Aerotecnia

BOMBARDEO AÉREO

Estudio del denominado bombardeo aéreo en picado

POR ALEJANDRO SIRVENT D'ARGENT
Comandante de Aviación

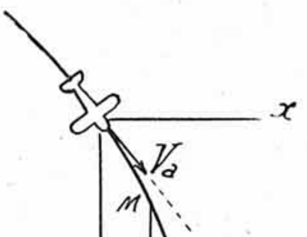
No tratamos de efectuar en este estudio ni la presentación ni la discusión de esta última modalidad del Bombardeo Aéreo, de todos ya conocido; solamente vamos a exponer, sencillamente, la teoría en que está fundada su realización.

Por ello, vamos tan sólo a introducir las modificaciones necesarias en los fundamentos, ya sancionados por la práctica, referente al Bombardeo Aéreo en horizontal, para poder aplicar las teorías expuestas en la Balística Exterior (1) al caso presente de ser efectuado este bombardeo partiendo desde un aparato que posea una cierta velocidad, una inclinación con respecto a la horizontal y una cierta altura en el momento del lanzamiento.

Para llegar a la más completa exposición del asunto a tratar, haremos primero el estudio del bombardeo en picado en el vacío y luego el del movimiento con iguales características en la atmósfera, caso real de esta clase de bombardeo.

Movimiento de una bomba lanzada con una cierta velocidad inicial e inclinación y en el vacío.

La única fuerza que obra en cualquier punto de su trayectoria será su peso (p), aplicado en el centro de gravedad y en dirección vertical, fuerza que supondremos constante en intensidad a todas las alturas.



La bomba se moverá en el plano vertical que contiene a V_a y que se llamará plano de bombardeo.

Referido el movimiento a dos ejes, Ox, Oy, que pasen por el origen, las respectivas aceleraciones son:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o \;,,\; \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

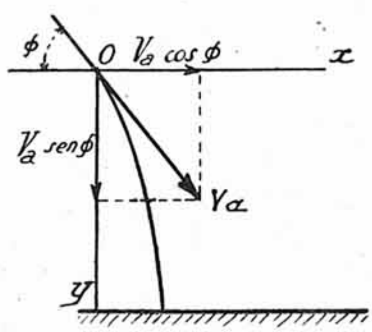
Lo que nos dice que el movimiento de la bomba es independiente de su forma y peso; que el movimiento horizontal es uniforme y que el movimiento vertical es uniformemente acelerado.

(1) Bombardeo Aéreo.—Balística Exterior.—Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos.—Apuntes del autor.

Integrando estas ecuaciones con respecto al tiempo, tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = V_a \cos \Phi \;,,\; \frac{dy}{dt} = g\,t + V_a \operatorname{sen} \Phi,$$

siendo Φ el ángulo que forma la velocidad V_a (del avión en el momento del lanzamiento) con la horizontal; es decir, el ángulo de picado.



Integrando de nuevo estas ecuaciones, tendremos:

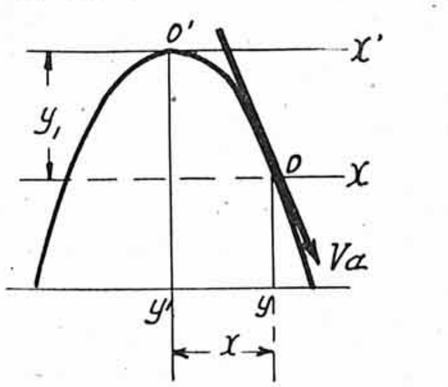
$$\left.\begin{aligned} x &= V_a \cos \Phi\, t + C \\ y &= \frac{1}{2} g\, t^2 + V_a \operatorname{sen} \Phi\, t + C' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Para } t = o \;,,\; x = o \;,,\; e' ,,\; y = o; \\ &\text{luego } C = o \;,,\; C' = o \;,, \end{aligned}$$

y, por tanto, para un punto de la trayectoria:

$$x = V_a \cos \Phi\, t$$
$$y = \frac{1}{2} g\, t^2 + V_a \operatorname{sen} \Phi\, t.$$

De estas ecuaciones, despejando t en la primera y sustituyendo en la segunda, se deduce:

$$\frac{g}{2\, V_a{}^2 \cos^2 \Phi} x^2 + \operatorname{tg} \Phi\, x - y = o; \qquad (1)$$



lo que nos dice que la trayectoria es una parábola, cuyo eje será la recta

$$o' y' = x = - \operatorname{tg} \Phi \frac{V_a{}^2 \cos^2 \Phi}{g} = - \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi}{g},,$$

y la tangente en el vértice de esta parábola será la recta

$$o' x' = y = - \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}{2 g}.$$

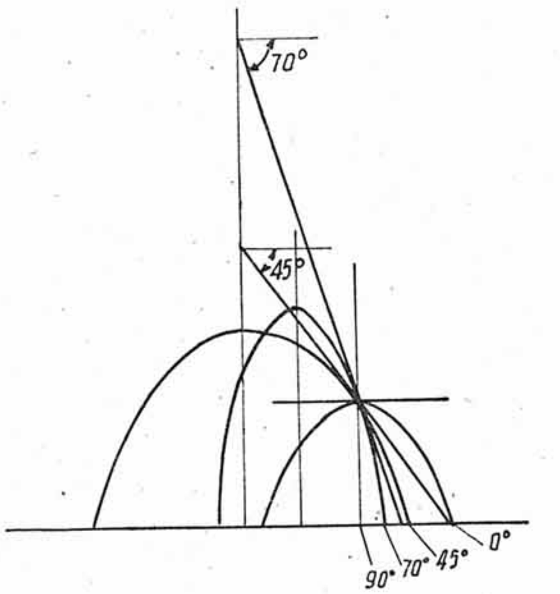
Estas fórmulas nos dicen que, a medida que el ángulo Φ de picado va en aumento, el eje de la parábola O' y' que en el caso de ser $\Phi = 0$ (bombardeo en horizontal) se confunde con el eje O y (vertical) del punto de lanzamiento, se va alejando de este eje, para volver luego a confundirse con él, caso de ser $\Phi = 90°$ (bombardeo en la vertical).

