

Longitud de pistas en los proyectos de aeropuertos

(Véase mayo 1943, páginas 37 a 44.)

Por E. TERRADAS

Ingeniero, Consejero-Asesor del Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica y antiguo Profesor de la Escuela Superior de Aerotecnia.

B. Vuelo bajo.

1. *Método de Göthert.*—De acuerdo con el criterio enunciado en el artículo anterior (pág. 44 del núm. 30 de REVISTA DE AERONAUTICA), si se adopta el valor de C_L correspondiente a la mínima resistencia, la velocidad para la cual la sustentación iguala al peso es relativamente grande, y para alcanzarla se requiere una longitud l_1 excesiva. Si para evitarlo se adopta al terminar la rodada el valor $C_{L\text{ máx}}$, resulta el mínimo l_1 ; pero la maniobra es peligrosa, por la posibilidad de entrar en vuelo inerte con pérdida de maniobra. En definitiva, se acepta como valor de C_L para el cálculo de V_1 por la fórmula (2) el de $C_{L\text{ máx}}$, rebajado en un 15 por 100 como equivalente al criterio de la página 44. Esta disminución es el margen de seguridad para evitar el vuelo inerte.

Al terminar la rodada el avión sin contacto con el suelo, inicia el arco de vuelo bajo. La trayectoria se supondrá determinada por la hipótesis de que C_L se mantiene constante durante toda su duración (hipótesis de Göthert: *Der Abflug von Landflugzeugen mit besonderer Berücksichtigung des Uebergangsbogens: Jahrbuch der deutsche Luftfahrtforschung, 1937*) (1).

Las condiciones iniciales y límites determinan la trayectoria curvilínea. En un punto cualquiera de la misma hay equilibrio entre las fuerzas aplicadas y las de inercia. Proyectando sobre la tangente, siendo s el arco y γ el ángulo de la tangente con el horizonte,

$$\frac{W}{g} \frac{1}{2} \frac{dV^2}{ds} = T - \frac{1}{2} C_D \rho S V^2 - W \sin \gamma;$$

proyectando sobre la normal interna,

$$\frac{W}{g} V^2 \frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{2} C_L \rho S V^2 - W \cos \gamma;$$

(1) Otras hipótesis, v. gr., V constante durante el arco: Schrenk: "Abflug und Schraubenschub. Zeitschrift für Motorluftfahrt", 1932, pág. 629. Blenk: "Startformeln für Landflugzeuge. Deutscher Verein für Luftfahrt", Jahrbuch, 1927, pág. 1

eliminando V^2 , resulta una ecuación entre γ y s . De las dos ecuaciones se deducen V y γ en función de s .

Las condiciones límites son:

1.º Para $s = 0$, $\gamma = 0$, y la segunda ecuación queda en la forma

$$\frac{W}{g} V_1^2 \frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{2} C_L \rho S V_1^2 - W.$$

2.º Al terminar el arco, de longitud l' (que es desconocida), la velocidad permanece constante, y la primera ecuación da:

$$\gamma = \frac{T - \frac{1}{2} C_D \rho S V'^2}{W},$$

donde V' es la velocidad cuya componente vertical $V' \sin \gamma$ resulta del excedente de potencia disponible sobre la necesaria en vuelo horizontal, y depende de la tracción T , que es función de V .

El examen resolutivo del problema así expuesto es largo y complicado. Puede simplificarse admitiendo que la trayectoria en arco dura poco, siendo relativamente corta. Los resultados que así se obtienen no deben aplicarse a los casos en que no pueda admitirse esta aproximación.

