

# Aerotecnia

## Notas sobre Torbellinos Termoconvectivos<sup>(1)</sup>

Por el Ingeniero Aeronáutico, Comandante **D. LUIS AZCÁRRAGA**

(Continuación.)

### b) III.—LINEAS DE CORRIENTE

#### Parte teórica.

Anteriormente se ha estudiado la teoría relacionándola con las experiencias, para confirmarla o no, en lo que se refiere a la existencia del régimen preconvectivo estable y a la fijación del criterio que en cada caso señala el paso de uno a otro régimen; y asimismo, en cuanto a la relación entre el estudio teórico y el experimental de las dimensiones de torbellinos. Ambos casos se refieren, por tanto, al origen y aspecto general de la organización cinemática. Interesa ahora analizar más fundamentalmente y con mayor detalle dicho proceso del movimiento. Utilicemos para ello análogo sistema que para las dos partes anteriores, comparando la exposición teórica con el resultado experimental para tratar de confirmar la primera. El estudio se concreta principalmente en el conocimiento de las líneas de corriente y en el reparto de temperaturas, puesto que éste es, en definitiva, el origen de aquéllas.

El resultado práctico inmediato de este estudio será la posibilidad de fijar un plan de trabajo adecuado para investigaciones sobre fenómenos reales en la atmósfera terrestre, puesto que del estudio teórico (contrastado por la experiencia de laboratorio) debemos deducir los rasgos esenciales, cuya confirmación podremos obtener más fácilmente en la atmósfera real, ya que se conocerán casi exactamente los datos que interesa buscar y el lugar donde conviene determinarlos.

*Función de corriente en el problema de los torbellinos de dos dimensiones.*—El estudio de las líneas de corriente queda referido al estudio de las velocidades de cada una de las moléculas. Por la facilidad con que se presta al análisis matemático el estudio del movimiento en dos dimensiones, referimos a este caso el movimiento que se presenta en el interior de los torbellinos convectivos.

Llamamos  $x, z$ , a las ordenadas, tomando  $z$  en sentido vertical hacia arriba. Y suponiendo nula la divergencia, en

lo cual no se comete gran error, la ecuación de continuidad queda de la forma  $\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} = 0$ , lo cual supone la existencia de una función de corriente cuya diferencial total es de la forma  $d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz + \frac{\partial\psi}{\partial t} dt$ .

Para los casos de movimiento permanente  $\psi = - \int w dx + \int u dz$ .

La determinación definitiva de esta función de corriente podemos hacerla partiendo de la expresión anterior, recordando el valor de la perturbación del campo térmico  $\Delta T = \Delta T_0 \sin lx \sin my.Z$ , con la simplificación correspondiente al caso de dos dimensiones y haciendo intervenir igualmente el valor de las componentes  $w$  de la velocidad, que, si tenemos en cuenta la condición en el límite de que las dos superficies extremas sean planas sin deformación tal como sucede en el laboratorio, tiene la forma de

$$w = \frac{x}{\rho} \sin lx \left[ \frac{d^2 Z}{dz^2} - l^2 Z \right].$$

Combinando esta expresión con la ecuación de continuidad obtendremos la de  $u$ , y como consecuencia, el valor definitivo de la función de corriente en el sistema  $\xi$ , que es:

$$\psi = \cos a \frac{x}{h} \left[ Z - \frac{\pi^2}{a^2} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right]$$

en la cual queda solamente determinar los valores correspondientes a cada caso de la función  $Z$ , que depende solamente de la altura  $z$ .

En esta determinación debemos considerar las soluciones simétrica y la asimétrica con relación al plano medio de la lámina fluida, que han sido desarrolladas ampliamente por Jefreys al obtener la solución general de la ecuación diferencial en el problema fundamental.

En el problema que se asemeja al hecho real de la atmósfera libre (lámina fluida de dos superficies libres sin frotamiento), el valor de  $Z$  es:  $Z = \sin r\xi$ ; lo cual se simplifica para un solo piso de torbellinos, en la forma  $Z = \sin \xi$ .

