q. \end{aligned}$$

La suma buscada es la de los primeros miembros. En los segundos, aparecen todos los términos, menos el primero, multiplicados por la razón, y los que tienen tal factor lo 90 — α, tan fácil de colocar con el transportador, nos lleva directamente al centro O.

Consideraciones análogas nos llevarán a alejar de construcciones y demostraciones esas genialidades, volviendo casi siempre a la lógica de los caminos trillados y bien conocidos.

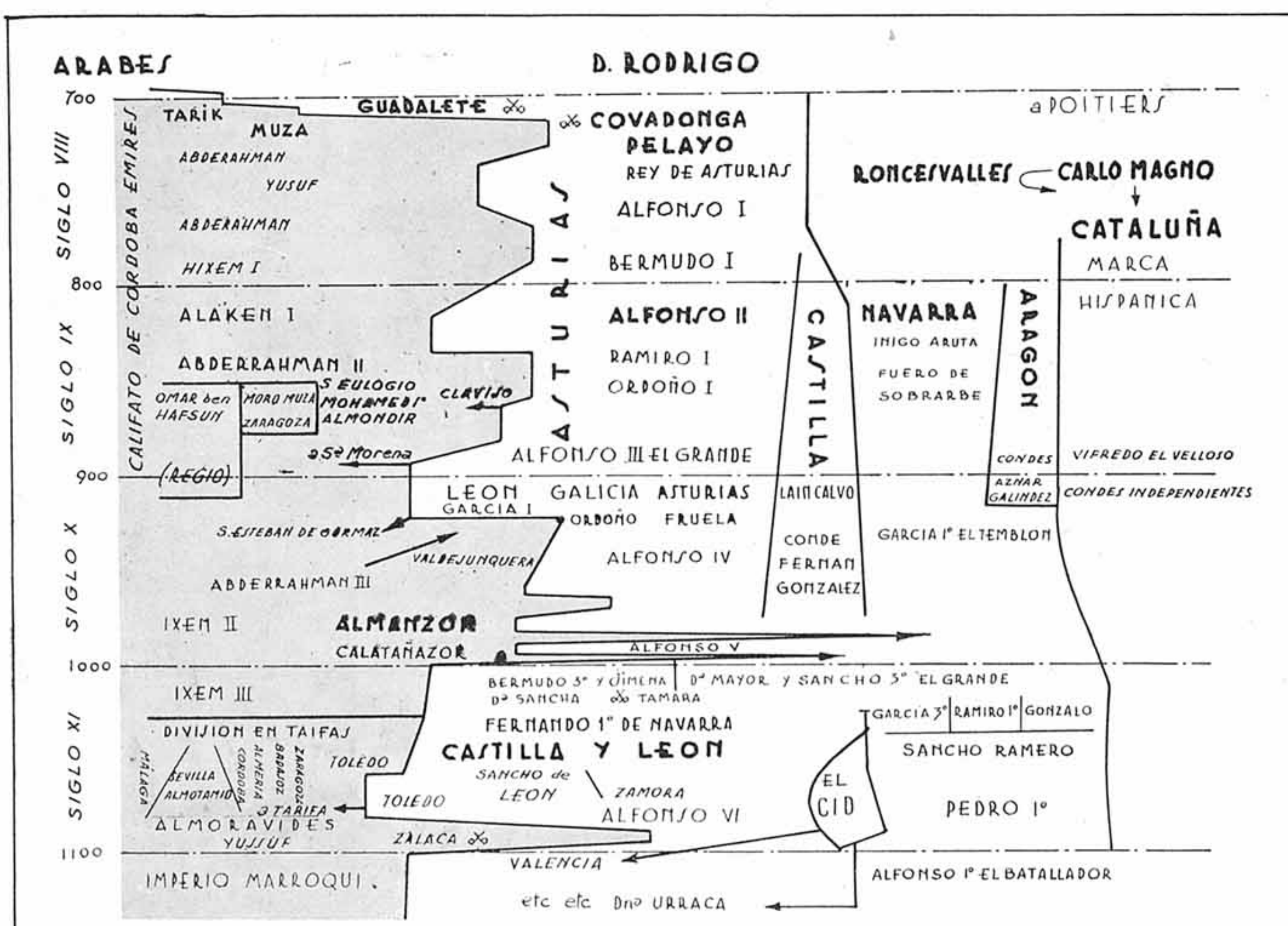
Debe, finalmente, tratarse de generalizar, y encontrar analogía entre propiedades aparentemente distintas.

