

de donde se deduce integrando,

$$\frac{G}{G_0} = e^{-kt}$$

La propulsión del cohete vendrá expresada, igualmente, por la igualdad

$$\frac{P}{G_0} = \frac{kc}{g} \cdot e^{-kt}$$

Pero tampoco es utilizable esta hipótesis para los fines que se persiguen en la aerotecnia de los cohetes, ya que no es prácticamente posible lograr una trayectoria ascensional sobre la cual, con una aceleración constante del avión, no crezcan las fuerzas aerodinámicas más allá de los límites soportables, después de un tiempo cortísimo.

Mucho más real es suponer que la aceleración del avión y con ella la propulsión del cohete, sea una función tal del tiempo que, dentro de determinados límites sobre la trayectoria ascensional prevista, las fuerzas aerodinámicas, especialmente la sustentación del ala, se mantengan en una relación determinada con el peso del avión, o mejor aún, con las fuerzas que efectivamente actúan hacia abajo.

En lo que se refiere a la resistencia al avance del aire, se obtiene

$$\frac{R_x}{G_0} = \frac{\varepsilon c_z v^2}{c_{z0} v_0^2} \left(1 - \frac{h}{4 \times 10^5} \right)^{40}$$

en cuya fórmula ε es el coeficiente de planeo del avión dotado de motor de reacción.

La ecuación diferencial de la trayectoria ascensional se deducirá de las anteriores fórmulas por su doble integración; teniendo en cuenta todas las limitaciones parciales necesarias, se llegaría a la ecuación misma de la referida trayectoria, pero las dificultades de cálculo de dicha integración serían de tal importancia, y aun una vez superadas, las fórmulas resultantes serían tan poco manejables, que es preferible contentarse con la aproximación que nos proporcionan ciertas hipótesis, que bastan actualmente para nuestros fines.

Y para no cansar excesivamente la benévola y paciente atención de nuestros no menos hipotéticos y amables lectores, dejaremos por hoy estas cuestiones y reservaremos para trabajos sucesivos el desarrollo del estudio de la trayectoria ascendente de nuestro avión-cohete en los dos casos que hay que considerar, según se trate de las *infimas* velocidades subsonoras, o de las riquísimas en posibilidades velocidades superiores a las del sonido.

Autorrotación

Por RICARDO VALLE

Ingeniero Aeronáutico en A. I. S. A. y C. A. P. y Auxiliar en la E. S. A.

SUPONGAMOS un ala rectangular de profundidad l y envergadura $2b$ con un perfil cuyas características nos son conocidas: [$C_z = f_1(i)$ $C_x = f_2(i)$] y que puede girar alrededor de un eje que está contenido en el plano de simetría y es paralelo a la dirección del viento.

Llamaremos i_1 al ángulo de ataque del perfil central y

y el simétrico respecto al plano de la figura:

$$i_p = i_1 + \frac{\omega y}{V}$$

En ambos la velocidad relativa al viento es

$$\sqrt{V^2 + \omega^2 y^2}$$

por lo que el perfil que está delante producirá un momento respecto al eje de giro:

$$\begin{aligned} (V^2 + \omega^2 y^2) \frac{a}{2g} l dy \left(C_{za} \frac{V}{\sqrt{V^2 + \omega^2 y^2}} - C_{xa} \frac{\omega y}{\sqrt{V^2 + \omega^2 y^2}} \right) \cdot y = \\ = \frac{a}{2g} l y dy \sqrt{V^2 + \omega^2 y^2} (C_{za} V - C_{xa} \omega y) \end{aligned}$$

En la que

$$C_{za} = f_1 \left(i_1 - \frac{\omega y}{V} \right) \quad y \quad C_{xa} = f_2 \left(i_1 - \frac{\omega y}{V} \right)$$