En el caso de las condiciones de laboratorio (lámina fluida entre paredes planas con frotamiento) el valor de  $Z$  adquiere las dos expresiones siguientes, según se trate, respec-

(1) Continuación del número 3 (55), página 176.

tivamente, de la solución simétrica para un solo piso de torbellinos, o de la asimétrica para dos pisos de torbellinos:

$$Z = 164 + 80 \left( \frac{\pi}{2} - \xi \right)^2 - 5'4 \left( \frac{\pi}{2} - \xi \right)^4 + 181'7 \text{ sen } \xi + 0'17 \text{ sen } 3 \xi + 0'0057 \text{ sen } 5 \xi + \dots$$

$$Z = 127'2 \left( \frac{\pi}{2} - \xi \right) + 73'5 \left( \frac{\pi}{2} - \xi \right)^3 - 8'94 \left( \frac{\pi}{2} - \xi \right)^5 + 88'3 \text{ sen } 2 \xi + 0'7125 \text{ sen } 4 \xi + \dots$$

Para estos tres casos que acabamos de considerar, la función  $\psi$  de corriente resulta entonces de la forma siguiente:

Para la primera, en atmósfera libre,  $\psi = \cos\left(\frac{r\pi}{2} - \frac{x}{h}\right) \text{ sen}\left(r\pi \frac{z}{h}\right)$  consecuencia de la forma de Z, que es una simple curva sinusoidal; para cada valor de  $\psi$  aparece una línea de corriente cerrada que para  $\psi = 0$  es en rectángulo cuya anchura es  $\frac{1}{r} \cdot \frac{h}{\lambda}$  y la altura es  $\frac{h}{r}$  y se reduce a un punto central, siendo  $\psi = 1$ .

Para el caso de la solución simétrica en la condición de laboratorio, tomando  $a = 3,1$ , la forma de Z es más complicada.

Resulta así para  $\psi = 0$  que la línea de corriente es un cuadrado de lado  $h$ , reduciéndose a un punto central para  $\psi = 1$ , tomando formas de transición para valores intermedios.

Si consideramos la solución asimétrica del problema en las condiciones de laboratorio, tenemos  $a = 5,4$ , con lo que se deduce el valor de la función de Z. Para  $\psi = 0$ , las líneas de corrientes son rectangulares en dos pisos, cuya anchura es  $0,58 h$  y cuya altura es  $\frac{h}{2}$  y para  $\psi = 1$  se reducen a dos puntos.

A su vez la velocidad vertical única que existe en el plano horizontal medio de una capa de aire dividida en células cuadradas, toma la expresión  $w = w_0 \text{ sen } lx \text{ sen } my$ , en la cual  $w_0$  es una constante que depende solamente de las condiciones en los límites y de la forma de las células

**Parte experimental.**

Las experiencias de laboratorio realizadas principalmente por Avsec han tratado de confirmar estas consecuencias teóricas. Los torbellinos celulares de dos dimensiones han sido los únicos que ha sido posible observar y los únicos que permiten la fotografía directa de la trayectoria, y por tanto, de las líneas de corriente en el plano vertical.

En la figura 1 se pone de manifiesto el resultado de la experiencia, en el que están señaladas las velocidades medias  $W_a$  descendentes y  $W_a$  ascendente, así como la ex-

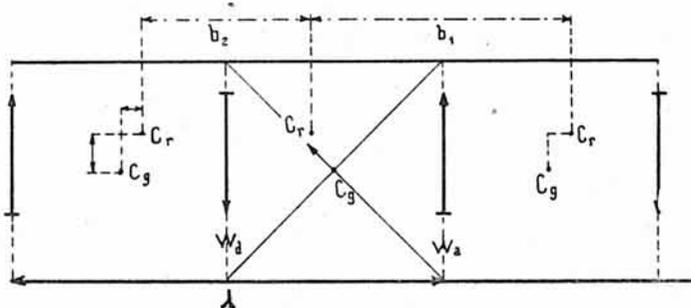


Fig. 1.—Excentricidad de los centros de rotación y los de gravedad de las células.