Así, en las áreas se considerarán las dos dimensiones de las formas así dispuestas. El triángulo es media forma de dos dimensiones, pero es que lo es también el sector circular, picudo, con vértice en el centro, que subsiste aun cuando cierre la vuelta completando el círculo. Su área será antes que πr^2, la mitad de la circunferencia ($2 \pi r$), por la altura o radio, r.

De igual modo la esfera es una pirámide de base en su superficie, y altura, el radio. Su volumen, cuerpo picudo, será el tercio de $4 \pi\ r^2$ por r.

Para la Geografía, se imponen los croquis múltiples, que contengan esquemáticamente, sin detalle menudo, la descripción del texto; múltiples y parciales en cada aspecto: físico, climatológico, político, de comunicaciones y económico. Trazos viriles y expresivos. Vertido todo en otro general a colores que, pudiendo, para mayor claridad, ser parcial o casi totalmente mudo, o con abreviaturas o iniciales de la rotulación, relaciona los diversos aspectos y completa el estudio del país. En trazos llenos de tinta negra, permitirán calcarse en papel semitransparente de copia a máquina. El hacerlos cada alumno, sin filigranas artísticas, fija las ideas inmensamente mejor que innumerables lecturas. El texto de Izquierdo presenta base magnífica para realizar este trabajo.

La Historia requiere, más aún que la Geografía, el cuadro sinóptico de cada lección, y otros generales, cronológicos, sin detalle, de grandes períodos. Croquis que facilite un Atlas, pero que debe de hacer el alumno; unos, en que en determinado momento histórico aparezca contemporáneamente el desarrollo de los diversos entes históricos; y otros, en que refiriéndose a uno solo, se señalen superpuestos los límites adquiridos en diversas épocas. Debe aprovecharse el episodio famoso por su importancia, resucitada su memoria por circunstancias de momento, una película notable, obra teatral, recuerdo histórico en estos momentos, en que la guerra divulga tanto Geografía e Historia. Prende mucho mejor en la mente el episodio que las grandes síntesis. El secreto del maestro es saber relacionar el protagonista apasionante con sus contemporáneos y con el ambiente. La novela histórica, la buena y que no falsea fantásticamente la verdad conocida, es la gran divulgadora de la Historia. ¡Con qué fruición leíamos de muchachos las notas en letra menuda del Moreno Espinosa! Petiot dejará en la memoria



PRIMERA PARTE DE LA RECONQUISTA

de los mejores cuando la lección sea de las difíciles, pues así se gana tiempo, y no olvidar que en esa segunda vuelta interesa más *ir bien que de prisa.*

Y vamos con los problemas, elemento esencial para fijar ideas, que dan amenidad a la lección y convencen de la utilidad que recompensa la atención prestada. Su acertada solución es, además, paso previo indispensable para llegar al ulterior examen oral, que puede tener ya más defensa.

En primer lugar, deben ser interesantes. Debe huirse de los ejercicios literales, siempre que se pueda; nada importa cuál es el valor de x, mucho la posible población del Mundo dentro de cien años, o el capital que hubieran creado, a interés compuesto, los 30 dineros de Judas. Cuando falte asunto corriente en que basar los problemas, puede acudirse a trucos, como: "Habiéndose olvidado tal dato..." o "Unos señores tuvieron la humorada de..." "En un circo se hacía la adivinanza de..." Todo menos las insensateces, que a fuer de absurdas, pierden todo interés y hacen pensar en el poco ingenio con que se atormenta la mente del alumno. "La edad del padre es triple de la de su hijo... tal y tal. ¿Cuáles son esas edades?" Imposible de presentarse en la realidad de la vida. Más absurdo aún: "Tres padres, con sus hijos, salieron a cazar. De cada tiro mataron tantos pájaros como disparos hizo cada uno, etc., etc." ¿Cabe mayor dislate? Cuando puede decirse: "Después de alegre cena, tres matrimonios fueron a una tómbola y decidieron comprar cada uno tantos objetos de un mismo precio cuantas fueron las pesetas de su coste." Ello es raro, pero posible.