De la misma manera, el perfil simétrico del que acabamos de considerar, producirá un momento:

$$\frac{a}{2g} l y dy \sqrt{V^2 + \omega^2 y^2} (C_{zp} V + C_{xp} \omega y)$$

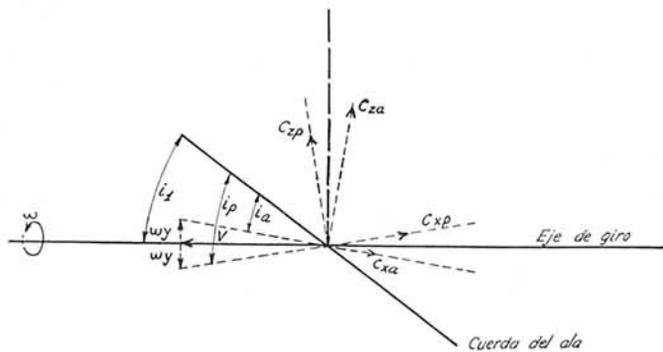


Fig. 1

supongamos que por cualquier procedimiento se ha animado al ala a girar con velocidad angular ω .

El perfil que está a una distancia y delante del plano de la figura, tendrá un ángulo de ataque

$$i_a = i_1 - \frac{\omega y}{V}$$

El momento ejercido por las fuerzas aerodinámicas en toda el ala y en el sentido de la rotación es:

$$M = \int_0^b \frac{a}{2g} l \cdot y \cdot dy \cdot \sqrt{V^2 + \omega^2 y^2} [V(C_{za} - C_{zp}) - \omega y(C_{xa} + C_{xp})]$$

Si este momento es positivo, el ala aumentará su velocidad de rotación hasta llegar a un límite ω , en que $M=0$, pero si el momento es negativo, el ala disminuirá su velocidad angular hasta llegar a una determinada que anula al momento y que puede o no ser cero.

De todas maneras, lo que verdaderamente interesa es el signo de

$$\frac{\partial M}{\partial \omega}$$

cuando ω tiende a cero, pues si esta derivada es positiva, quiere decir que el ala entrará en rotación espontáneamente a la menor perturbación. Es decir, la condición de autorrotación es:

$$\frac{\partial M}{\partial \omega} > 0 \quad (\omega \rightarrow 0)$$

Nosotros hemos obtenido M por una integral definida, en que ni los límites ni la variable dependen de ω ; por lo tanto, podemos derivar bajo el signo integral y tendremos:

$$\frac{\partial M}{\partial \omega} = \frac{a}{2g} l \int_0^b y dy \left[\frac{\omega y^2}{\sqrt{V^2 + \omega^2 y^2}} \left(V(C_{za} - C_{zp}) - \omega y(C_{xa} + C_{xp}) \right) + \sqrt{V^2 + \omega^2 y^2} \left(V \left(\frac{\partial C_{za}}{\partial \omega} - \frac{\partial C_{zp}}{\partial \omega} \right) - \left(y(C_{xa} + C_{xp}) + \omega y \frac{\partial C_{xa} + C_{xp}}{\partial \omega} \right) \right) \right]$$

Cuando ω tiende a cero, tendremos:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_{\omega \rightarrow 0} = \frac{a}{2g} l \int_0^b y dy V \left[V \left(\frac{\partial C_{za}}{\partial \omega} - \frac{\partial C_{zp}}{\partial \omega} \right) - y(C_{xa} + C_{xp}) \right]$$

Ahora:

$$\frac{\partial C_{za}}{\partial \omega} = \frac{\partial C_{za}}{\partial i_a} \cdot \frac{\partial i_a}{\partial \omega} = -f'_1(i_a) \frac{y}{V}$$

$$\frac{\partial C_{zp}}{\partial \omega} = \frac{\partial C_{zp}}{\partial i_p} \cdot \frac{\partial i_p}{\partial \omega} = f'_1(i_p) \frac{y}{V}$$

y como cuando ω tiende a cero

$$f'_1(i_a) = f'_1(i_p) = f'_1(i_1)$$

y

$$C_{xa} = C_{xp} = f_2(i_1)$$

tendremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_{\omega \rightarrow 0} &= \frac{a}{2g} l \int_0^b y dy V \left[V \cdot \left(-2f'_1(i_1) \frac{y}{V} \right) - 2yf_2(i_1) \right] = \\ &= -\frac{a}{g} l V [f'_1(i_1) + f_2(i_1)] \int_0^b y^2 dy = \\ &= -\frac{a}{3} V l b^3 [f'_1(i_1) + f_2(i_1)]. \end{aligned}$$