tricidad esquemática de los centros de rotación respecto a los centros geométricos de las células. La relación entre las velocidades ascendente y descendente es  $\frac{W_a}{W_d} = \frac{b_2}{b_1}$ , en la que  $b_1$  y  $b_2$  toman las siguientes expresiones en función de la anchura de dos células gemelas:

$$b_1 = \frac{1}{2} \lambda + 2 e_h, \quad b_2 = \frac{1}{2} \lambda - 2 e_h.$$

Para los torbellinos en bandas transversales, las líneas de corrientes resultan rectángulos, cuyos ángulos son tanto más redondeados cuanto más cerca están del centro de rotación. Estas líneas están situadas en los planos verticales y orientadas en la dirección de la corriente general de traslación. Si el movimiento que representan se combina con la velocidad de traslación que anima el conjunto, aparecen para la trayectoria definitiva unas pseudocicloides que se señalan en la figura 2.

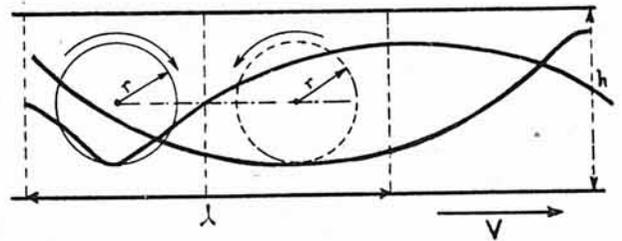


Fig. 2 — Trayectorias pseudo-cicloides en torbellinos en bandas transversales.

Para el caso de torbellinos en bandas longitudinales, la velocidad de traslación no está en el plano de rotación, sino que le es normal, y el resultado son pseudo-helicoidales.

Estos caracteres han sido puestos claramente de manifiesto en las fotografías obtenidas en el laboratorio.

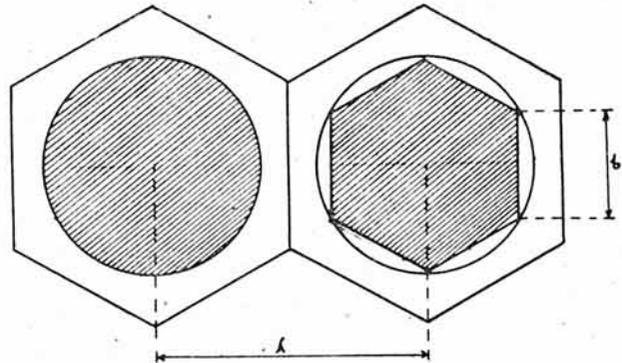


Fig. 3. Repartición de los lugares de corrientes ascendentes y descendentes (rayadas) en torbellinos exagonales en gases.

Finalmente para los torbellinos y células poligonales debemos considerar el caso de las células exagonales y de las cuadradas. Para las exagonales, y supuesto que sus dimensiones principales están conformes con el resultado de la teoría de que la distancia horizontal entre dos centros de exágonos contiguos sea  $\lambda = 3,29 h$ , es fácil determinar aproximadamente la línea central del torbellino, alrededor del cual gira el filete del fluido, suponiendo que las velocidades verticales medias ascendentes y descendentes, en el plano horizontal medio, sean iguales. En estas condiciones, la porción central (lugar de las corrientes ascendentes) y la porción periférica (lugar de las corrientes descendentes) del exágono, deben tener la misma superficie, y así encontramos la línea de separación tal como está indicada en la figura 3, que es un

exágono regular cuyo lado es  $b = 1,34 h$ . Por tanto, si hacemos una sección vertical tal como lo indica la figura 4, tenemos una serie de rectángulos de altura  $h$  y anchura

$$\frac{\lambda}{2} = 1,65 h.$$

Este mismo razonamiento puede hacerse para las células cuadradas resultando la repartición característica de la