En la mencionada hipótesis, el valor de $\frac{d\gamma}{ds}$ se puede desarrollar según potencias de V^2 (mientras $V = 0$ quede excluido, como ocurre ordinariamente). Si además la variación de V es reducida, de modo que V pasa de V_1 a V , siendo $V - V_1$ un valor mucho menor que V_1 , se podrá escribir, aproximadamente, para todo γ que no pase cierto límite:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{1}{2} C_L \rho S \frac{g}{W} - \frac{g}{V^2} = \\ &= \left[\left(\frac{d\gamma}{ds} \right)_{V=V_1} + \left(\frac{d^2\gamma}{ds \cdot dV^2} \right)_{V=V_1} (V^2 - V_1^2) + \dots \right] \end{aligned}$$

la función $\frac{d\gamma}{ds}$ da para $V = V_1$:

$$\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)_{V=V_1} = \frac{1}{2} C_L \rho S \frac{g}{W} - \frac{g}{V_1^2}$$

$$\left(\frac{d^2\gamma}{ds \cdot dV^2}\right)_{V=V_1} = \frac{g}{V_1^4};$$

por tanto,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{2} C_L \rho S \frac{g}{W} - \frac{g}{V_1^2} + \frac{g}{V_1^4} (V^2 - V_1^2) =$$

$$= \frac{1}{2} C_L \rho \frac{Sg}{W} - \frac{2g}{V_1^2} + \frac{gV^2}{V_1^4}.$$

Eliminando ahora V^2 , queda una ecuación de segundo orden en γ , lineal y con coeficientes constantes si T fuera constante, lo que es aceptable en primera aproximación. Las constantes de integración se determinan por las condiciones iniciales: 1.ª, $\gamma = \frac{d\gamma}{ds} = 0$ para $s = 0$, si no hay sobrante de

velocidad para levantar, y si la hay, la curvatura inicial $\frac{d\gamma}{ds}$ viene determinada por el exceso

$$\frac{1}{2} \rho C'_L S V_1^2 - W,$$

siendo C'_L el valor que corresponde al ángulo de ataque con que el piloto recorre el arco. Este valor puede ser el mismo 0,85 $C_{L\text{máx}}$ de que se habla antes, en que

$$\frac{1}{2} \rho C'_L S V_1^2 = W.$$

Por lo tanto, conservando al entrar en arco el ángulo de ataque al término de la rodada, la curvatura inicial sería nula.

La ecuación diferencial en γ puede escribirse:

$$A \gamma'' + B \gamma' + C \gamma + D = 0$$

con las notaciones siguientes:

$$A = \frac{1}{2} \frac{W V_1^4}{g^2}, \quad B = \frac{C_D \frac{1}{2} \rho S V_1^4}{g},$$

$$C = W, \quad D = T - C_D \frac{1}{2} \rho S V_1^2.$$

Su solución, siendo γ_a el ángulo de la trayectoria rectilínea al ascender en vuelo recto terminado el arco, $\gamma_a = \frac{D}{W}$, se expresa como sigue:

$$\gamma = \gamma_a \left[1 - e^{-\frac{B}{2A}s} \frac{\cos \left(\sqrt{\left(\frac{C}{A} - \left(\frac{B}{2A}\right)^2\right)s - \theta} \right)}{\cos \theta} \right],$$

siendo θ una constante de integración adecuada.

(1) La condición en el acuerdo superior que ha servido para determinar la longitud del arco es sólo aproximada; en rigor, la velocidad V varía con arreglo a la primera condición del equilibrio dinámico, y con el variar de V sufre también variación γ . Llamando γ' al valor de γ en el momento del tránsito del vuelo en arco al rectilíneo, el equilibrio dinámico exige, siendo R la resistencia, que se cumpla la siguiente condición aproximada:

$$\gamma' = \frac{T - R}{W},$$

en cuya fórmula γ' , T y R son funciones dadas de V , las dos últimas, a priori, y la primera γ' por la ecuación diferencial; por tanto, de ella habría de despejarse el valor de V' (velocidad de tránsito) y el ángulo γ' , correspondiente a esta velocidad, y con tales valores se podría calcular l' con mayor rigor; mas ya que en los cálculos anteriores se introduce multitud de aproximaciones en el planteo, no es razonable exigir, en la condición límite $\gamma = \gamma'$, una exactitud de mayor grado que en el resto del cálculo.