La condición para que exista la autorrotación será:

$$f'_1(i_1) + f_2(i_1) < 0,$$

o sea:

$$\frac{dC_z}{di} + C_x < 0 \quad \text{para } i = i_1.$$

Esto se puede escribir también:

$$\frac{\partial}{\partial i} [C_z + (i - i_1) C_x] < 0 \quad \text{para } i = i_1.$$

Elegido, pues, un ángulo de ataque i_1 , la autorrotación se realizará si la función $C_z + (i - i_1) C_x$ es decreciente en el punto $i = i_1$.

Supongamos ahora que el ala tiene un alabeo tal, que las cuerdas de los perfiles extremos forman un ángulo δ con la cuerda del perfil central, y que el ángulo de alabeo en un perfil cualquiera es proporcional a su distancia y al plano de simetría que contiene el perfil central.

Entonces:

$$i_a = i_1 - \frac{\delta}{b} y - \frac{\omega y}{V}$$

$$i_p = i_1 - \frac{\delta}{b} y + \frac{\omega y}{V}$$

$$f'_1(i_a) = f'_1(i_p) = f'_1 \left(i_1 - \frac{\delta}{b} y \right) \quad (\omega \rightarrow 0)$$

$$C_{xa} = C_{xp} = f_2 \left(i_1 - \frac{\delta}{b} y \right)$$

y

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_{\omega \rightarrow 0} = -\frac{a}{g} l V \int_0^b \left[f'_1 \left(i_1 - \frac{\delta}{b} y \right) + f_2 \left(i_1 - \frac{\delta}{b} y \right) \right] y^2 dy.$$

Si hacemos el cambio de variable:

$$z = \frac{\delta}{b} y$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \omega} \right)_{\omega \rightarrow 0} = -\frac{a}{g} l V \left(\frac{b}{\delta} \right)^3 \int_0^{\delta} [f'_1(i_1 - z) + f_2(i_1 - z)] z^2 dz.$$

La condición para que no exista autorrotación será:

$$\int_0^{\delta} [f'_1(i_1 - z) + f_2(i_1 - z)] z^2 dz > 0.$$

Veamos ahora la significación de esta integral.

Nosotros poseemos las curvas $C_z = f_1(i)$ y $C_x = f_2(i)$ de la figura 2. Con ellas podemos construir una nueva curva en la que las abscisas sigan representando los ángulos de ataque y las ordenadas las sumas algébricas de AB y la tangente del ángulo $T.MH$, siendo MT la tangente en M a la curva C_z y MH paralela al eje de los ángulos. Esta curva, que está representada en la figura 3, es evidentemente la representación gráfica de la función:

$$\frac{dc_z}{di} + c_x.$$

Si señalamos el punto A correspondiente a $i = i_1$ y llevamos de A hacia la izquierda $AB = \delta$, si AC es z , CD será $f'_1(i_1 - z) + f_2(i_1 - z)$ y la integral que nos ocupa es precisamente el momento de inercia de la superficie rayada respecto al eje PP que pasa por $i = i_1$. Luego si

