Aerotecnia

Influencia de la torsión de los largueros en el cálculo de un ala

Por FERNANDO MEDIALDEA OLIVENCIA

Licenciado en Ciencias y alumno de la E. S. A.

TODO cuanto diremos a continuación se refiere solamente a las alas cantilever con dos largueros y sin revestimiento trabajando.

Generalmente, cuando se calcula un ala de este tipo, una vez determinada la línea de centros de presión correspondiente a los distintos casos de vuelo, se supone la carga del caso en estudio actuando sobre la línea de centros de presión correspondiente, carga que se descompone sobre los largueros en otras dos, q_1 y q_2, de modo que su suma sea igual a la carga total y que sus valores sean inversamente proporcionales a la distancia del centro de presión a los largueros. Conocidos de este modo q_1 y q_2 para los tres casos de vuelo, se calcula cada larguero para la mayor de las cargas obtenidas.

Se comprende fácilmente que siendo diferentes en los distintos casos de vuelo las cargas q_1 y q_2 (en el tercero, aunque son iguales, son de signo contrario), los dos largueros no se deforman por igual. Consecuencia de esta desigual deformación y de estar los largueros unidos entre sí por los montantes, aparece una torsión sobre el ala, que hace variar la solicitación para que habían sido calculados.

Antes de seguir, debe advertirse que el procedimiento expuesto a continuación es de los llamados de aproximaciones sucesivas. Supondremos primeramente los largueros calculados por el procedimiento usual, y conocidos así los valores de los momentos de inercia, tanto polares como rectangulares, en el empotramiento, extremo y sección media del larguero, podrán tomarse con aproximación más que suficiente, como leyes de variación de estos momentos, los trozos de parábolas de eje vertical, pasando por dichos tres puntos.

El conocimiento de estas leyes de variación nos permitirá determinar los diagramas definitivos de los momentos de flexión y torsión.

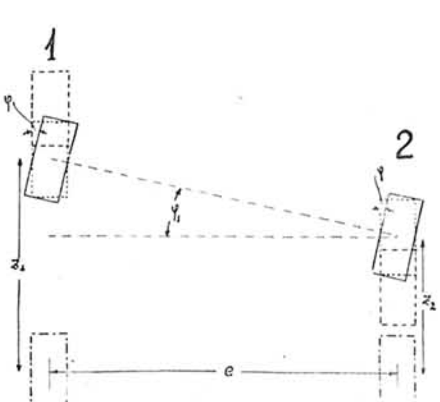

Fig. 1.

Representemos (fig. 1.ª) una sección de los largueros por un plano perpendicular a su posición primitiva y a una distancia x del empotramiento. Expresemos en ella: con líneas de punto y raya, las secciones de los largueros antes de deformarse; con líneas de rayas, la posición que tomarían si no estuviesen unidos entre sí; con línea de puntos, la posición real, pero sin torsión, y con línea llena, la posición definitiva. En dicha figura se ha supuesto el larguero *1* más cargado que el *2* y ambos en el mismo sentido (primer caso de vuelo).

En lo sucesivo designaremos con el subíndice 1 todos los elementos que se refieren al larguero 1, y con el subíndice 2 los que se refieren al larguero 2.

Se advertirá, por último, que la unión de los montantes a los largueros se supone de gran rigidez.

Debido precisamente a la supuesta rigidez en la conexión, el ángulo φ_1 de la figura 1.ª es igual a los φ, por tener sus lados perpendiculares; siendo, además, los tres relativamente pequeños, podemos sustituir con suficiente aproximación el ángulo por la tangente, obteniendo

$$\varphi = \frac{z_1 - z_2}{e} \qquad [1]$$

donde z_1 y z_2 representan las ordenadas de las elásticas y e la distancia entre largueros, valores todos correspondientes a la sección por el plano que estamos considerando.

La carga q_1 determinada como hemos dicho al principio y que actúa sobre el larguero 1, la podemos imaginar descompuesta en dos cargas: una, q_{f_1} (carga de flexión), que produce la flexión del larguero 1 haciéndole ocupar la posición real pero sin torsión, indicada con línea de puntos en el dibujo, y otra, q_{t_1} (carga de torsión), que se transmite por los montantes y es absorbida por el larguero 2 al hacerle girar el ángulo φ.

Se supone hecha análoga descomposición para la carga q_2 del larguero 2 en las cargas q_{f_2} y q_{t_2}.