La máxima separación de este eje O' y' será la correspondiente a una inclinación del picado igual a 45°.

El máximo será para d x = o,, ; luego,

$$\frac{V_a{}^2}{g} \cos 2 \Phi = 0,, \cos 2 \Phi = 0,, 2 \Phi = 90^0,, \Phi = 45^0.$$

Para completar el estudio de esta parábola que, repetimos, vendría en función del ángulo Φ de picado y de la velocidad V_a de picado, refiramos la ecuación de la trayectoria obtenida (1) al eje vertical de ella y a la tangente en su vértice, y tendremos para esta ecuación, restando la separación de sus ejes:



$$y' - \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}{2 g} = \frac{g}{2 V_a{}^2 \cos^2 \Phi} \left(x' - \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi}{g} \right)^2 + \operatorname{tg} \Phi \left(x' - \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi}{g} \right)$$

y, finalmente:

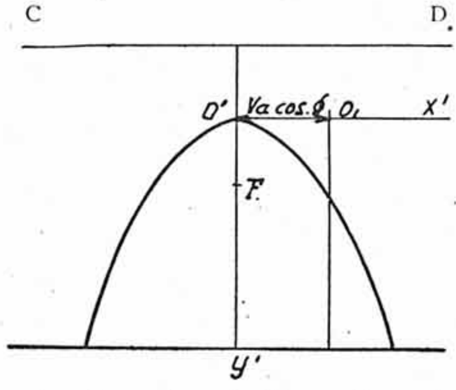
$$y' = \frac{g}{2 V_a{}^2 \cos^2 \Phi} x'^2,, \quad x'^2 = \frac{2 V_a{}^2 \cos^2 \Phi}{g} y'.$$

Ecuación de una parábola de parametro $\frac{2 V_a{}^2 \cos^2 \Phi}{g}$ cuyo eje es el eje de las y, representada en la figura.

El foco estará en un punto F, situado a una distancia $\frac{V_a{}^2 \cos^2 \Phi}{2 g}$, siendo esta misma distancia a la que está situada su directriz C D del punto O'.

La hodógrafa de esta parábola, por las razones expuestas en la Balística, será una línea recta vertical situada de O' a una distancia OO' $= V_a \cos \Phi$. La trayectoria relativa estaría en la vertical del aparato, si éste siguiese la dirección de su picado.

Trazada esta parábola, ya estamos en el caso de la trayectoria en un lanzamiento horizontal con una cierta velocidad inicial en el punto O'; velocidad horizontal que por ser, como ya hemos dicho, constante en todos los puntos de la parábola, será igual a $V_a \cos \Phi$, velocidad con que habrá sido abandonada en el punto O' por el aparato.



El estudio que se ha hecho en la Balística Exterior para esta clase de lanzamiento en horizontal, será aplicable para hallar todas las incógnitas del caso de lanzamiento en picado, pues bastará, por ejemplo, el restar en los alcances la separación del eje de la parábola al eje vertical que pasa por el punto de lanzamiento; para los tiempos, el deducir el que tarda en llegar la bomba al mismo punto de lanzamiento, etc.,.siendo los resultados para el punto de caída los correspondientes al punto en que la ordenada sea igual a la altura de lanzamiento.

Por tanto, las nuevas fórmulas de un punto de la trayectoria serán las siguientes, siendo, como hemos dicho, la separación entre los ejes adoptados:

$$x = - \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen} \Phi \cos \Phi}{g},, \quad y = \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}{2 g},,.$$

Para el valor del alcance.

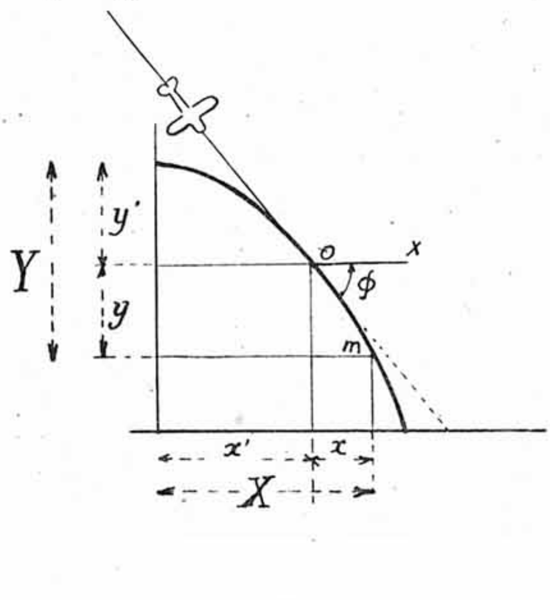
Para el valor de X, teníamos: $X = V_a \sqrt{\frac{2 Y}{g}},,.$

Llamando X, Y a las coordenadas en un punto m referido a los ejes de la parábola.

Para este caso, tendremos, por consiguiente:

$$x' = X - x =$$

$$= \frac{V_a \cos \Phi}{g} \left(\sqrt{2 g y + V_a{}^2 \operatorname{sen}^2 \Phi} - V_a \operatorname{sen} \Phi \right),, .$$



Para

$$\Phi = 0,\; x = V_a \sqrt{\frac{2\,y}{g}}\,.$$

Para

$$\Phi = 90^0,\; x = 0.$$

Tiempo de caída.