Como

$$\frac{B}{2A} = \frac{C_D}{C_L} \frac{g}{V_1^2}, \quad \frac{C}{A} = \frac{2g^2}{V_1^4},$$

la solución puede adoptar la forma siguiente:

$$\gamma = \gamma_a \left[1 - e^{-\frac{C_D}{C_L} \cdot \frac{g}{V_1^2} s} \frac{\cos \left(\frac{g}{V_1^2} \sqrt{2 - \frac{C_D}{C_L} s - \theta} \right)}{\cos \theta} \right].$$

Del término C_D/C_L puede prescindirse frente a 2, con lo cual se simplifica la fórmula, que queda reducida a la siguiente:

$$\gamma = \gamma_a \left[1 - e^{-\frac{C_D}{C_L} \cdot \frac{g}{V_1^2} s} \frac{\cos \left(\frac{g}{V_1^2} \sqrt{2s - \theta} \right)}{\cos \theta} \right].$$

De donde se deduce que el avión oscila al pasar de la trayectoria rectilínea horizontal a la inclinada, con oscilación, amortiguada de período:

$$T = \frac{2\pi V_1^2}{g \sqrt{2}}.$$

Suponiendo el amortiguamiento pequeño y determinando la constante θ por la condición inicial aproximada $\frac{d\gamma}{ds} = 0$ para $s = 0$, resulta $\theta = 0$, y la fórmula anterior se reduce a:

$$\gamma = \gamma_a \left(1 - \cos \frac{g \sqrt{2}}{V_1^2} s \right).$$

De aquí se infiere la longitud l' del arco, haciendo $\gamma = \gamma_a$, con lo cual

$$l' = \frac{\pi V_1^2}{2 \sqrt{2} g} \approx \frac{V_1^2}{g};$$

luego l' es, aproximadamente, igual al doble de la altura de caída de un grave que alcanza la velocidad V_1 en el vacío.

En primera aproximación, la proyección l_2' de este arco sobre la pista se puede estimar igual a l' , para mayor seguridad.

Con el valor de l_2' y la longitud l_1 , ya obtenida para la rodada, se puede determinar una primera trayectoria que salve el obstáculo de 20 metros de altura.

Si se quiere mayor exactitud, se procederá al uso de la condición que da la curvatura inicial con $C'_L \neq 0,85$ del C_L máximo (1).

2. Longitud total estricta.—Segmento “perdido” por efectuar el vuelo en arco.—La longitud estricta se definirá en todo caso como la suma de l_1 más l_2' , proyección de l' , más, eventualmente, la proyección l_2'' de la recta que salvando 20 m. pasa por el extremo de l' y forma un ángulo γ_a con la horizontal. Es decir: (Ver fig. 1.)

$$L = l_1 + l_2 = l_1 + l_2' + l_2''.$$

Como el piloto asciende con el ángulo γ_a , son, al menos, tres los valores de C_L que intervienen en la maniobra de rodada, arco y ascenso rectilíneo.

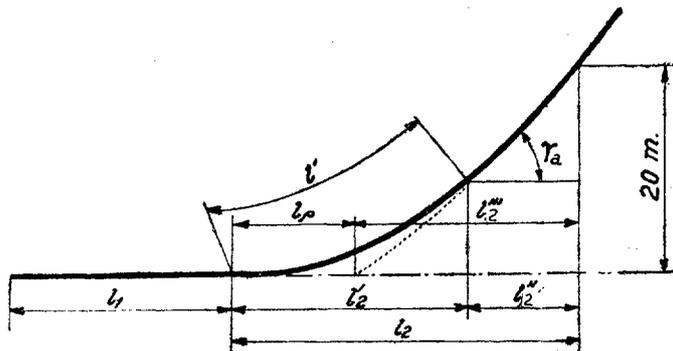


Figura 1.

Además, el escamoteo del tren de rodadura introduce variantes que serán examinadas más adelante. En todo caso, en el vuelo en arco con tren de rodadura C_D y C_L tienen valores diferentes de los del vuelo rectilíneo ascendente.