Otro enunciado verosímil, y que se hace interesante por lo pintoresco. Después de un gran combate se perdió la documentación de una Compañía. Para tratar de reconstituir la lista, del número de hombres, se recuerda sólo que las bajas sufridas alcanzaban justamente la pintoresca proporción del $69,\widehat{69}$ por 100 (¿fracción periódica pura, con hombres enteros? Sí, sí tal), y que al repartir un donativo de tabaco tocaron exactamente a cajetilla cada cinco. ¿Cuántos eran en total?

Para manejar potencias basta contentarse con las tres primeras, manejando áreas o volúmenes; los problemas de movimiento variado (problema clásico del pozo) nos traerá el empleo de cuadrados del tiempo.

Pero el método más fecundo de plantear problemas es sacarlos de las actividades de otras ciencias. Basta empezar el enunciado de este modo: "Experiencias fisiológicas de los médicos demuestran que la superficie del cuerpo humano en cm^2, en función de la estatura, e, en centímetros, y de los kilogramos de peso, p, viene dada por la fórmula

$$S = 72 \cdot e^{0,725} \cdot p^{0,425} \ldots\text{»},$$

y de ahí se derivan problemas de logaritmos.

Fórmulas del cálculo de probabilidades dan lugar a otras. La Mecánica, problemas de navegación, de radios de acción, de balística, y sobre todo de Aeronáutica, dan origen a otros problemas, independientes del fundamento que se les siente. La Topografía nos los proporcionará de Trigonometría.

Otra fuente de variedad en los problemas es no circunscribirlos a la teoría que se estudie, sino a combinaciones de ellas, para cuya solución prestará valiosa ayuda el cuaderno de cuadros o el de fórmulas únicamente, que se puede ir redactando simultáneamente. Así la determinación del número de términos de una progresión geométrica en función de la suma, no soluble la ecuación exponencial sin logaritmos, al llegar a éstos se puede sacar a colación.

De la solución de los que se presten a ello, se sacará la enseñanza conveniente de todo un método para resolver toda una familia de ellos.

Una abundante, variada y escogida colección de problemas se encuentra en el libro de Matemáticas de Parellada.

Los números deben ser sencillos. No esas multiplicaciones de siete u ocho cifras por otras tantas, fuera de realidad, que incluso enseñan menos que cuatro o cinco de sólo tres o cuatro cifras. Cuando se conozca el manejo de la regla de cálculo, convendrá emplearla habitualmente para familiarizarse y apreciar por sentido común el orden de las cifras del resultado.

La ventaja principal del problema sobre el ejercicio, aparte de su interés, está en que obliga a razonar para llegar al planteamiento; a ver que hay ocasiones en que, reflejando la realidad de la vida, sobran datos, lógicamente independientes para el resultado; otras, resultado que son, paralelamente al que se nos pide, de los datos verdaderamente determinantes; otras, finalmente, en que resultan incompatibles, y hay que denunciarlo así.

El problema, además, exige el buen sentido de tener una idea del orden del resultado que se espera, y que además pone muchas veces sobre aviso de posibles distracciones, que conducen a absurdos.

En este orden hemos de celebrar la disposición oficial de dar por no resueltos los problemas de solución imperfecta *en el procedimiento empleado,* indicando una tolerancia para el que tiene la desgracia de equivocar o bailar alguna cifra de un logaritmo. Otra cosa sería la falta de sentido común, de conformarse con lo que resulta de tomar como número un logaritmo, dando unos metros para distancia a la Luna o millones de pesetas al precio de una chaqueta o el kilo de pan.

En los de Aritmética, que desarrollan el ingenio sobremanera, no dejar de acudir al buen sentido con que la vieja echa su cuenta.

Qué interesante lección es aquella poesía de Gabriel y Galán, *Varón,* que empieza:

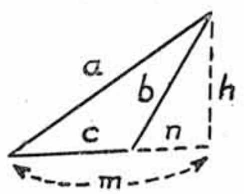
> Me giedin los hombris
> que son medio jembras!