Teníamos para este valor:

$$T = \sqrt{\frac{2\,Y}{g}}\,.$$

Por tanto, tendremos:

$$t = \sqrt{\frac{2\,Y}{g}} - \sqrt{\frac{2\,y'}{g}} = \sqrt{\frac{2\,(y + y')}{g}} - \sqrt{\frac{2\,y'}{g}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,y}{g} + \frac{V_a{}^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}{g^2}} - V_a \operatorname{sen} \Phi.$$

Velocidad remanente.

Teníamos:

$$V_v = \sqrt{V_a{}^2 + 2\,g\,Y}\,.$$

Por tanto,

$$V_r = \sqrt{V_a{}^2 \cos^2 \Phi + 2\,g\,(y + y')} = \sqrt{V_a{}^2 + 2\,g\,y}\,.$$

Angulo de inclinación.

Teníamos:

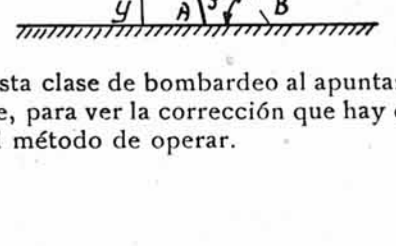
$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{2\,g\,Y}}{V_a}\,.$$

Por tanto,

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{2\,g\,(y + y')}}{V_a \cos \Phi} = \frac{\sqrt{2\,g\,y + V_a{}^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}}{V_a \cos \Phi}\,.$$

Haciendo, como dijimos, en estas fórmulas á (y) igual a la altura (A) de lanzamiento, las mismas fórmulas nos darán los datos para el punto de caída.

Ahora bien, para el resultado que vamos buscando, lo que nos interesa mayormente conocer es el error que se



comete en esta clase de bombardeo al apuntar el objetivo directamente, para ver la corrección que hay que hacer y, por tanto, el método de operar.

Si la bomba siguiera la trayectoria del aparato y si apuntamos con él al objetivo B, la bomba daría en él; pero como donde cae es en A, el error que se comete, A B, será AB = CB — CA = CA — x =

$$= \frac{y}{\operatorname{tg} \Phi} - \left[\frac{V_a \cos \Phi}{g} \left(\sqrt{2\,g\,y + V_a{}^2 \operatorname{sen} \Phi} - V_a \operatorname{sen} \Phi\right)\right]$$

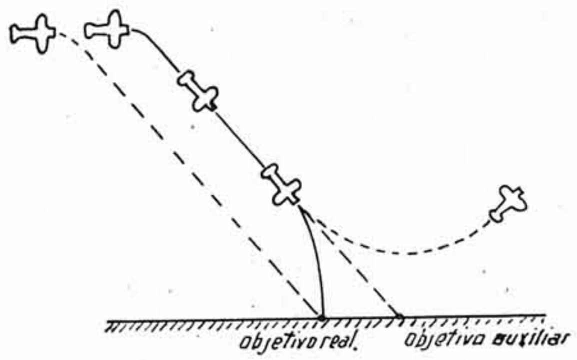
lo que nos dice que este error, siempre que no se llegue a $\Phi = 90°$, en cuyo caso será = O, será tanto menor cuanto mayor sea Φ y V_a y menor sea Y; luego hay que tender en esta clase de bombardeo a realizarlo con el mayor ángulo de picado, la mayor velocidad y la menor altura de lanzamiento.

Ahora bien, si fijamos V_a é Y, datos que pueden ser del problema, hará falta, para cometer el menor error posible, el que Φ sea lo mayor que se pueda.

Si los datos no cumplieran con las condiciones señaladas, haría falta corregir este error apuntando a un punto delante del objetivo.

Método de operar.

El método de operar en este caso del vacío, será, por tanto, en general, y para distintos valores de Φ (dados, por ejemplo, V_a é Y) una vez deducido por el cálculo el error que se comete si apuntamos directamente con el avión, el hacerlo a un punto que esté delante del objetivo y a distancia igual a la de aquel error. Con



un ángulo igual al del picado Φ, elegido una vez que se ha conseguido dicha puntería, iniciar este picado, alcanzando en él la velocidad V_a, fijada también.

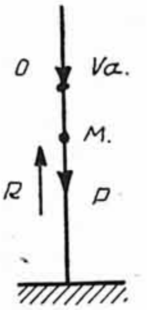
Al llegar a la altura señalada a su vez de antemano, abandonar la bomba.

Movimiento de una bomba lanzada con una cierta velocidad inicial y en la atmósfera.

Para el estudio de este apartado, caso real del bombardeo en picado, vamos a considerar dos partes: que la bomba sea lanzada con un ángulo de inclinación igual a 90°, o séase, bombardeo en la vertical, y que sea lanzada con otra inclinación distinta respecto a dicha línea.

LANZAMIENTO EN LA VERTICAL

En este caso, la bomba lanzada con una velocidad V_a en un punto o, estará sometida en un punto cualquiera m de su trayectoria a una fuerza P, igual a su peso, de arriba abajo, y a un esfuerzo resistente R, de abajo arriba, debido a la resistencia que opone el aire, esfuerzo que, por Balística, sabemos es igual a



$$R = i\,\Delta\,\frac{\pi \cdot d^2}{4}\,\varphi\,(v).$$

La aceleración por el peso será $\frac{P}{m} = g$, y por la resistencia del aire, también sabemos por la Balística que es de la forma $j = -\,c\,F\,(v)$, siendo $F\,(v) = f\,(v)\,V^2$.