Para conocer la posición de la recta trayectoria de ascenso que sigue inmediatamente al arco es preciso calcular no sólo la velocidad con que se recorre, sino también el punto donde comienza, dado por sus coordenadas

$$X = \int_0^{l'} \cos \gamma \, ds = l_2' \cong l'.$$

$$Y = \int_0^{l'} \sin \gamma \, ds \cong \int_0^{l'} \gamma \, ds.$$

Puesto que el valor de l_2 es la suma de l_2' , correspondiente al arco, más l_2'' , proyección del vuelo en recta ascendente hasta alcanzar la altura de 20 m., se tendrá, evidentemente,

$$l_2'' = (20 - Y) \operatorname{tg} \gamma_a;$$

luego, en definitiva,

$$l_2 = l' + (20 - Y) \operatorname{tg} \gamma_a.$$

El tiempo total de rodada, arco y vuelo ascendente hasta la altura de 20 m., se halla por las fórmulas que ligan la velocidad y el camino recorrido:

$$dt = \frac{ds}{V} \quad ; \quad t = \int_0^{l_1} \frac{ds}{V} + \int_0^{l_2} \frac{ds}{V}.$$

El “segmento perdido” por el vuelo en arco es la longitud entre el punto final de rodadura y el punto en que la tangente extremo del arco corta a la pista. Si se designa por l_p

$$l_2 = l_p + l_2''',$$

siendo l_2''' la proyección de la recta que formando el ángulo γ_a con la horizontal pasa por el tope de los 20 m. de altura. Es evidente que $l_2''' = \frac{20}{\operatorname{tg} \gamma_a}$. El valor de l_p se puede obtener, bien por diferencia, bien por ser

$$l_p = \int_0^{l'} ds \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_a} \right).$$

El cálculo anterior supone que se salvan los 20 metros cuando el avión se halla en la trayectoria rectilínea del vuelo ascendente. Pero puede ocurrir que el tope se salve en vuelo bajo y curvo dentro del aerodromo.

Cuando se da esta circunstancia en vuelos de aviones muy cargados y de gran tamaño, es preciso plantear la resolución con otras fórmulas más sencillas que las anteriores por ser un dato en la curva la cota de altura; pero resuelto el problema para una altura $H > 20$ metros como acaba de decirse, basta buscar la abscisa que corresponde a esta cota.

Siendo X e Y las coordenadas del avión en que X es la abscisa del obstáculo a partir del arranque, debe verificarse como condición elemental de posibilidad de levantar vuelo,

$$Y > 20 \text{ metros.}$$

O sea

$$\int_0^{X-l_1} \gamma \, ds > 20 \text{ metros.}$$

A esta condición de posibilidad vienen a agregarse las de seguridad, de que se hablará más adelante, las cuales equivalen a fijar el alcance del signo $>$ que figura en la desigualdad anterior.

3. Variaciones de las longitudes al variar C_L y V_1 .—Indicado el proceso resolutivo, para el cálculo numérico práctico conviene disponer de tablas, nomogramas o gráficos, que hagan fácil y expedita su aplicación.

La disposición de las tablas o gráficos ha de ser tal, que con valores aproximados de los datos del problema $W, T(V)$, coeficientes μ, C_D, C_L y $\bar{\omega}$ permita el cálculo de la variación de $l_1 + l_2$ cuando alteran aquellos. Interesan valores mínimos y máximos, el sentido de variación y su cuantía a partir de valores determinados.

El ya mencionado trabajo de Göthert contiene dos gráficos. Para tales cálculos, Göthert, aparte las hipótesis particulares ya mencionadas, introduce una dependencia lineal entre T y V^2 , definida por un coeficiente de inclinación y por un valor particular de T para $V = V_1$.

Esta dependencia equivale a las fórmulas de interpolación señaladas al tratar la rodadura.

MODO DE USAR LOS DIAGRAMAS

1. Si S es la superficie, por tanto $\tilde{\omega} = \frac{W}{S}$, y se acepta la regla del 0,85, se calcula q_a por la expresión

$$q_a = \frac{1}{2} \rho V_a^2 = \frac{\tilde{\omega}}{0,85 C_{L \text{ máx}}}$$

2. Con el valor de la densidad $\delta = g\rho$ a la altura del aerodromo (al nivel del mar, a 15° es 1,22) se calcula $\frac{\delta}{q_a}$, con lo cual, para cada cota h sobre tierra se tiene la cota reducida $\frac{h\delta}{q_a}$, que figura como abscisa en los dos cuadros adjuntos.