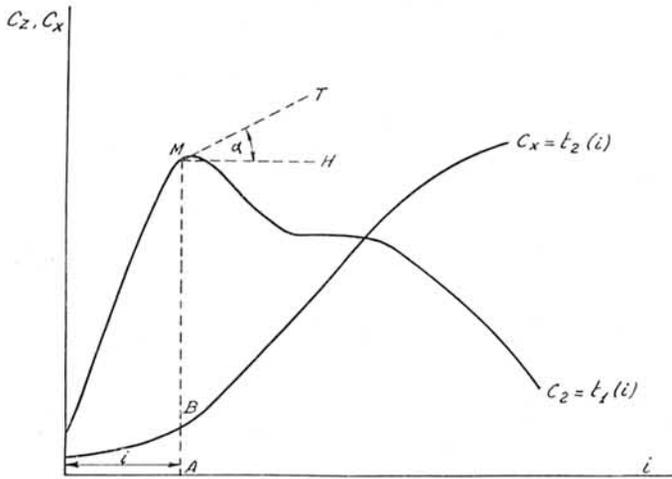


Fig. 2

este momento es positivo no hay autorrotación y ocurrirá lo contrario en el caso de que el momento de inercia sea negativo.

Según lo que hemos visto, en el caso de que no exista alabeo, la autorrotación se producía cuando

$$\frac{dc_z}{di} + c_x < 0,$$

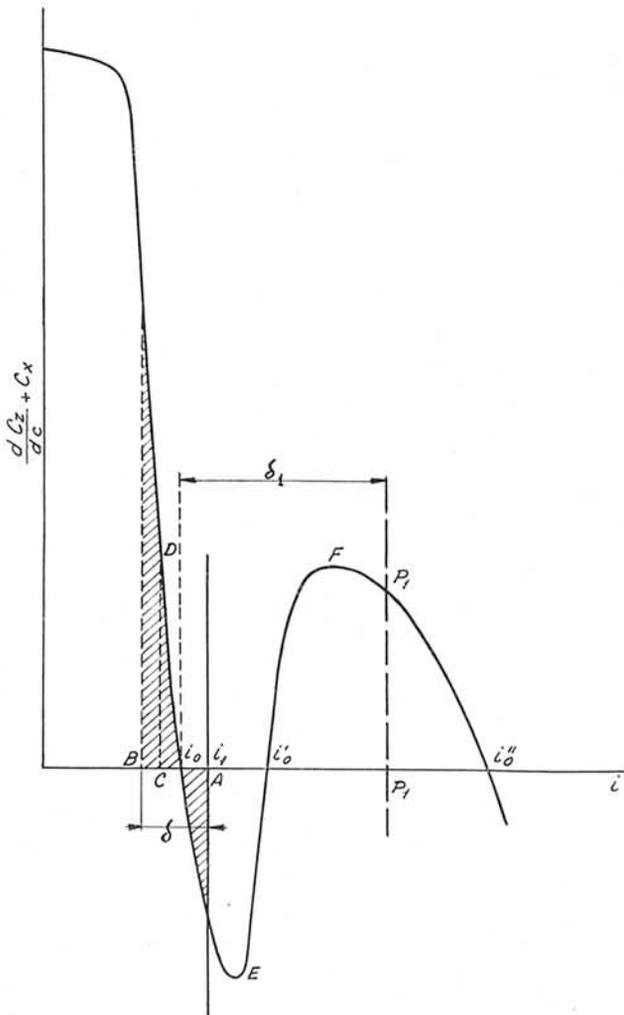


Fig. 3

es decir, como se ve en la figura 3, cuando i está comprendido entre i_0 e i'_0 o cuando es mayor que i''_0 .

Ahora, con un alabeo, que definimos por δ , es evidente que se puede pasar del ángulo de ataque i_0 sin que se presente la autorrotación.

Resulta de lo expuesto que el alabeo δ_1 , que es capaz de hacer desaparecer la autorrotación, es fácilmente calculable gráficamente, pues bastaría determinar el eje $P_1 P_1$ respecto al cual el momento de inercia del área $i_0 E i'_0 F P_1 P_1$ es nulo o positivo. En general, la supresión de la autorrotación por el alabeo, exigirá un δ , inadmisibles por su valor excesivamente grande, pero el retrasar la aparición puede conseguirse bien con alabeos de valor aceptable.

Es de observar la gran importancia que tiene el valor de la diferencia $i'_0 - i_0$ que puede calificar a los perfiles, junta con i_0 en lo que se refiere a autorrotación.

Veamos ahora el efecto de las ranuras «Handley Page» en la autorrotación.