Puesto que aun no sabemos nada sobre el sentido de las cargas q_{t_1} y q_{t_2} (más adelante se verá que cambian a lo largo del larguero), podemos establecer algébricamente:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{f_1} + q_{t_1} \\ q_2 &= q_{f_2} + q_{t_2} \end{aligned} \qquad [2]$$

Las cargas q_{f_1} y q_{f_2} producirán sobre sus largueros respectivos dos leyes de momentos de flexión M_{f_1} y M_{f_2}; también las de torsión q_{t_1} y q_{t_2} producirán dos leyes de momentos de torsión M_{t_2} y M_{t_1}. Pues bien: el problema que tratamos de resolver consiste en determinar las nuevas leyes de momentos en función de las leyes de cargas conocidas q_1 y q_2.

Sean I_1 e I_2 (funciones conocidas de x) los momentos de inercia rectangulares de cada larguero. Se tendrá por la ecuación de la elástica:

$$\frac{M_{f1}}{I_1} = E\frac{d^2 z_1}{dx^2}$$
$$\frac{M_{f2}}{I_2} = E\frac{d^2 z_2}{dx^2} \qquad [3]$$

y también

$$\frac{d^2 M_{f1}}{dx^2} = q_{f1}$$
$$\frac{d^2 M_{f2}}{dx^2} = q_{f2}. \qquad [4]$$

Por otra parte, si designamos por $\frac{d\varphi}{dx}$ la torsión unitaria, por I_p el momento de inercia polar, por E_t el módulo de esfuerzo cortante y por k un coeficiente de «forma» a determinar en cada caso, según la sección del larguero, obtenemos, llamando M_t al momento de torsión:

$$\frac{M_t}{k \cdot I_p} = E_t\frac{d\varphi}{dx},$$

y como por [1]

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{z_1 - z_2}{e}\right)$$

podremos escribir para los dos largueros:

$$M_{t1} = k \cdot I_{p1} \cdot E_t \frac{d}{dx}\left(\frac{z_1 - z_2}{e}\right),$$
$$M_{t2} = k \cdot I_{p2} \cdot E_t \frac{d}{dx}\left(\frac{z_1 - z_2}{e}\right). \qquad [5]$$

Para obtener los momentos lo primero que hará falta es eliminar las derivadas de las z respecto a las x en el sistema [3], [5]. Planteada la cuestión así en su aspecto general, presenta dificultades de cálculo extraordinarias, como se deduce de la simple inspección de dicho sistema. Una de las dificultades mayores proviene de suponer la distancia e entre largueros variable, porque al efectuar la derivación indicada en [5] aparecen las z y las $\frac{dz}{dx}$, y como en [3] aparecen las $\frac{d^2 z}{dx^2}$, la eliminación de z y sus derivadas es poco menos que imposible, enfocando el problema en la forma que lo hemos hecho.

Vamos a introducir algunas hipótesis que aproximándose bastante a la realidad y sin suponer e constante, nos permitan, no sólo realizar la eliminación indicada, sino obtener inmediatamente el momento de torsión.

Sean t_1 y t_2 los coeficientes de trabajo y h_1 y h_2 las semialturas de los largueros correspondientes a la sección distante x del empotramiento y que venimos considerando. Se tendrá:

$$\frac{M_{f1} \cdot h_1}{I_1} = t_1 \quad , \quad \frac{M_{f2} \cdot h_2}{I_2} = t_2.$$

Si el larguero 1, que es el más cargado, según hemos supuesto, es el que se desea calcular, t_1 será sensiblemente constante a lo largo de todo él y próximo a la admisible para el material.

Como en realidad no ocurre así, porque el larguero trabaja a flexión y torsión combinadas, una de las hipótesis consiste en suponer la primera de las relaciones anteriores constante a lo largo de todo el larguero y de valor igual al coeficiente de trabajo admitido.

En cuanto a la segunda de las relaciones que corresponde al larguero 2, sólo es constante a lo largo de todo él (prescindiendo también de la torsión) cuando figure en el numerador en lugar de M_{f2} la ley de momentos para la cual está calculado y que corresponderá a otro caso de vuelo distinto del primero (generalmente el segundo). Si la curva representativa de la ley de cargas q_{f2} que actúa ahora sobre el larguero 2, tuviese sus ordenadas proporcionales a las de la ley q' por la cual esté calculado dicho larguero, entonces también sería constante a lo largo de todo él la relación $\frac{M_{f2} \cdot h_2}{I_2}$, aunque con un valor diferente (el coeficiente de trabajo multiplicado por el de proporcionalidad). Ahora bien: las ordenadas de las leyes de cargas totales son proporcionales en todos los casos a la cuerda del ala, luego las q_2 y q' también lo son por representar cada una un determinado tanto por ciento de la ley de cargas total.