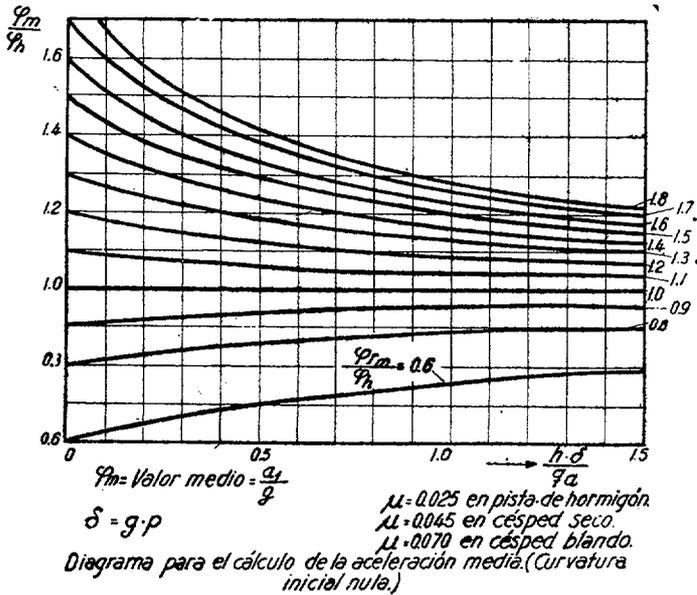


Figura 2.

3. Del diagrama de la hélice se deduce el esfuerzo de tracción T_1 para la velocidad V_a en el momento de perder contacto, y T_2 para $0,7 V_a$, con lo cual se tienen dos valores del diagrama útil de la hélice, y por tanto, la recta de tracción en función de la velocidad.

4. Se calculan las fuerzas resistentes R_1 y R_2 para V_a y $0,7 V_a$. En el primer caso la resistencia es $\frac{1}{2} C_D \rho V_a^2 S = C_D \frac{W}{0,85 C_{L \text{ máx}}}$, incluyendo en C_D la parte de perfil, la inducida y la parásita, y teniendo en cuenta el tren de rodadura. Para $0,7 V_a$ la resistencia es la del rozamiento sobre un peso $W - \frac{1}{2} C'_D \rho \left(\frac{1}{2} V_a^2\right) S$, más la resistencia del aire $\frac{1}{2} C'_D \rho \left(\frac{1}{2} V_a^2\right) S$. Los valores del coeficiente de rozamiento se dan en los cuadros. El valor de C'_D es más reducido que C_D por ser menor el ángulo de ataque.

5. Calculadas las fuerzas R_1 y R_2 , se pasa al cálculo de las aceleraciones relativas

$$\varphi_{rm} = \frac{T_2 - R_2}{W}, \quad \varphi_h = \frac{T_1 - R_1}{W}$$

y de su cociente $\frac{\varphi_{rm}}{\varphi_h}$. Este número lo es de entrada en las curvas del primer diagrama (fig. 2), y con ella y el valor de la abscisa se lee en las ordenadas la aceleración media relativa $\frac{\varphi_m}{\varphi_h}$.

Se calcula φ_m .

6. Con el valor de φ_m se entra en el segundo diagrama; es el número de cada una de las curvas de trazo grueso en la curva correspondiente, y para la abscisa reducida se lee en las ordenadas la longitud total desde el arranque hasta lograr la altura h , comprendiendo rodada y vuelo bajo, medida en unidades $\frac{q_a}{\delta}$, de la que con el valor de su recíproco se pasa a $l = l_1 + l_2$.

7. El último diagrama permite conocer la cota h_c del término del arco en unidades relativas, mediante la curva de trazos interrumpidos, por su intersección con la curva de trazo lleno.