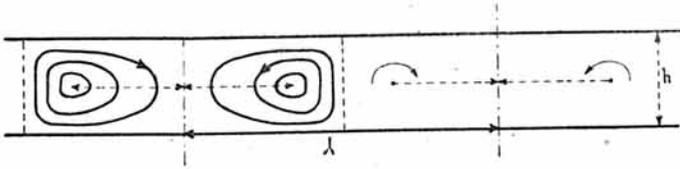


Fig. 4.—Sección vertical de células exagonales en un gas. Líneas de corriente.

figura 5. Si aplicamos el criterio analítico, la separación de los lugares de corrientes ascendentes ( $w > 0$ ) de los de corrientes descendentes ( $w < 0$ ), estará definida por el lugar geométrico en que la velocidad vertical  $w = w_0 \text{ sen } lx \text{ sen } my$

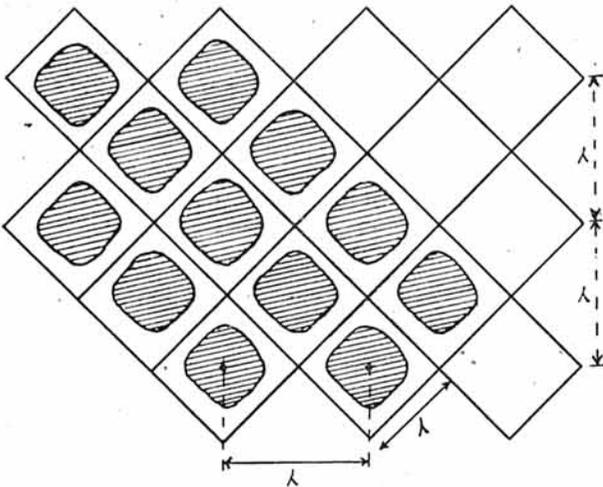


Fig. 5.—Esquema experimental del reparto de los lugares de corrientes ascendentes y descendentes en células cuadradas.

sea nula; resulta así la figura 6. Por tanto, se ve que la solución analítica no concuerda con la solución experimental, y por tanto, aquélla no puede ser aceptada plenamente.

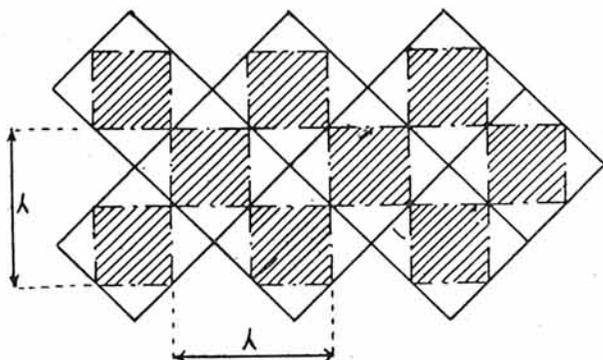


Fig. 6.—Esquema analítico del reparto de la figura 5.

## b IV) CAMPO TERMICO EN LA ZONA DE LOS TORBELLINOS CELULARES

### Parte teórica.

El análisis del campo térmico debe hacerse evidentemente partiendo de la expresión general de la temperatura en un punto cualquiera de la zona flúida, puesto que esta expresión ha de ser, por una parte, función de los valores de las temperaturas extremas y del gradiente de temperatura que nos da el campo térmico inicial, y por otra parte, será función de la perturbación que se provoca por la formación de las corrientes convectivas. Resultará, por tanto, que el estudio del campo térmico se deduce del tipo y proceso de la corriente convectiva en cada caso particular, por la variación que resulta para la amplitud de la perturbación térmica; y, por lo tanto, el estudio de ésta nos permitirá inversamente conocer el tipo de movimiento a que pertenece.