Nosotros admitiremos que la relación constante es para todo el larguero, y de valor el que resulte de poner en lugar de h_2 e I_2 los obtenidos en la mitad del larguero ya calculado en primera aproximación, sustituyendo también M_{f2} por el valor que en dicha sección tome la ley de momentos producida por q_2.

Equivale la hipótesis a sustituir la ley de cargas q_{f2} por la q_2 y, por tanto, considerar para el larguero 2 la elástica de rayas en lugar de la de puntos. Como estas dos elásticas coinciden sensiblemente, la diferencia en los valores de φ obtenidos es despreciable.

Sea por último $c(x)$ la función conocida que expresa la ley de variación de la cuerda del ala en función de su distancia x al empotramiento. Como los largueros suelen estar colocados a un tanto por ciento fijo del borde de ataque, a su vez las alturas representan unos determinados y conocidos tantos por uno p_1 y p_2 de la cuerda $c(x)$, es decir:

$$h_1 = p_1 c(x),$$
$$h_2 = p_2 c(x).$$

Como

$$\frac{M_{f1}}{I_1} = \frac{t_1}{h_1} \quad , \quad \frac{M_{f2}}{I_2} = \frac{t_2}{h_2},$$

restando y teniendo presente los valores h_1 y h_2, tenemos:

$$\frac{M_{f1}}{I_1} - \frac{M_{f2}}{I_2} = \frac{t_1 \cdot p_2 - t_2 \cdot p_1}{p_1 \cdot p_2 \cdot c(x)},$$

luego la diferencia de las ecuaciones [3] se reduce a

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} - \frac{d^2 z_2}{dx^2} = \frac{t_1 p_2 - t_2 p_1}{p_1 \cdot p_2 \cdot E \cdot c(x)} \qquad [6]$$

en cuyo segundo miembro sólo figuran valores conocidos.

Integrando los dos miembros, designando por $F(x)$ la integral del segundo y por C' una constante, resulta:

$$\frac{dz_1}{dx} - \frac{dz_2}{dx} = F(x) + C'. \qquad [7]$$

Conviene llamar la atención, en que siendo $c(x)$ una función lineal o un radical cuadrático (ala elíptica), la integración y por tanto la función $F(x)$ se obtiene con suma facilidad.

Como el primer miembro de [7] representa la diferencia de los ángulos de giro de los largueros, y esta diferencia es nula en el empotramiento por serlo cada uno de ellos, la constante C se determinará por la condición

$$F(o) + C' = o.$$

Integrando nuevamente los dos miembros de [7], designando por $U(x)$ la integral del segundo y por C'' una constante, tendremos:

$$z_1 - z_2 = U(x) + C'' \qquad [8]$$

La diferencia de las ordenadas de las elásticas que representa el primer miembro, es nula en el empotramiento; la constante C'' se determinará en consecuencia por la condición

$$U(o) + C'' = o \qquad [9]$$

Conociendo por [8] la diferencia de las z, las ecuaciones [5] se transforman en

$$M_{t1} = K \cdot I_{p1} \cdot E_t \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{U(x) + C''}{e}\right)$$
$$M_{t2} = K \cdot I_{p2} \cdot E_t \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{U(x) + C''}{e}\right) \qquad [10]$$

y que representan la ley de variación de los momentos de torsión toda vez que en los segundos miembros sólo figuran valores conocidos.

Para obtenerlas se ha supuesto implícitamente que el número de montantes era infinito toda vez que a cada sección se le ha hecho girar lo correspondiente a su diferencia de ordenadas. Siendo por otra parte entre cada dos montantes el momento de torsión constante, el diagrama real será una poligonal en forma de escalera cuyos vértices coincidirán con la curva teórica.

Por la condición [9] se ve que para $x = o$ el momento de torsión es nulo. Este resultado, que a primera vista parece un poco extraño, tiene una una justificación sencilla. Basta fijarse que dos montantes consecutivos cualesquiera no sólo producen un momento de torsión constante en el trozo comprendido entre ellos, sino que por obligar a las secciones de los largueros en que se apoyan a tomar una posición determinada, impiden que la torsión existente en el resto del larguero se propague al trozo considerado. Como la torsión que producen los montantes es consecuencia de la diferencia de elásticas, y esta diferencia llega a ser nula para $x = o$, se comprende que no exista torsión en el empotramiento. En la realidad el momento de torsión será nulo entre el empotramiento y el primer montante.