La resultante, que será la aceleración total de la bomba, será:

$$\frac{d\,v}{d\,t} = g - c\,F\,(v); \quad \text{de donde} \quad d\,t = \frac{d\,v}{-\,c\,F\,(v) + g}\,,,$$

Si la velocidad v es constante, el movimiento será uniforme, o séase:

$$\frac{d\,v}{d\,t} = -\,c\,F\,(v) + g = 0\,,,; \quad \text{o séase:} \quad g = c\,F\,(v).$$

Al valor de (v), que realiza esta igualdad, ya sabemos que se le llama velocidad límite y que se representa por V', velocidad V', que será la que equilibrará la aceleración de la gravedad g de la bomba con la aceleración de la resistencia del aire, o séase, el peso de la bomba con R, resistencia del aire. Por tanto, para que la bomba marche desde el origen con velocidad uniforme, hará falta lanzarla con una velocidad V'; pero como la lanzamos con una cierta velocidad V_a, velocidad de picado, haría falta que esta velocidad fuera igual a la velocidad límite.

Si fuese menor, la Balística demuestra que, aunque teóricamente no alcanza ninguna bomba dicha velocidad más que después de un tiempo infinito y para una altura infinita, en la práctica sí alcanza este valor después de tiempos finitos.

Si la velocidad del avión fuese mayor que la velocidad límite de la bomba, la bomba se frenaría en el aire hasta llegar a obtener su velocidad límite.

En virtud de ello, conociendo la velocidad límite V' de una bomba, que por Balística sabemos determinar, ella nos marcará el límite máximo de velocidad que podría alcanzar el avión en su picado, no debiendo el avión, por tanto, llegar a alcanzar esta velocidad.

Para hallar los valores de la velocidad V_r remanente, del tiempo t de caída de una bomba, en función de la velocidad V_a del aparato, de (y), altura a que se ejecute el bombardeo y de la velocidad límite V' de la bomba a emplear, datos estos últimos y únicas incógnitas las primeras que nos interesarán en este caso de bombardeo, hallaremos primero los valores de t é y en función de la velocidad v de un punto de la trayectoria, y de esos valores hallaremos luego los de t y V en función de y.

Para hallar los valores de t (tiempo de caída desde un punto dado) y de (y) su altura, en función de la velocidad v en dicho punto de la trayectoria, y de la V' é V_a de la bomba, partamos de las ecuaciones anteriores:

$$\frac{d\,v}{d\,t} = g - c\,F\,(v)\,,, \quad d\,t = \frac{d\,v}{-\,c\,F\,(v) + g} \quad (2)$$

como la velocidad $V = \frac{d\,y}{d\,t}$,, $d\,y = V\,d\,t$, sustituyendo en este valor el de d t (2), tendremos para

$$d\,y = \frac{V\,dv}{-\,c\,F\,(v) + g} \quad (3).$$

Integrando estas ecuaciones (2) y (3), tendremos los valores de t é y, que buscamos; o séase: que llamando V_a la velocidad del aparato en el momento de soltar la bomba,

$$t = -\int_{V_a}^{V} \frac{dv}{c\,F\,(v) - g}\,,, \quad \text{é} \,,, \quad y = -\int_{V_a}^{V} \frac{V\,dv}{c\,F\,(v) - g}\,,,$$

Estas ecuaciones sólo podrán resolverse si conociéramos una fórmula determinada para las variaciones de la F (v).

Cuando no se conozca, como hasta ahora, más que experimentalmente, y por ello sólo sepamos que la velocidad de la bomba y hasta velocidades de 300 metros por segundo varía aproximadamente con el cuadrado de la velocidad, habrá que recurrir a otros procedimientos.

Aplicaremos, por ello, el método de cuadraturas.

Haremos $F\,(v) = B\,V^2$,, $c\,F\,(v) = c\,B\,V^2 = b\,V^2$, y entonces la ecuación de t se podrá poner bajo la forma

$$g\,t = -\int_{V_a}^{V} \frac{g\,dv}{c\,F\,(v) - g} = -\int_{V_a}^{V} \frac{g\,dv}{b\,V^2 - g},$$

como para $V = V'$ sabemos que $F\,(V') = g = b\,V'^2$.

Sustituyamos en vez de g este valor, y tendremos:

$$V'^2\,b\,t = -\int_{V_a}^{V} \frac{dv}{\frac{b\,V^2}{b\,V'^2} - 1} = \int_{V_a}^{V} \frac{V'^2\,dv}{(V' + v)\,(V' - v)}\,,,$$

Dividiendo por V' y multiplicando y dividiendo el segundo término por 2:

$$V'\,b\,t = \frac{1}{2}\int_{V_a}^{V} \frac{2\,V'\,dv}{(V' + v)\,(V' - v)} = \frac{1}{2}\int_{V_a}^{V} \left[\left(\frac{dv}{V' + v}\right) - \left(\frac{-\,dv}{V' - v}\right)\right] = \frac{1}{2}\,\lg \frac{(V' + v)\,(V' - V_a)}{(V' - v)\,(V' + V_a)}\,,,$$

y, por tanto, para el valor de t

$$t = \frac{\frac{1}{2}\,\lg \frac{(V' + v)\,(V' - V_a)}{(V' - v)\,(V' + V_a)}}{V'\,b.} \quad (4)$$

Integrando también de una manera análoga a la realizada con la ecuación que nos da el valor de (y), tendremos, multiplicando los dos términos de ella por $g = b\,V'^2$, y siendo, como sabemos, $c\,F(v) = b\,V^2$,

$$b\,V'^2 y = -\int_{V_a}^{V} \frac{V\,dv\,g}{c\,F(v) - g} = \int_{V_a}^{V} \frac{V'^2 \,.\, V \,.\, dv}{V^2 - V'^2}.$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término por -2, y eliminando V'^2, tendremos también, cambiando de signo el denominador:

$$by = -\frac{1}{2}\int_{V_a}^{V}\left(-\frac{2\,V\,dv}{V'^2 - V^2}\right) = \frac{1}{2}\lg\frac{V'^2 - V_a}{V'^2 - V^2};$$

y, por tanto, para el valor de (y)

$$y = \frac{\frac{1}{2}\lg\frac{V'^2 - V_a{}^2}{V'^2 - V^2}}{b} \quad (5).$$

Para hallar ahora (una vez obtenidos estos valores) el tiempo (t) de caída y la velocidad (v) de una bomba, en función de una altura (y) dada, de una velocidad (V') de la bomba y de la velocidad (V_a) del avión en el momento del lanzamiento, utilizaremos los anteriores valores hallados, transformándolos para el objeto que perseguimos.