Ejemplo:

$$W = 20.000 \text{ Kg.}, \quad \tilde{\omega} = 200 \text{ Kg/m}^2, \quad 0,8 \text{ } C_{D \text{ máx}} = 1,3$$

$$C_D = 0,10, \quad \mu = 0,08, \quad \delta = 1,22 \text{ Kg/m}^3, \quad h = 20 \text{ m.},$$

$$1 = T_2 = 5.000 \text{ Kg.}$$

$$q_a = \frac{200}{1,3} = 153,8$$

$$h_{20} \text{ reducida} = \frac{1,22}{153,8} \cdot 20 = 0,16$$

$$R_1 = 0,1 \frac{20.000}{1,3} = 1.540 \text{ Kg.}$$

Tomando $C'_D = 0,7 C_D = 0,07$

$$R_2 = 0,08 \left(20.000 - \frac{1}{2} 0,07 \frac{20.000}{1,3} \right) + \frac{1}{2} 0,07 \frac{20.000}{1,3} = 20.000 \times 0,10 = 2.000 \text{ Kg.}$$

$$\varphi_{rm} = \frac{T_2 - R_2}{W} = \frac{3.000}{20.000} = 0,15$$

$$\varphi_h = \frac{T_1 - R_1}{W} = \frac{3.460}{20.000} = 0,173$$

$$\frac{\varphi_{rm}}{\varphi_h} = \frac{0,15}{0,173} = 1,2$$

Con este valor el primer diagrama da para la abscisa 0,16

$$\frac{\varphi_m}{\varphi_h} = 1,18, \text{ luego } \varphi_m = 1,18 \times 0,173 = 0,204$$

El segundo diagrama da entonces

$$l \frac{\delta}{q_a} = 9,7;$$

luego

$$l = \frac{q_a}{\delta} 9,7 = \frac{153,8}{1,22} 9,7 = 1.200 \text{ metros.}$$

Al mismo tiempo se echa de ver que h_e para la misma abscisa es 8; luego aproximadamente a los 1.000 metros termina el arco y comienza la ascensión rectilínea.

Si el coeficiente de resistencia del aire para todo el avión se toma igual al doble, y $T_1 = 4.500$ kilogramos, $T_2 = 5.000$, resultaría

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{rm} &= \frac{2.600}{20.000} = 0,13 \\ \varphi_h &= \frac{1.500}{20.000} = 0,07 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi_{rm} &= 1,85, & \varphi_{rm} &= 1,67 \\ \varphi_h & & \varphi_h & \end{aligned}$$

$$\varphi_m = 0,12$$

$$\frac{l \delta}{9a} = 11,3. \quad l = 1.450 \text{ metros.}$$

El valor clásico de 600 metros queda corto, aun en circunstancias normales, para aviones de gran tamaño y de las condiciones indicadas si la pista es césped mojado en terreno no muy firme, como se supone al adoptar el coeficiente 0,08 de rozamiento.

Los diagramas y fórmulas prácticas sólo tienen valor de orientación o de primera aproximación. En un caso concreto es preciso conocer los coeficientes C y su dependencia con la velocidad y el ángulo de ataque para el avión completo, las resistencias pasivas, la curva de tracción en función de la velocidad, la maniobra aproximada, y al calcular la longitud de pista situarse en condiciones que no sean las más favorables. El alargamiento l_s por "seguridad" no se incluye en los razonamientos anteriores, y será examinado más adelante.

De los números que anteceden y de los que puede calcular el ingeniero mediante las fórmulas anteriores, se deduce la necesidad, sea de prever longitudes de pistas de más de un kilómetro con firme que no altere con la lluvia; en todo caso convenientemente despejadas, con sombras aerodinámicas de 1 : 30 a partir del contorno de seguridad, si se pretende que en ellas levanten vuelo pesados aviones de bombardeo o aviones comerciales de elevada carga y vasto radio de acción.

De ellos se deduce también la necesidad de potencias lo más elevadas posible en los breves instantes de levantar vuelo, y la necesidad de que los motores sean capaces de darlas por medios adecuados, v. gr., forzando la inyección del carburante.