Para obtener la variación de M_t puede combinarse la parte analítica con la gráfica obteniéndose su representación con gran facilidad. Se evita darle forma analítica a la variación de I_p, siendo suficiente multiplicar los valores que toma en unas cuantas secciones de los largueros calculados en primera aproximación, por $k \cdot E_t$ y por los que en las mismas secciones tome la expresión

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{U(x) + C''}{e}\right).$$

Para tener una idea de la variación de este momento hemos estudiado el caso más sencillo posible: ala rectangular de semienvergadura a, profundidad b, y distancia entre largueros constante e igual a g.

Puesto que el numerador del segundo miembro de la ecuación [6] es siempre constante, si a ese valor dividido por $E \cdot p_1 \cdot p_2$ lo designamos por C, la ecuación [7] se transforma teniendo presente que en este caso $c(x) = b =$ constante

$$\frac{dz_1}{dx} - \frac{dz_2}{dx} = \frac{C}{b}\, x + C'$$

y como, según hemos dicho, la diferencia de las derivadas debe ser nula en el empotramiento $(x = o)$, la constante C' será nula.

En este caso, por ser la distancia entre largueros $e = g =$ constante, no hace falta integrarla nuevamente para obtener la ecuación [8], porque de la [10] resulta para el larguero 2, por ejemplo:

$$M_{t2} = KE_t I_{p2}\, \frac{1}{e}\left(\frac{dz_1}{dx} - \frac{dz_2}{dx}\right).$$

Sustituyendo en ella la diferencia de las derivadas, queda, en definitiva:

$$M_{t2} = KE_t I_{p2}\, \frac{C}{g \cdot b} \cdot x.$$

La representación gráfica se obtendrá, figura 2, multiplicando por $k \cdot E_t \dfrac{C}{g \cdot b}$ las ordenadas de las ecuaciones

$$M'_{t2} = x$$
$$M''_{t2} = I_{p2}$$

La primera representa la bisectriz y la segunda la variación del momento de inercia polar. Se ve que la curva resultante tiene un máximo próximo a la intersección de las otras dos y que desde ese punto disminuye hacia los extremos.

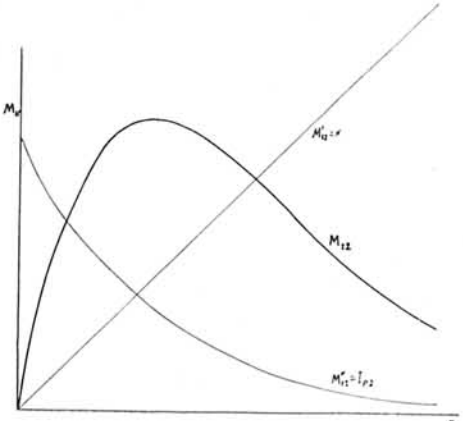

Fig. 2.

Volvamos de nuevo al problema general

de determinar el momento de flexión. Puesto que q_{t_1} y q_{t_2} son cargas continuas que se transmiten por los montantes a los largueros opuestos y deben producir en la sección x el momento de torsión ya conocido, tendremos para el caso teórico de infinitos montantes a que corresponde la ley M_t obtenida:

$$\begin{aligned} dM_{t_1} &= e \cdot q_{t_2} \cdot dx \\ dM_{t_2} &= e \cdot q_{t_1} \cdot dx \end{aligned} \qquad [11]$$

Teniendo presente [2] y [4], las relaciones anteriores pueden escribirse:

$$dM_{t_1} = e \left(q_2 - \frac{d_1\ M_{f_2}}{dx_2} \right) dx$$

$$dM_{t_2} = e \left(q_1 - \frac{d_2\ M_{f_1}}{dx_2} \right) dx$$

o bien:

$$\frac{d^2 M_{f_1}}{dx^2} = \frac{eq_1 - \dfrac{dM_{t_2}}{dx}}{e}$$

$$\frac{d^2 M_{f_2}}{dx^2} = \frac{eq_2 - \dfrac{dM_{t_1}}{dx}}{e} \qquad [12]$$

Integrando dos veces resulta:

$$M_{f_1} = \int \left[\int \left(\frac{eq_1 - \dfrac{dM_{t_2}}{dx}}{e} \right) dx \right] dx + C_1^{\text{III}} \cdot x + C_1^{\text{IV}}$$

$$M_{f_2} = \int \left[\int \left(\frac{eq_2 - \dfrac{dM_{t_1}}{dx}}{e} \right) dx \right] dx + C_2^{\text{III}} \cdot x + C_2^{\text{IV}} \qquad [13]$$

en las cuales las derivadas del momento de torsión se calcularán previamente por las fórmulas [10].