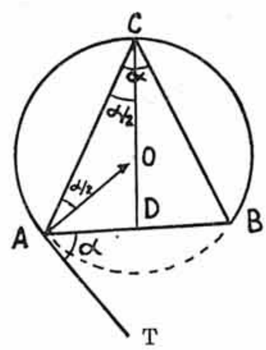
con que se queja un campesino del habla remilgada y del poco saber de su hijo, estudiante en Salamanca:

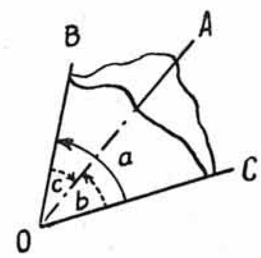
> Pa sabel sus saberis le ije:
> "Sácame la cuenta
> del aceiti que hogaño mos toca,
> del lagal po la parti que es nuestra.
> Se maquilan sesenta cuartillos
> pa ca parti entera
> y nosotros tenemus, ya sabis,
> una media tercia,
> que tu madre heredó de una quinta
> que tenía tu agüela Teresa."

¡Ya ves tú que se jaci en un verbo!
Sesenta la entera,
doci pa la quinta,
cuatro pa la tercia;
quita dos pa una media, y resultan
dos pa la otra media.
Pues el mozu empringó tres papeles
de rayas y letras,
y para ensenrearsi
de aquella maeja,
ijo que el aceiti que a mí me tocaba
era *pi menus erre*, ¿te enteras?
¡Pus pués dil jaciendo
las sopas con ella!
¿Y ésos son saberis?
¡Esas son fachendas!

Las lecciones deben ser cortas, pues sobre todo en el análisis algebraico se agota pronto la capacidad de atención de muchos de los alumnos. Cincuenta, mejor cuarenta minutos y vigilando si se distraen. En cuanto se note, a menos de que se trate de un recalcitrante desaplicado, debe terminarse la lección al primer punto posible.







El tiempo se gana dando incluso dos clases de una misma asignatura; más variada, una de teoría y otra de problemas, alternadas con Geometría y las de Matemáticas con las de Geografía, Historia e Idiomas.

En el estudio de Geometría se seguirán, en lo que quepa, igual inspiración. Las figuras se variarán de forma y orientación. Incluso se hará abstracción de ellas para dar generalidad a las propiedades y su demostración. Aunque parezca raro, se ha llegado a escribir una Geometría "sin figuras", describiendo su trazado.

Un ejemplo convencerá de su posibilidad. Teorema de Pitágoras: Divídase el triángulo en otros dos por la altura sobre la hipotenusa. Resultan semejantes por tener cada uno de los parciales, común, uno de los ángulos agudos con el primitivo: 1.º La proporción de hipotenusa parcial, cateto además del triángulo total, respecto a la hipotenusa primitiva, hace a cada cateto primitivo media proporcional entre su hipotenusa y su propia proyección sobre ella. 2.º La suma de los cuadrados de esos catetos, como expresión de esa mediación proporcional, produce el producto de la hipotenusa, factor común de la suma de sus dos segmentos, o sea por sí misma, o su cuadrado, expresión final del teorema.

En general, cuando los razonamientos se desarrollen más que sobre puntos, a los que sólo excepcionalmente se privará de designación, sobre líneas, ángulos o planos, como sucede al estudiar relaciones métricas, se designará a éstos con letras minúsculas, que si es preciso se señalan con llaves.

Así se evita la designación, difícil de seguir de rectas y segmentos por dos de sus puntos, y los ángulos por tres. Se gana considerablemente tiempo y claridad.

Las figuras difíciles de "ver en el espacio", se repetirán señalando aristas y líneas de la arquitectura y muebles de la clase, mejor con figuras hechas en relieve con alambres, hojitas de papel, con anaglifos observables con gafas bicolor o con estereogramas, que no es difícil enseñar a observar a ojo desnudo (1).

Para la resolución de los problemas, que tanto estimulan la imaginación, debe emplearse variados métodos, cuyo estudio general ocupa un utilísimo capítulo del Ortega, que aunque no lo pida el programa, no debe dejar de estudiarse, y muy detalladamente.

En cambio se huirá de la desconcertante "feliz idea", de que tan famosa muestra es el trazado del arco capaz de un ángulo dado. ¡Cuánto más fácil no es volver a la investigación corriente!