Para ello, haremos uso de la variable auxiliar (t'), que haremos igual a (b V' t), y tendremos para V:

$$\text{Por ser } b\,V'\,t = t' = \frac{1}{2}\lg\frac{(V' + v)(V' - V_a)}{(V' - v)(V' + V_a)}$$

$$e^{2t'} = \frac{(V' + v)(V' - V_a)}{(V' - v)(V' + V_a)} \;\therefore\; (V' - v)(V' + V_a)\,e^{2t'} =$$

$$= (V' + v)(V' - V_a),$$

y desarrollando .

$$v = V'\left[\frac{e^{2t'}(V' + V_a) - (V' - V_a)}{e^{2t'}(V' + V_a) + (V' - V_a)}\right];$$

y dividiendo el numerador y denominador por $e^{t'}$, tendremos para valor de (v):

$$v = V'\left[\frac{e^{t'}(V' + V_a) - (V' - V_a)\,e^{-t'}}{e^{t'}(V' + V_a) + (V' - V_a)\,e^{-t'}}\right] =$$

$$= V'\left[\frac{V'(e^{t'} - e^{-t'}) + V_a(e^{t'} + e^{-t'})}{V'(e^{t'} + e^{-t'}) + V_a(e^{t'} - e^{-t'})}\right].$$

Dividiendo por $V'(e^{t'} + e^{-t'})$, tendremos:

$$v = V'\left[\frac{\frac{e^{t'} - e^{-t'}}{e^{t'} + e^{-t'}} + \frac{V_a}{V'}}{1 + \frac{V_a}{V'}\left(\frac{e^{t'} - e^{-t'}}{e^{t'} + e^{-t'}}\right)}\right] = V'\left[\frac{V'\,tg\,h\,t' + V_a}{V' + V_a\,tg\,h\,t'}\right] \quad (6).$$

Para hallar el valor de (t'), que sustituído en la expresión nos da el valor de (v) para una altura (y) dada, buscaremos una expresión de (y) en función de dicha variable (t'), lo que nos permitirá, dado un valor de (y), el hallar el de (t'), pudiendo formar parte de dicha expresión los valores de V' y V_a, datos conocidos.

Para ello, el valor de (v), dado por la fórmula (6), lo restaremos y sumaremos al valor de V', y tendremos:

$$\left.\begin{aligned} V' - V &= V' - V'\left[\frac{V'\,tg\,h\,t' + V_a}{V' + V_a\,tg\,h\,t'}\right] \\ V' + V &= V' + V'\left[\frac{V'\,tg\,h\,t' + V_a}{V' + V_a\,tg\,h\,t'}\right] \end{aligned}\right\}$$

Multiplicando los primeros y segundos términos.

$$(V'^2 - V^2) = V'^2\left[1 - \left(\frac{V'\,tg\,h\,t' + V_a}{V' + V_a\,tg\,h\,t'}\right)^2\right] =$$

$$= V'^2\,\frac{(V'^2 - V_a{}^2)(1 - \overline{tg\,h\,t'}^2)}{(V' + V_a\,tg\,h\,t')^2};$$

de donde

$$\frac{V'^2 - V_a{}^2}{V'^2 - V^2} = \frac{(V' + V_a\,tg\,h\,t')^2}{V'^2(1 - \overline{tg\,h\,t'}^2)} =$$

$$= \frac{(V'\cos h\,t + V_a\,\mathrm{sen}\,h\,t')^2}{V'^2}.$$

Sustituyendo este valor, en el que nos daba el valor de (y), (fórmula (5), y que era

$$y = \frac{\frac{1}{2}\lg\frac{V'^2 - V_a{}^2}{V'^2 - V^2}}{b},$$

tendremos para valor de (y), poniendo también á (b) en función de (V), por ser $b = \frac{g}{V'^2}$

$$y = \frac{\frac{1}{2}\lg\left(\frac{V'\cos h\,t' + V_a\,\mathrm{sen}\,h\,t'}{V}\right)^2}{\frac{g}{V'^2}} =$$

$$= \frac{V'^2\lg\left(\cos h\,t' + \frac{V_a}{V'}\,\mathrm{sen}\,h\,t'\right)^2}{g} \quad (7).$$

Obtenida esta fórmula y dando un valor a (y), podíamos obtener, como dijimos anteriormente, el valor de (t').

Deducido éste, se podrá hallar el valor de (V) por la fórmula (6), conocido, repetimos, los valores de V' y de V_a.

Asimismo podremos obtener el valor de (t), por saber que $t' = t\,b\,V'$ y, por tanto, $t = \frac{t'}{b\,V'}$ y poniendo también el valor de (b) en función de (V')

$$\left(b = \frac{g}{V'^2}\right) \therefore t = \frac{t'\,V'^2}{g\,V'} = \frac{t'\,V'}{g} \quad (8).$$

Lo que nos da resuelto el problema presentado.

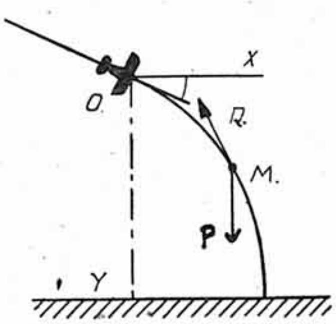
Lanzamiento. Caso general.