Siendo nulo el momento de flexión y el esfuerzo cortante en el extremo libre del ala, las constantes C^{III} y C^{IV} se hallarán por las condiciones

$$\left(M_f \right) x = l = o \qquad , \qquad \left(\frac{d\ M_f}{d\ x} \right) x = l = o$$

en las que l representa la semienvergadura.

Aunque la integración de las expresiones [13] se hace con relativa facilidad, por ser e y q en general ecuaciones lineales y la derivada del momento de torsión una función sencilla, puede procederse de un modo gráfico y obtener inmediatamente las nuevas leyes de cargas. Obsérvese que de [12] se deduce teniendo presente [4]:

$$q_{f_1} = q_1 - \frac{\dfrac{dM_{t_2}}{dx}}{e} \qquad , \qquad q_{f_2} = q_2 - \frac{\dfrac{dM_{t_1}}{dx}}{e}$$

cuyos segundos miembros pueden obtenerse gráficamente por ser conocido el momento de torsión. Una vez obtenida la representación de la ley de cargas el problema se terminará por los métodos corrientes.

Aun pueden hacerse algunas consideraciones sobre los valores de q_t que nos permitan encontrar resultados interesantes.

De las ecuaciones [11] se deduce

$$q_{t_1} = \frac{\dfrac{dM_{t_2}}{dx}}{e} \qquad , \qquad q_{t_2} = \frac{\dfrac{dM_{t_1}}{dx}}{e}$$

y, por tanto, como e es siempre positivo y el momento de torsión tiene un máximo, hay un cambio de signo en las cargas q_t, cambio que se verifica precisamente en la abscisa de dicho máximo.

En el caso a que se refiere la figura 1, la carga q_{t_1} es del mismo sentido que la q_1 desde el máximo de la torsión al extremo libre, y de sentidos contrarios desde dicho punto al empotramiento; como la carga q_{t_1} es absorbida por la torsión del larguero 2, tendremos para el 1 poniendo los signos de manifiesto:

Desde el extremo libre al máximo de la torsión:

$$q_{f_1} = q_1 - q_{t_1} \qquad [14]$$

Desde el máximo de la torsión al empotramiento:

$$q_{f_1} = q_1 + q_{t_1} \qquad [15]$$

Continuemos refiriéndonos al larguero 1. Al integrar la segunda de las ecuaciones [11] puede ponerse bajo la siguiente forma si designamos por C^{V} una constante

$$\int_x^l e \cdot q_{t_1}\, dx = - M_{t_2} + C^{\text{V}}.$$

El primer miembro es nulo para $x = l$; el valor de C^{V} será en consecuencia igual al que para $x = l$ tome la segunda de las ecuaciones [10].

En el empotramiento, siendo M_{t_2} nulo, tendremos:

$$\int_o^l eq_{t_1}\, dx = C^{\text{V}}. \qquad [16]$$

Si suponemos e constante, resulta de [16] que el «valor medio» de la carga q_{t_1} es igual al momento de torsión en el extremo libre del larguero 2 dividido por e. Como dicho momento es relativamente pequeño (véase fig. 2), puede decirse que

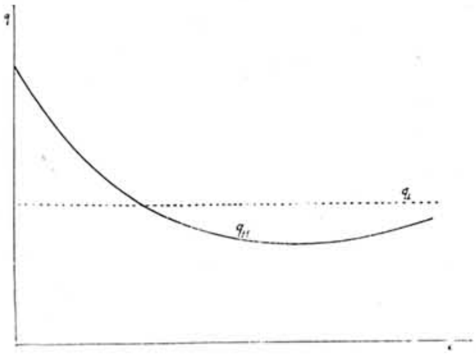

Fig. 3.

el valor medio de q_{t_1} es cero, y, por tanto, después de las relaciones [14] y [15], los montantes producen en el larguero más cargado el efecto de un desplazamiento de la carga hacia el empotramiento. Lo contrario ocurre en el otro larguero.

Por último, en la figura 3, para la misma ala en que hemos estudiado la torsión y refiriéndonos al larguero 1, se ha representado con línea llena la ley de cargas real y con línea de puntos la ley de cargas si no existiesen montantes y por la que se calcula generalmente.