Supongamos que el ala tiene según muestra la figura 4 ranuras en una longitud c en sus extremos

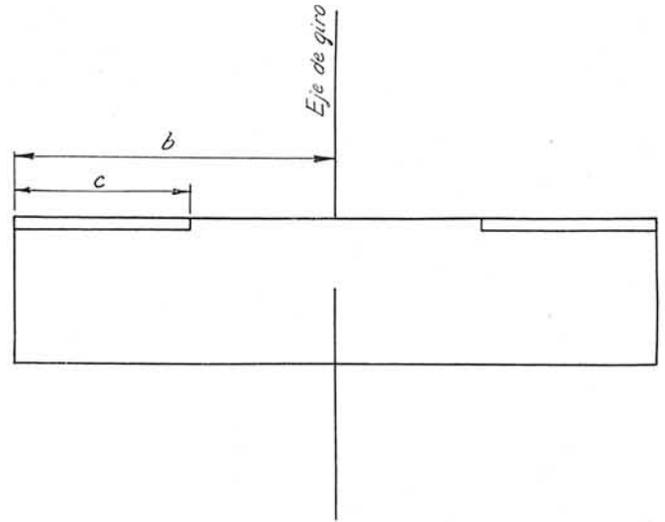


Fig. 4

El perfil con ranura tiene nuevas características conocidas y que llamamos

$$C_z = F_1(i) \quad C_x = F_2(i).$$

El momento producido entonces por las fuerzas aerodinámicas en el sentido de la rotación es:

$$M = \int_0^{b-c} \frac{a}{2g} l \cdot y dy \sqrt{V^2 + \omega^2 y^2} [V(f_1(i_a) - f_1(i_p)) - \omega y (f_2(i_a) + f_2(i_p))] + \int_{b-c}^b \frac{a}{2g} l y dy \sqrt{V^2 + \omega^2 y^2} [V(F_1(i_a) - F_1(i_p)) - \omega y (F_2(i_a) + F_2(i_p))]$$

y

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \omega}\right)_{\omega \rightarrow 0} = -\frac{\alpha}{g} l V \left[(f'_1(i_1) + f_2(i_1)) \int_0^{b-c} y^2 dy + (F'_1(i_1) + F_2(i_1)) \int_{b-c}^b y^2 dy \right] = -\frac{\alpha}{g} \frac{l V}{3} \left[(f'_1(i_1) + f_2(i_1)) + (F'_1(i_1) + F_2(i_1)) \left(\left(\frac{b}{b-c}\right)^3 - 1 \right) \right] (b-c)^3$$

La condición de autorrotación es:

$$f'_1(i_1) + f_2(i_1) + [F'_1(i_1) + F_2(i_1)] \left[\left(\frac{b}{b-c}\right)^3 - 1 \right] < 0.$$

Dibujada la curva de la figura 3, dibujemos en los mismos ejes y por el mismo procedimiento la gráfica de la función.