Supongamos resuelto el problema.—Al recorrer el vértice del ángulo, el arco de A a C y B ocupa posiciones singulares en su origen A y en C, sobre la mediatriz $D\ O\ C$. En el primero, el lado $C\,B$ viene a plegarse sobre $A\,B$, mientras la cuerda $C\,A$ se transformará en la tangente $A\ T$. He ahí surgida espontánea la feliz idea, y apeada a la más modesta vulgaridad. La perpendicular $A\ O$ a $A\ T$, lado del ángulo $B\ A\ T = \alpha$, trazado sobre $A\ B$, nos proporciona, con la mediatriz $D\ O$, el centro O buscado. La posición C, obtenida sobre la mediatriz con el ángulo $90 - \frac{\alpha}{2}$, nos proporciona un tercer punto, que con $A\ B$ determina la circunferencia. Finalmente la cuantía de los ángulos señalados indica que la recta $A\ O$, que forma, con $A\ B$, el ángu-

(1) Ver *Revista de Aeronáutica*, núm. 20, de julio de 1942.

son todos menos el último; es decir $(s - a_n)\, q$, producto al que, para obtener la suma de segundos miembros, hay que agregar el primer término al que no multiplica la razón. Así, pues,

$$s = (s - a_n)\, q + a_1.$$

Ya ahora todo es coser y cantar:

$$s = s\, q - a_n\, q + a_1, \qquad a_n\, q = s\,(q - 1) + a_1;$$

y, finalmente,

$$s = \frac{a_n\, q - a_1}{q - 1},$$

q. e. l. q. q. d.

Después de esto, se tacha del cuadro la indicación recordatoria "restándola de $s \,.\, q$".

Ejemplo de fallo del camino directo.

El cálculo del número de balas esféricas de una pila piramidal de base cuadrada se reduce al de la suma de los cuadrados de la serie natural de los números; caso, éste, particular del de las potencias de igual grado.

Sólo a la memoria puede reducirse la fórmula general, y sólo a ella, su deducción a base de las potencias del grado inmediatamente superior. Para evitar ese esfuerzo, sigamos el camino natural. El cuadrado de cada número lo consideraremos función del anterior al agregarle una unidad, y los dispondremos en columna para sumarlos:

$$\begin{array}{llllll}
1^2 & = 1^2 & = & & & 1 \\
2^2 & = (1+1)^2 & = 1^2 & + 2 \,.\, 1 \,.\, 1 & & + 1^2 \\
3^2 & = (2+1)^2 & = 2^2 & + 2 \,.\, 2 & & + 1 \\
4^2 & = (3+1)^2 & = 3^2 & + 2 \,.\, 3 & & + 1 \\
\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & & \dots \\
\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & & \dots \\
\underline{m^2} & = \big((m-1)+1\big)^2 & = \underline{(m-1)^2} & \underline{+ 2\,(m-1)} & & \underline{+ 1}
\end{array}$$

La suma, S, de los primeros miembros, iguala esa misma suma a falta del m^2, más el doble de la de los $(m-1)$ primeros, más m unidades, o sea:

$$S = S - m^2 + 2\,\big(1 + 2 + \dots + (m-1)\big) + m,$$

lo que conduce a la identidad

$$m^2 = (m-1)\, m + m.$$

No nos sirve, pues, el camino; pero si nos fijamos en que si las dos sumas de cuadrados $S^{(2)}$ se destruyen, permanece independiente de ella la suma de los números sucesivos, hasta el inmediatamente inferior, de las potencias de un grado menos. Ello nos induce a tomar las potencias superiores hasta $m + 1$:

$$\begin{array}{lll}
2^3 & = (1+1)^3 & = 1^3 + 3 \,.\, 1^2 + 3 \,.\, 1 + 1 \\
3^3 & = (2+1)^3 & = 2^3 + 3 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2 + 1 \\
\dots & \dots\dots & \dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\
\dots & \dots\dots & \dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\
\underline{(m+1)^3 =} & & = \underline{m^3 + 3\, m^2 + 3\, m + 1} \\
S^{(3)} - 1 + (m+1)^3 & & = S^{(3)} + 3\, S^{(2)} + 3\, S^{(1)} + m;
\end{array}$$

de donde

$$S^{(2)} = \frac{1}{3}\left[(m+1)^3 - (3\, S^{(1)} + m + 1)\right];$$

que poniendo

$$S^{(1)} = m\, \frac{m+1}{2},$$

resulta, al fin,

$$S^{(2)} = \frac{1}{6}\left[m\,(m+1)\,(2\,m+1)\right].$$

Al observar que los coeficientes de las sumas verticales de potencias sucesivas son los del binomio de Newton, de grado $n + 1$, se comprende la generalización de la fórmula para la potencia enésima, y resulta, por idéntica deducción, para suma de las m sucesivas potencias enésimas:

$$S^{(n)}_{m} = \frac{1}{n+1}\left[(m+1)^{n+1} - \left[\binom{n+1}{2} S^{(n-1)}_{m} + \binom{n+1}{3} S^{(n-2)}_{m} + \dots + (m+1)\right]\right].$$