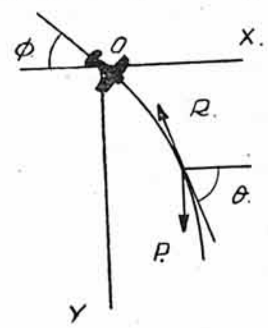
Ecuaciones del movimiento.

Una vez efectuado el anterior estudio del movimiento de una bomba lanzada con una cierta velocidad inicial y en la vertical (ángulo de picado $= 90^{\circ}$), vamos ahora a realizar, como dijimos anteriormente, el del movimiento de esta bomba cuando sea lanzada con una cierta velocidad inicial, pero formando un ángulo distinto de 90° con la horizontal (ángulo de picado variable); caso real que se presentará en la práctica.

Si desde un avión de velocidad V_a (velocidad del picado en el momento del lanzamiento), se suelta una bomba en el punto (o), la bomba en el punto M estará sometida a una fuerza vertical igual a su peso (p) y a otra igual a la resistencia del aire (R), dirigida en sentido contrario a la marcha de la bomba y tangente, por tanto, a su trayectoria. Esta trayectoria de la bomba estará contenida en el plano vertical que pasa por (R), y como (R) tiene la misma dirección y sentido contrario a (V_a) en el momento del lanzamiento, la bomba no saldrá del plano vertical que contiene a (V_a), suponiendo, claro es, que no haya viento lateral alguno.

Refiriendo el movimiento a dos ejes O X é O Y, que pasen por el punto de lanzamiento de la bomba y siendo (m) la masa de la bomba, θ el ángulo que forma la tangente a la trayectoria en un punto de ella y Φ el ángulo





de picado, podemos establecer, al igual que lo hicimos en el caso del movimiento de una bomba en el vacío y en virtud del principio allí primeramente expuesto de que la proyección de la masa por la aceleración es igual a las proyecciones de las fuerzas directamente aplicadas en un punto:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{R}{m} \cos \theta \;,,\; \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{P}{m} - \frac{R \operatorname{sen} \theta}{m};$$

y como $\frac{P}{m}$ es la aceleración (g) y $\frac{R}{m}$ es la de (R), que ya dijimos era igual a $J = c\, F(v)$, tendremos:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -c\, F(v) \cos \theta \;,,\; \frac{d^2 y}{d t^2} = g - c\, F(v) \operatorname{sen} \theta.$$

Como

$$\frac{d x}{d t} = \underline{V \cos \theta} \;,,\; \frac{d y}{d t} = \underline{V \operatorname{sen} \theta},$$

tendremos sustituyendo estos valores:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d (V \cos \theta)}{d t} = -c\, F(v) \cos \theta \;,,\; (9) \;,,$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d (V \operatorname{sen} \theta)}{d t} = g - c\, F(v) \operatorname{sen} \theta \;,,\; (10).$$

Estudio del movimiento.

De estas ecuaciones de primer orden y aun sin conocer $\underline{F(v)}$, pero con la hipótesis de que es una función continua con (V) y tiende al ∞ al mismo tiempo que (V), se pueden demostrar algunas propiedades comunes a todas las trayectorias, como, por ejemplo, que la velocidad horizontal va disminuyendo, porque de la ecuación $\frac{d (V \cos \theta)}{d t} = -c\, F(v) \cos \theta$ es negativo su segundo término y, por tanto, $\frac{d (V \cos \theta)}{d t} < 0$, y por consiguiente, $V \cos \theta$ (velocidad horizontal), será decreciente.

Que la inclinación límite de la trayectoria es de 90°, porque si a la ecuación (9) la multiplicamos por ($\operatorname{sen} \theta$) y a la (10) por ($\cos \theta$), tendremos:

$$\operatorname{sen} \theta \frac{d (V \cos \theta)}{d t} = \frac{d v}{d t} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - V \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d \theta}{d t} =$$

$$= -c\, F(v) \cos \theta \operatorname{sen} \theta,$$

$$\cos \theta \frac{d (V \operatorname{sen} \theta)}{d t} = \frac{d v}{d t} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + V \cos^2 \theta \frac{d \theta}{d t} =$$

$$= g \cos \theta - c\, F(v) \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

y si restamos la segunda de la primera

$$v (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \frac{d \theta}{d t} = g \cos \theta \;,,\; v \frac{d \theta}{d t} = g \cos \theta \;,,$$

$$\text{luego } d t = \frac{v}{g} \frac{d \theta}{\cos \theta}.$$

Por tanto, si ponemos en lugar de (v) su igual $\frac{u}{\cos \theta}$ e integramos entre o y t y Φ y θ, tendremos:

$$g t = \int_{\Phi}^{\theta} \frac{d \theta}{\cos^2 \theta},$$

y si llamamos (K) un valor intermedio entre los que adquiere $u = v \cos \theta$ (velocidad horizontal),

$$g t = e \int_{\Phi}^{\theta} \frac{d \theta}{\cos^2 \theta} = K (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \Phi);$$

luego cuando $t = \infty$ y $K \pm \infty$. $\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \Phi = \infty$,, y como $\operatorname{tg} \Phi$ es $\pm \infty$,, $\operatorname{tg} \theta = \infty$,,; luego $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La velocidad de la bomba tiene un límite V' tal que $F(V') = g$, pues si hacemos a $\theta = \frac{\pi}{2}$, estaremos en el caso de movimiento vertical, descendente, que ya dijimos se demostraba por Balística tomaba este valor.