La temperatura en un punto cualquiera de la masa flúida resulta de la suma de la temperatura inferior del conjunto con el aumento correspondiente al gradiente de temperatura de su estado inicial y con la variación que corresponde a la perturbación de la corriente convectiva, es decir,

$$T = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{h} \cdot z + \Delta T.$$

El término tercero representa precisamente la modificación del reparto inicial de la temperatura en cuanto aparecen las corrientes convectivas, y su significación está dada por la expresión ya muy conocida  $\Delta T = T_0 \cdot \text{sen } lx \cdot \text{sen } my \cdot Z$ .

El problema consiste en la determinación del valor para cada caso particular de  $\Delta T$ , amplitud de la perturbación térmica.

Según Avsec, las determinaciones han sido posibles al tener en cuenta ciertas condiciones en los límites que no se habían considerado en el desarrollo teórico.

Debemos recordar que en todo movimiento convectivo existen centros de corrientes ascendentes y descendentes donde el movimiento se manifiesta con mayor intensidad, y evidentemente, en ellos deben coincidir las mayores perturbaciones térmicas. Colocados dichos centros de manera que satisfagan a la condición  $\text{sen } lx \cdot \text{sen } my = \pm 1$ , la ecuación de la perturbación queda de la forma  $\Delta T = \pm \Delta T_0 \cdot Z$ . Dispuesto el hogar calorífico en el fondo del canal, la temperatura  $T$  decrece hacia arriba de una manera continua gracias a las corrientes convectivas uniformes de modo que  $T_2 \geq T \geq T_1$ . Y puesto que la teoría supone que la temperatura en las paredes limítrofes permanece constante, debe ser  $\Delta T = 0$  para  $z = 0$  y para  $z = h$ . Si admitimos ahora que el calor se transmite a la capa flúida sin discontinuidad en el campo térmico, resulta la condición suplementaria en los límites antes citados, que es  $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$ . Teniendo en cuenta esta condición con la ecuación inicial obtenemos

$$\Delta T_0 = - \frac{\beta}{\left(\frac{dT}{dz}\right)_{z=0}}, \text{ con } \beta = \text{gradiente.}$$

Si introducimos en dicha expresión los valores de  $Z$  que hemos visto anteriormente para cada uno de los dos problemas que fundamentalmente se consideran, tenemos que para

las condiciones semejantes a las de la atmósfera real  $\Delta T_0 = -\frac{\beta h}{\pi}$ . Y para el problema en las condiciones de laboratorio  $\Delta T_0 = -\frac{\beta h}{2'5}$ .

Conocida la amplitud de la perturbación térmica en los dos casos fundamentales, podemos ahora estudiar el valor de la temperatura en un punto cualquiera partiendo de la ecuación inicial. Para los centros de corrientes ascendentes o descendentes queda de la forma  $T = T_2 + \beta z \pm \Delta T_0 \cdot Z$ . Para los lugares que satisfagan a la condición de que la componente vertical  $w$  de la velocidad sea nula, es decir,  $\text{sen } lx \cdot \text{sen } my = 0$ , resulta  $T = T_2 + \beta z$ . Estos últimos lugares son precisamente aquellos en que la repartición lineal de temperaturas no ha sido modificada por las corrientes termoconvectivas, sino que permanece de acuerdo con el régimen preconvectivo.

Si tenemos en cuenta la expresión general de la perturbación antes determinada, y sin considerar lugares particulares, nos aparece entonces la ecuación general del campo térmico de la forma

$$\theta = \frac{T - T_2}{\beta h} = \frac{z}{h} - \text{sen } lx \cdot \text{sen } my \cdot \frac{1}{h \left( \frac{dZ}{dz} \right)_{z=0}} \cdot Z$$

independiente del gradiente de temperatura y del espesor.

Refiriendo de nuevo esta ecuación general a los dos problemas fundamentales que se han estudiado en todo el desarrollo teórico, y estudiando el corte de la situación total, es decir, el sisema de dos dimensiones, queda de la forma

$$\theta = \frac{z}{h} - \text{sen } lx \cdot \frac{1}{h \left( \frac{dZ}{dz} \right)_{z=0}} \cdot Z$$

que nos da para cada valor de  $\theta$  una línea isoterma situada en el plano  $xz$ , y que es aplicable a todos los torbellinos en bandas, puesto que su corte transversal son los torbellinos en dos dimensiones.