Más típica y elemental es la resolución de la ecuación completa de 2.º grado. ¿Por qué pasar el término independiente al 2.º miembro, multiplicar por $4a$ y sumar b^2? ¡Qué trabajo para retener este triple y genial (?) truco! ¿Cómo pudo caerse en cuenta de él?

El dejar solos los términos en x es para que no estorbe lo demás: $ax^2 + bx = -c$. ¡Si pudiéramos extraer la raíz del primer miembro! Tendría que ser cuadrado perfecto; sólo puede serlo de un binomio; éste requiere términos de segundo grado de los componentes y su doble producto. Multiplicando por a el primér término, $a^2\, x^2$ es ya cuadrado perfecto; el término en x tiene el factor b; luego necesitamos un término $+ b^2$. Si del binomio, uno es ax y el otro b, el término compuesto sería $2abx$, y es sólo su mitad. Sólo será un doble de la mitad que tomemos de b; $2 \,.\, ax\,(1/2\, b)$. Con ello el añadido de b^2 tendremos que reducirlo a $\frac{1}{4}\, b^2$. Para quitar el denominador tendremos que multiplicar por 4 el primer miembro, de donde resulta:

$$4\, a^2\, x^2 + 4\, a\, b\, x + b^2 = (2\, a\, x + b)^2 = b^2 - 4\, a\, c,$$

camino ya de sacar la raíz cuadrada y resolver una ecuación de primer grado.

Al alumno se le pueden dar otras recetas: A fuerza de resolver ecuaciones, todos se acuerdan, sin vacilar, de la solución:

$$x = \frac{-\, b \pm \sqrt{b^2 - 4\, a\, c}}{2\, a};$$

basta deshacer las operaciones y se tiene:

$$2\, a\, x = -\, b \pm \sqrt{\ }, \qquad 2\, a\, x + b = \pm \sqrt{\ },$$

$$(2\, a\, x + b)^2 = 4\, a^2\, x^2 + 4\, a\, b\, x + b^2 = b^2 - 4\, a\, c,$$

donde aparecen manifiestos los trucos.