La trayectoria tiene una asíntota a una distancia finita del origen, pues la tangente en la extremidad de la trayectoria tiene por coeficiente angular $\frac{d y}{d x} = \operatorname{tg} \theta$, que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ indica que la tangente es vertical. Siendo la abscisa del punto en donde su vertical está tangente a la trayectoria (final de ella) el valor de x, se puede este valor deducir de la fórmula $\frac{dx}{dt} = V \cos\theta$, de donde $dx = dt\, V \cos\theta$, y sustituyendo el valor de dt antes hallado

$$dx = \frac{V}{g} \frac{d\theta}{\cos\theta} V \cos\theta = \frac{V^2}{g} d\theta \,,,.$$

Integrando entre (o) y (x) y (Φ) y (θ), tendremos:

$$x = \frac{1}{g} \int_{\Phi}^{\theta} V^2 \, d\theta,$$

y como los valores de V^2 varían entre $V_a{}^2$ y V'^2, podemos poner, siendo K' un valor comprendido entre ellos,

$$x = \frac{K'}{g} (\theta - \Phi)$$

y como en el límite

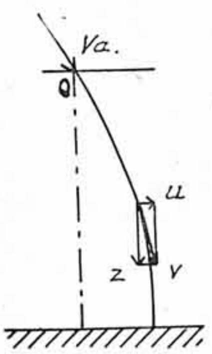
$$\theta = \infty \,,, \; x = \frac{K'}{g} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Valores del alcance y de la velocidad horizontal.

Para hallar el valor del alcance y de la velocidad horizontal, haremos la integración de la ecuación (9), anteriormente hallada. En efecto, tenemos esta ecuación:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - c\, F(v) \cos\theta.$$

Supongamos el caso de resistencia cuadrática y podremos sustituir en vez de $F(v) = B v^2$ (igual como hicimos en el caso de lanzamiento en la vertical) y, por tanto, $c F(v) = c B v^2 = b V^2$ y sustituyendo, tendremos:



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - b V^2 \cos\theta \,,,$$

como

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds} \text{ y } V = \frac{ds}{dt} \,,,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - b V \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = - b V \frac{dx}{dt}.$$

Como la velocidad horizontal (u), cuando se bombardea con ángulos de picado mayores de 45° (caso general en esta clase de bombardeos), es muy pequeña en comparación con la velocidad vertical (z) en un punto de la trayectoria, podemos, aproximadamente, considerar a esta velocidad (v) en un punto de la trayectoria, igual a dicha velocidad (z), vertical siempre, claro es, que (v) sea grande.

Esta velocidad vertical, es la velocidad de la trayectoria en el caso del movimiento de una bomba lanzada en la vertical y que obtuvimos (6):

$$V = V' \left[\frac{V' \operatorname{tgh} t' + V_a}{V' + V_a \operatorname{tgh} t'} \right];$$

luego sustituyendo la ecuación, quedará:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = - b V' \left[\frac{V' \operatorname{tgh} t' + V_a}{V' + V_a \operatorname{tgh} t'} \right] \frac{dx}{dt}.$$

$$\frac{du}{u} = - b V' \left[\frac{V' \operatorname{tgh} t' + V_a}{V' + V_a \operatorname{tgh} t'} \right] dt.$$

Si hacemos como anteriormente supusimos $b V' t = t'$,, $dt' = b V' dt$, tendremos:

$$\frac{du}{u} = - \left[\frac{V' \operatorname{tgh} t' + V_a}{V' + V_a \operatorname{tgh} t'} \right] dt',$$

integrando entre (u_o y u) y (o y t) y haciendo $\frac{V_a}{V'} = \operatorname{tgh} A$

$$\lg \frac{u}{u_o} = - \int_o^{t'} \frac{\operatorname{tgh} t' + \operatorname{tgh} A}{1 + \operatorname{tgh} A \operatorname{tgh} t'} = - \int_o^{t'} \operatorname{tgh} (A + t') =$$

$$= \left[\lg \frac{1}{\cosh (A + t')} \right]_o^{t'}$$

$$\frac{u}{u_o} = \frac{\cosh A}{\cosh (A + t')} \,,, \; u = u_o \frac{\cosh A}{\cosh (A + t')} =$$

$$= u_o \frac{V'}{V' \cosh t' + V_a \operatorname{senh} t'};$$

y poniendo en lugar de $u_o = V_a \cos\Phi$, tendremos para la velocidad horizontal:

$$u = \frac{V' V_a \cos\Phi}{V' \cosh t' + V_a \operatorname{senh} t'} \,,,.$$

Para el valor del alcance (x), tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = u = u_o \frac{\cosh A}{\cosh (A + t')} \,,,$$

luego poniendo en lugar de dt su valor deducido de $b V' t = t'$

$$dx = u_o \frac{\cosh A}{\cosh (A + t')} \frac{dt'}{b V'}$$

integrando entre (o y x) y (o y t'), tendremos:

$$x = \int_o^{t'} u_o \frac{\cosh A}{\cosh (A + t')} \frac{dt'}{b V'} \,,, \; b x = \frac{u_o}{V'} \cosh A \,.$$

$$\int_o^{t'} \frac{dt'}{\cosh (A + t')} = \frac{2 u_o}{V'} \cosh A \operatorname{arc\,tg} \left[\operatorname{tgh} \left(\frac{A + t'}{2} \right) \right]$$

y poniendo en lugar de $\operatorname{tgh} A$ su valor $\frac{V_a}{V'}$ (11)

$$\cosh A = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 A}} = \frac{V'}{\sqrt{V'^2 - V_a{}^2}} \text{ (12)},$$

y para b x, se tendrá:

$$b\,x = \frac{2\,u_o}{V'}\,\frac{V'}{\sqrt{V'^2 - V_a{}^2}}\,.$$

$$\text{arc tg}\left[\text{tg h}\left(\frac{\text{tg h}\,\frac{A}{2} + \text{tg h}\,\frac{t'}{2}}{1 - \text{tg h}\,\frac{A}{2}\,\text{tg h}\,\frac{t'}{2}}\right)\right] = (13)$$

$$= \frac{2\,u_o}{\sqrt{V'^2 - V_a{}^2}}\,\text{arc tg}\left[\frac{\text{tg h}\,\frac{A}{2}\,(e^{t'} + 1) + (e^{t'} - 1)}{(e^{t'} + 1) - \text{tg h}\,\frac{A}{2}\,(e^{t'} - 1)}\right] (14);$$