Así, para el problema que se asemeja a la atmósfera real introduciendo el valor de  $Z$  correspondiente, queda

$$\theta = \frac{z}{h} - \frac{1}{\pi} \text{sen } \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{h} \text{sen } \pi \frac{z}{h}$$

Y para el problema de laboratorio, introduciendo igualmente el valor de  $Z$  para dicho caso determinado, queda de la forma

$$\theta = \frac{z}{h} - \text{sen } x \left[ -3'6 + 17'4 \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^2 - 11'5 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^4 + 4 \text{sen } \pi \frac{z}{h} + 0'004 \text{sen } 3 \pi \frac{z}{h} + \dots \right]$$

El campo térmico del problema preconvectivo estable, en el cual las isotermas son rectas paralelas al eje de las  $x$ , sufre una perturbación mayor en el segundo que en el primero.

El asunto queda teóricamente completo si estudiamos los

lugares donde interesa principalmente registrar la temperatura al atravesar una organización de torbellinos termoconvectivos. Lógicamente conviene elegir el plano horizontal, en el cual la amplitud de la variación de temperatura en una cierta duración es máxima. Este plano es el de altura media; es decir para  $z = \frac{h}{2}$ .

En este caso de los dos problemas, siempre considerados, el de temperaturas toma la forma siguiente:

$$\text{Para atmósfera real } \Delta T = \frac{T_2 - T_1}{\pi} \text{sen } \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{x}{h}$$

$$\text{Para las condiciones de laboratorio } \Delta T = \frac{T_2 - T_1}{2'5} \text{sen } x$$

### Parte experimental.

Hacemos gracia del relato del modo de operar empleado por Avsec (aunque es evidente el interés del conocimiento del asunto para los especialistas) si se tiene en cuenta que las oscilaciones grandes de la temperatura en un punto son la consecuencia inmediata de la evolución continua de las formas de los torbellinos celulares, lo cual exige que las medidas sean hechas:

- 1.º Muy rápidamente, es decir, que el instrumento termométrico tenga una pequeña inercia calorífica.
- 2.º Con gran precisión, que llegue hasta la décima de 1º C.
- 3.º Sin que el elemento de medida represente un volumen que suponga obstáculos en el sistema turbillonario; y
- 4.º En todos los puntos de la lámina fluida lo que exige una gran movilidad del instrumento de medida.

Téngase en cuenta que en el laboratorio las medidas se hacen sobre capas de aire de un espesor de alrededor de seis centímetros, para las que una diferencia de temperatura extrema de medio grado basta para producir los torbellinos termoconvectivos, según puede deducirse del valor del criterio de Rayleigh, como se vió en la parte bI). Si se hacen medidas en cinco puntos equidistantes, el orden de diferencia es, por tanto, una décima de 1º C.

Recordemos solamente el relato de la parte experimental y comparación de los resultados de laboratorio con los teóricos, problema que en resumen consiste en decretar el valor práctico de la relación  $\Delta T = T_0 \cdot \text{sen } lx \cdot \text{sen } my \cdot Z$ , que ha sido el punto de partida en el estudio teórico.

Avsec deduce que los resultados teóricos reproducen muy bien lo que es esencial en el fenómeno de los torbellinos en bandas longitudinales; y que es suficiente el parecido cualitativo del campo térmico con el obtenido experimentalmente.

El problema debe considerarse, sin embargo, insuficientemente resuelto, puesto que la longitud de canal empleada hasta la fecha no parece suficiente para haber eliminado la influencia de la temperatura inicial del aire, lo cual podría explicar acaso algunos de los desacuerdos encontrados.

El problema, por tanto, en lo que se refiere al estudio experimental, queda en cierto modo en pie y abre ancho campo a los investigadores que se encuentren en condiciones de continuarlo.