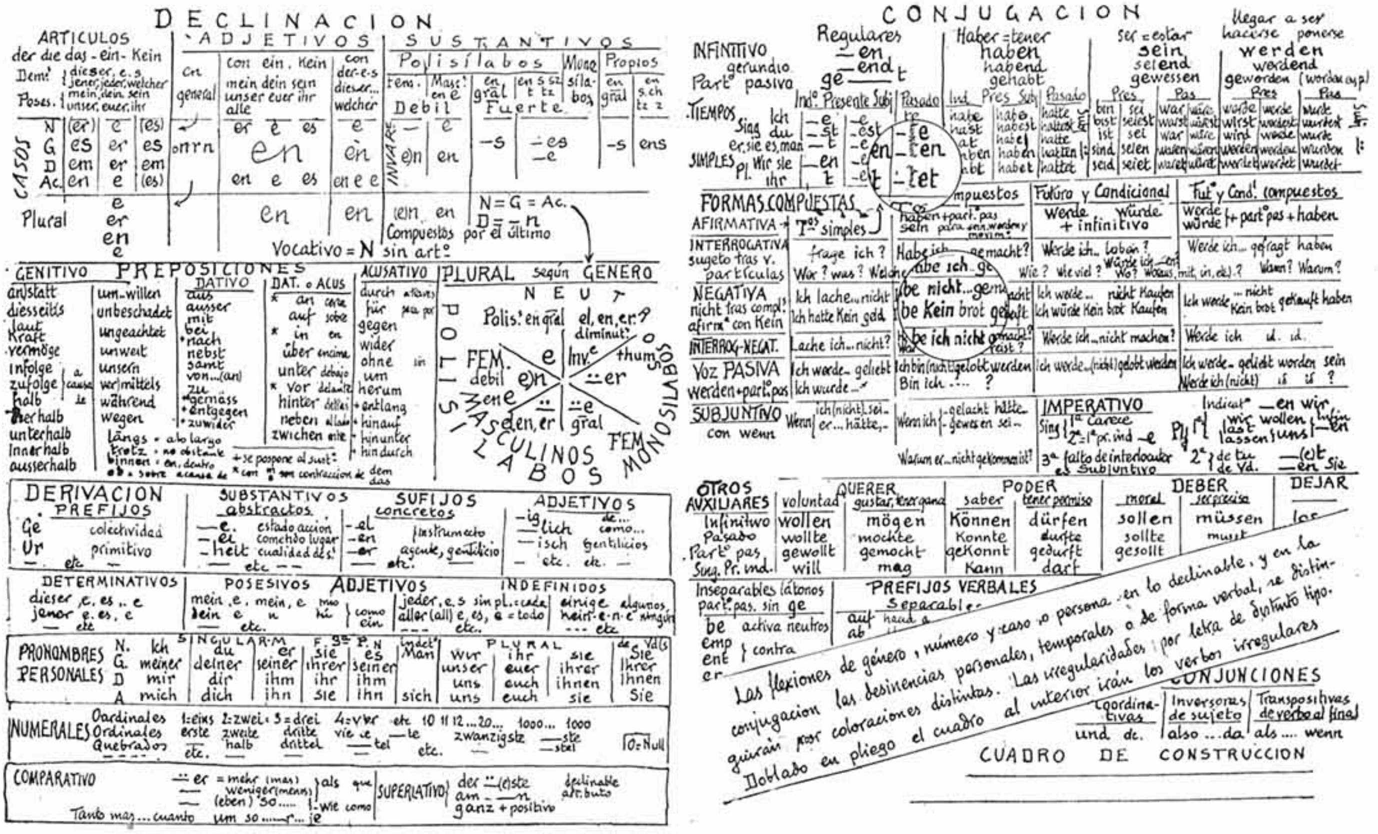
Otro modo es fijarse en el discriminante $b^2 - 4\, a\, c$, término independiente de x, donde está el factor $4\, a$, por el que hubo que multiplicar, y el b^2 que añadir.

Si lo primero es expresión de la lógica, al ser algo complicada, puede sustituirse por el recorrido inverso de las miguitas que dejamos en el olvidado camino de ida; lo otro una pillería, que no debe menospreciarse cuando es tan fácil como útil.

Para la explicación se sacará a la pizarra a un alumno, más detalles que las Cruzadas o la Guerra de los Cien Años. En cambio, Juana de Arco arrastrará, con su interés, al conocimiento de sus contemporáneos, y de Duguesclin pasaremos a Pedro el Cruel y a los Trastamaras. Alejandro Farnesio, con su entrada en París, nos llevará a Enrique IV, y esperando la Invencible, a Isabel de Inglaterra. A pesar de lo denigrado de dar importancia a los "enlaces y gestas" de los Reyes, aquéllos, fáciles de recordar, traen consigo grandes consecuencias históricas. La familia de los Reyes Católicos nos trajo el Imperio. Matrimonio fué lo que trajo a España a los Borbones, pues Felipe V era tataranieto de Felipe III.

Para la Cronología es imposible retener fechas y fechas.

Se añadirá a los nombres geográficos dos números que indiquen su situación en el mapa de referencia, en décimos, a ojo, de izquierda a derecha y de arriba abajo, y en los históricos, la página del texto en que se estudian. Estos índices, llevados por letras en cada página o columna (triple para cada una de las A, B, C, G, M, P, R y S), facilitan los repasos. Si uno no recuerda nada del personaje o lugar, va al texto o mapa de referencia con lo que repasa. No importa lo heterogéneo con que resultan colocados: la imaginación es velocísima para pasar de un lugar a otro en la anaquelería de la memoria y comprobar si aquel nombre está vacío, o más o menos lleno, de contenido. Además llega a constituir un entretenimiento, y hasta un juego, si



CUADRO SINOPTICO DE LA GRAMATICA ALEMANA

Deben fijarse una docena o dos, referidas a hitos sobresalientes en la Historia. Guadalete, 711; Las Navas, 1212; Granada, América, 1492; etc., etc., y saber referir a ellas, poco más o menos, los sucesos contemporáneos. Así, siglo tal, mediados, último tercio de cuál, tendrán pleno sentido y ambiente.