pero

$$\text{tg h}\,A = \frac{2\,\text{tg h}\,\frac{A}{2}}{1 + \text{tg h}^2\,\frac{A}{2}}$$

o séase: ordenando

$$\text{tg h}^2\,\frac{A}{2}\,\text{tg h}\,A - 2\,\text{tg h}\,\frac{A}{2} + \text{tg h}\,A = o\,_{,,}\,;\ \text{luego tg h}\,\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - \text{tg h}^2\,A}}{\text{tg h}\,A} = \frac{1 \pm \frac{1}{\cos\text{h}\,A}}{\text{tg h}\,A}\,;$$

y poniendo en vez de $\frac{1}{\cos \text{h}\,A}$ y de tg A sus valores obtenidos anteriormente en (11) y en (12), tendremos:

$$\text{tg h}\,\frac{A}{2} = \frac{V' \pm \sqrt{V'^2 - V_a{}^2}}{V_a}\,;$$

y sustituyendo en (14)

$$b\,x = \frac{2\,u_o}{\sqrt{V'^2 - V_a{}^2}}\,\cdot$$

$$\cdot\ \text{arc tg}\left[\frac{(V' + \sqrt{V'^2 - V_a{}^2})\,(e^{t'} + 1) + V_a\,(e^{t'} - 1)}{V_a\,(e^{t'} + 1) - (V' + \sqrt{V'^2 - V_a{}^2})\,(e^{t'} - 1)}\right] (15);$$

o bien sustituyendo en (13)

$$b\,x = \frac{2\,u_o}{\sqrt{V'^2 - V_a{}^2}}\,\cdot$$

$$\cdot\ \text{arc tg}\left[\text{tg h}\left[\frac{\frac{V' \pm \sqrt{V'^2 - V_a{}^2}}{V_a} + \text{tg h}\,\frac{t'}{2}}{1 - \frac{V' \pm \sqrt{V'^2 - V_a{}^2}}{V_a}\,\text{tg h}\,\frac{t'}{2}}\right]\right] (16);$$

y poniendo en lugar de (b) su valor $\frac{g}{V'^2}$ y despejando x, tendremos dicho valor.

(Continuará.)

Los frenos aerodinámicos para vuelo en picado

LA EFICACIA DE LOS AVIONES "JU-87" Y "JU-88"

En diversos números de esta Revista se ha comentado el tema apasionante y de actualidad del bombardeo en picado. El tema ha sido tratado ampliamente en lo que atañe a las condiciones del avión, así como, en lo que afecta a las condiciones físicas del personal, en el problema de los esfuerzos extraordinarios que hay que soportar. Teniendo en cuenta el factor de aceleración de la gravedad que el organismo humano puede soportar, según la posición del tripulante, se llega a limitar la velocidad de empleo en cada maniobra. Y, como consecuencia, se hace necesario introducir nuevos elementos en la organización del avión.

Así, con el desarrollo y amplia utilización de aparatos de bombardeo en picado, se ha abierto paso en la construcción de aviones a los frenos aerodinámicos. Los frenos que deben limitar la velocidad del vuelo en picado están compuestos de dos sencillas superficies de resistencia, incrustadas en el fuselaje o las alas, que en vuelo normal ofrecen el mínimo obstáculo o que penetran por completo dentro del avión. Antes de iniciar el vuelo en picado se sacan de su posición y actúan de resistencia complementaria, por lo que la velocidad de caída, según el tamaño de los frenos, se amolda a lo requerido, es decir, se disminuye. Las figuras 1 y 2 enseñan los frenos de vuelo en picado de un *Ju-87*, colocados en las alas en posición pasiva y activa.

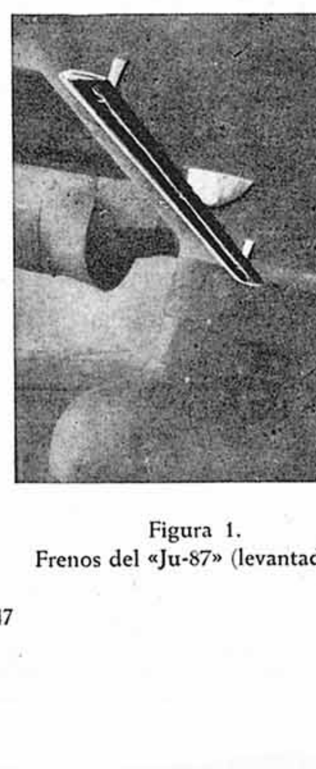


Figura 1.
Frenos del «Ju-87» (levantados).

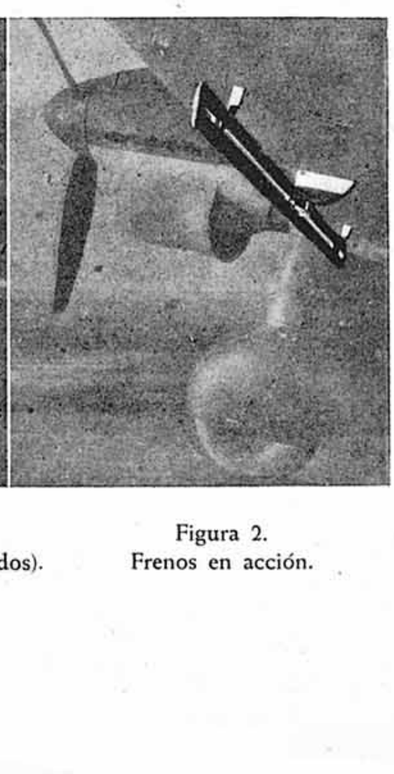


Figura 2.
Frenos en acción.