El número de tablas, diagramas, fórmulas empíricas más o menos sencillas, fórmulas simplificadas, etc., etc., es muy numeroso. El ingeniero procurará, al aplicarlas, conocer lo mejor posible las hipótesis de que son objeto, pues si en realidad

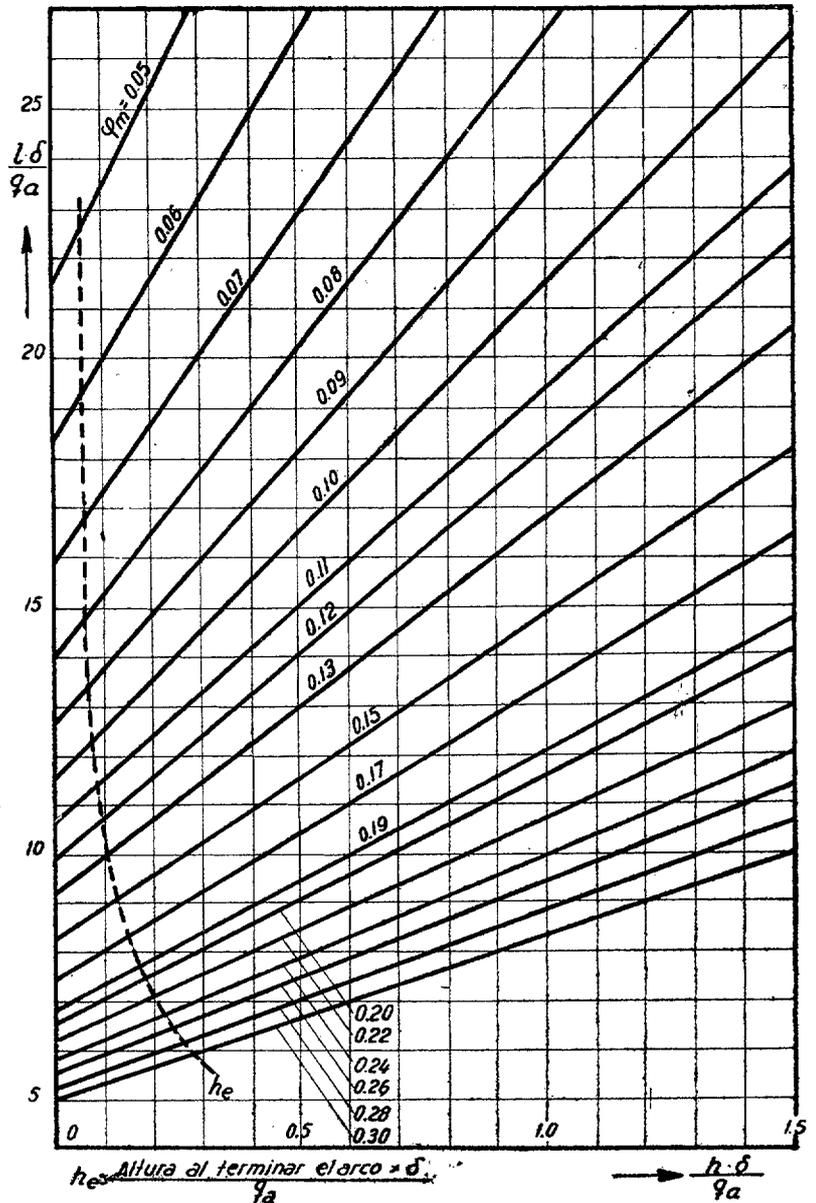


Figura 3.

no se aplican las hipótesis que han permitido establecerlas, los errores a que conducen pueden ser considerables. La parte curva era poco menos que olvidada en los antiguos modos, pero en los grandes aviones modernos, que alcanzan 80 toneladas, de gran velocidad y tamaño, no es en modo alguno despreciable.

El empleo de las fórmulas generales es más seguro que el de los diagramas, pero éstos ofrecen ventajas ineludibles en la comparación y corrección.

(Continuará.)