La construcción de cuadros como el que damos de la difícil edad media española ayudará a ello, por la memoria espacial que su contemplación trae consigo.

Historia y Geografía son asimiladas si se tiene el cuidado de anotar como en índice alfabético los nombres propios, con ligerísimo comentario: Astorga: ob. r. Tuerto. Maragacia. = Alvaro de Bazán, o Bazán (D. Alv.), Almirante. Lepanto. Lepanto - 7 octu. 1571. = Aníbal = G. Cart. 4/4 III a. J. C. (= último cuarto del siglo III antes de J. C.).

con un compañero, al citar un nombre, ha de decir el otro dos o tres relacionados directamente con él.

Idiomas.—Huir de dificultarlo. Frente a cierto profesor de alemán que comenzaba diciendo que sólo a los cuatro años de estudio se empezaba a saber algo y que él, con doce y habiendo estado en Alemania, apenas sabía un poco, hay que anteponer el doctor Palacios, que animaba a sus alumnos: "Cojan un libro de la técnica que ustedes conocen y un diccionario, y verán que no es tan difícil"; y con muy poco lograban traducir.

Ni método Berlitz puro, hablar, hablar y más hablar, que la Gramática entre intuitivamente como en los niños. Ni Gramática sola, a todo detalle, aburrida y desconsoladora. Es más fácil hacer una exposición rápida, haciendo resaltar lo que de variante tiene el idioma respecto al propio, y su construcción, incluso obligando a decir la frase en castellano, pero construída en el idioma extraño: en ese castellano que hablaría un extranjero capaz de traducir sólo palabras sueltas. Ejemplo de construcción alemana: "Yo he, en casa de la llorante viuda, un de madera mueble comprado." De ese resumen gramatical hágase un cuadro sinóptico. Una carilla al verbo y la construcción; en la opuesta, el nombre, declinaciones, pronombres y adjetivos, y en el interior del pliego, los vergos irregulares por orden alfabético. Cuadro individual del alumno y mural para la clase.

Y ¡a traducir!, casi desde el primer momento. La Gramática surge del comentario, verdadero análisis gramatical, que se hace cada vez más profundamente, sobre el cuadro a la vista.

El vocabulario de los nombres que se van aprendiendo, llevado a una libreta, facilita el repaso. De tiempo en tiempo se revisa, llevando a otro nuevo sólo aquellas voces del anterior que se cree pudieran haberse olvidado. Así, el que queda aliviado de las voces bien conocidas va acreciéndose con voces nuevas.

El manejo del diccionario obliga, mientras se busca una voz, a estar repitiéndola mentalmente y fijándose en todo el detalle de su escritura, amén de si es derivada, de pensar en su análisis gramatical. El desorden en que dentro de cada página o columna hay en el vocabulario personal, obliga a recorrer con la vista otra porción de voces, que si no se traducen, estimulan a ver su significado.

Las canciones, algo menos la Poesía, facilitan enormemente el recuerdo imperecedero de voces, aparte que faciliten una relación con jóvenes y bellas compañeras casuales de viaje. Las revistas, ilustradas mejor, de tema aeronáutico, son también muy recomendables.

La Geología, las Ciencias Naturales, la Física y la Química, exigen métodos análogos, que el propio maestro encontrará en cuanto piense en ello o se inspire en algún libro de Pedagogía, y que no detallamos porque este artículo ha tomado ya proporciones desmesuradas.

Como resumen de todo: No aburrir, sino hacer lo más ameno el estudio. Cambiar la forma de trabajar, interesando al alumno, obligándole a fijar la atención, lápiz o pluma siempre en ristre, haciendo cosas nuevas que no puedan hacerse sin estar en ello.

Todo menos dejarle frente al libro pasando y repasando sus líneas, sin entender, a veces ni atender, que el mecanismo visual llega a mecanizarse a pesar de que la imaginación ha volado muchas veces, a temas más cautivadores que el libro que se tiene delante, que se mira y no se ve, que se lee y no se atiende.

Y si del alumno pasa a pensar en sí mismo, el profesor debe estar siempre preocupado por un ansia de progreso en el difícil arte de enseñar.