La autorrotación no se producirá hasta un ángulo de ataque i_1 tal que

$$i_1 A \cdot \left[\left(\frac{b}{b-c}\right)^3 - 1 \right] + i_1 B < 0.$$

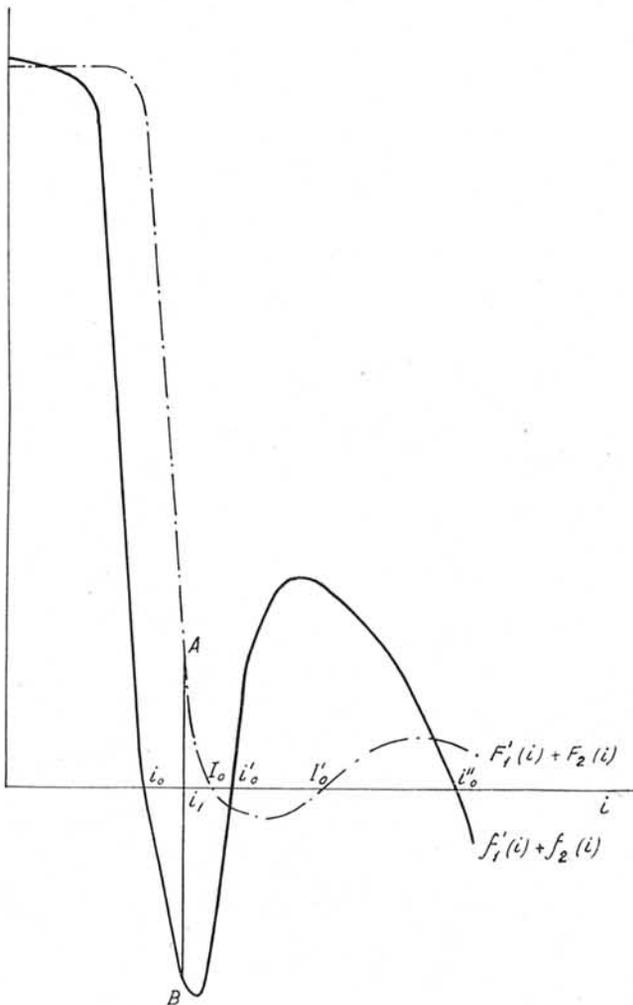


Fig. 5

Como el factor

$$\left(\frac{b}{b-c}\right)^3 - 1$$

varía desde 0 cuando $c=0$ hasta ∞ , cuando $c=b$ la autorrotación puede retrasarse hasta $i_1 = I_0$.

Si se desea calcular la longitud c de ranura para retrasar la autorrotación hasta un ángulo i_1 dado (menor que I_0), bastará despejar c de la ecuación:

$$i_1 A \left[\left(\frac{b}{b-c}\right)^3 - 1 \right] + i_1 B = 0$$

y resulta

$$c = b \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{-i_1 B}{i_1 A} + 1}} \right)$$

Puede ocurrir que la gráfica de $F'_1(i) + F_2(i)$ no encontrarse al eje de las i . Entonces podemos buscar la

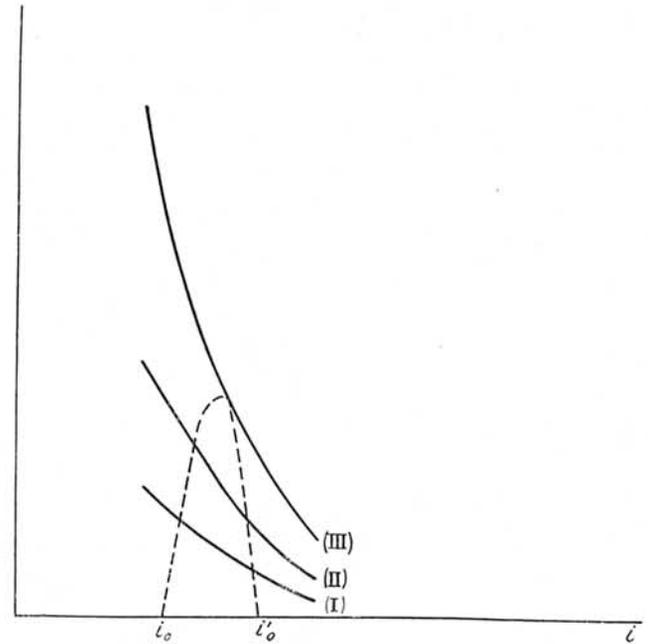


Fig. 6

longitud mínima de ranura capaz de hacer desaparecer la autorrotación.

Esto puede resolverse como se indica en la figura 6, en la que la curva de puntos es la simétrica respecto al eje i de la parte de la curva de la figura 3 que está por debajo de dicho eje y las curvas (I) (II) (III) son las que resultan de multiplicar las ordenadas de $F'_1(i) + F_2(i)$ por diversos factores $1 \cdot m, n$. Si n es el factor de la curva tangente, la longitud pedida se despeja de

$$\left(\frac{b}{b-c}\right)^3 - 1 = n$$

y resulta

$$c = b \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{1+n}} \right).$$