Aerotecnia

VIBRACIONES EN LAS ESTRUCTURAS

Aplicación práctica para el cálculo de los fuselajes

Por ULTANO KINDELÁN

Alumno del curso de Aeronaves de la E. S. A., y especialista en Aeromotores

De todos es sabido, y por lo tanto no es ocasión de repetirlo aquí, la disminución que el coeficiente de trabajo de un material puede experimentar cuando se le somete a los esfuerzos alternativos que producen las vibraciones, y las consecuencias funestas que se presentan en el caso de existir resonancia. Únicamente queremos hacer notar que estos efectos se producen, no solamente en las piezas simples de los materiales, sino también en la unión o conjunto de varias de estas piezas elementales, es decir, en las estructuras.

Nosotros vamos a estudiar solamente, por ahora, el problema de las vibraciones de flexión, haciendo aplicación de la teoría a un ejemplo que puede referirse inmediatamente al cálculo de las caras verticales de la parte posterior de un fuselaje. Pero antes de entrar en el estudio de este problema, recordaremos los fundamentos del «Método de la energía» o *Método de Rayleigh*, que es el que en el estudio de dicho problema se ha seguido. Recordaremos también antes, que la forma de la vibración natural es la elástica de la estructura, y que el período de la vibración forzada es el de la causa que lo produce.

El método antes citado está basado en la consideración de que el trabajo de las fuerzas exteriores, considerando los pesos propios de los elementos incluídos en dichas fuerzas, es igual a la suma de las energías cinéticas y de deformación. Es decir, que

$$A = V - T.$$

En la práctica, el cálculo de los elementos V y T, es decir, de las energías de deformación y energías cinéticas de todas las barras, considerando el sistema exterior en toda su amplitud, sería de una dificultad casi insuperable, puesto que habría que considerar una a una las fuerzas del sistema exterior y sumar los resultados para hallar las V y T totales. Se soslaya esta dificultad suponiendo que todo el sistema exterior se sustituya por una fuerza única ficticia aplicada en un nudo, y que produce en la estructura un modo de vibrar análogo al producido por el sistema de fuerzas reales.

La fórmula que condensa los resultados que se obtienen siguiendo este procedimiento operativo, es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sum_{1}^{T} S^2 r}{\sum_{1}^{n} W\delta^2}}$$

en donde:

f = frecuencia de la vibración.
g = aceleración de la gravedad.
S = esfuerzos producidos en las barras por la fuerza ficticia.
W = cargas reales en cada nudo.
δ = corrimientos unitarios en cada nudo, producidos por la carga ficticia. (Es decir, $R = 1$.)

Vemos, pues, que la primera cuestión que se presenta al resolver un problema del tipo del que nos ocupa es la determinación de la carga ficticia, análoga en sus efectos dinámicos al sistema de cargas reales. Esta determinación se consigue fácilmente por el método de aproximaciones sucesivas de Polhausen, método que no explicamos aquí, no sólo por no extendernos demasiado en nuestro estudio, sino también porque la resolución del problema que vamos a enunciar no exige que hagamos referencia a él. Este problema es el siguiente:

«Estudiar la vibración natural de la estructura representada en la figura 1, cargada con la fuerza $R = 300$ kilogramos en ella representada.»

Como cuestión previa, diremos que en el cálculo de los esfuerzos S se ha prescindido de las cargas que se obtendrían considerando los pesos de las barras repartidas sobre los nudos, ya que dichas cargas son despreciables con relación a la fuerza actuante.

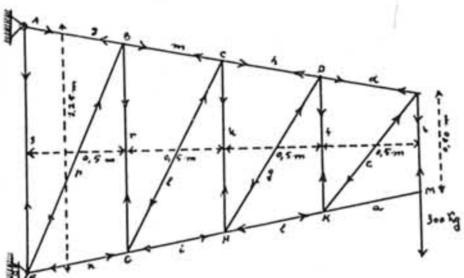

Fig. 1.

Para su resolución, empezaremos primero calculando los esfuerzos en las diferentes barras bajo la carga $R = 1$ kilogramo. Estos esfuerzos, para cuya determinación hemos seguido el método Cremona, son los siguientes:

Barras	Compresión	Extensión
a	0	0
b		1
c	1,13	
d		0,75
e	0,75	
f		0,73
g	0,765	
h		1,18
i	1,18	

Barras	Compresión	Extensión
k		0,6
l	0,65	
m		1,47
n	1,47	
r		0,47
p	0,48	
q		1,67
s		0,68

$$R' = 1{,}6 \text{ kgs.} \qquad R = 1{,}93 \text{ kgs.}$$

Dimensiones de las barras. — Para calcular los corrimientos nos son necesarias las deformaciones específicas de las barras, y antes de calcular éstas calcularemos las secciones transversales de aquéllas.

Teniendo en cuenta los datos, las longitudes de las barras son las siguientes:

Verticales	Diagonales	Cordones
1,25 m.	1,25 m.	Todas = 0,5 m.
1,06 »	1,08 »	
0,88 »	0,92 »	
0,685 »	0,77 »	
0,5 »		

Si suponemos que el material empleado es el acero de coeficiente de trabajo 10 kilogramos por milímetro cuadrado, tendremos que la sección de la barra s, que es la que soporta un mayor esfuerzo de compresión de todas las del cordón inferior, será:

$$s = \frac{450}{10} = 45 \text{ mm}^2.$$

(Considerando ahora $R = 300$ kilogramos.)

Comprobemos a pandeo esta barra.

Supondremos que su sección transversal es una corona circular de $s = 0{,}5$ centímetros cuadrados.

Calcularemos la esbeltez por la fórmula

$$\lambda = \frac{I}{i}$$

que con

$$R = 1 \text{ cm. y } r = 0{,}9 \text{ cm.},$$

nos da:

$$\lambda = \frac{3.500}{110} > 100.$$

Luego podremos aplicar la fórmula de Euler, para calcular la carga crítica. Esta carga es:

$$R_c = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

es decir

$$\frac{R_c}{R} = 25,$$

con lo cual el coeficiente de pandeo nos proporciona una seguridad absoluta a este respecto.

Puesto que todas las diagonales trabajan en condiciones casi análogas, haremos la comprobación a pandeo en una sola de ellas, viendo después de hecho el cálculo que tampoco hay peligro de pandeo para estas barras.

Después de esto, las secciones serán de 0,5 centímetros cuadrados en el cordón inferior, de 0,2 centímetros cuadrados en las diagonales, y las siguientes en las verticales:

$$S = 20{,}4 \text{ mm}^2; \quad r = 14{,}1 \text{ mm}^2; \quad K = 18 \text{ mm}^2; \quad f = 21{,}5 \text{ mm}^2$$
$$6 = 35 \text{ mm}^2.$$

Una vez hecho esto, ya podemos calcular las deformaciones específicas de las barras por medio de la siguiente fórmula: ($R = 1$).

$$r = \frac{1}{Es^2}\ 1.$$

En los cordones:

$$r = 0{,}0004 \text{ mm.}$$

En las verticales:

$$s = 0{,}00298; \quad r = 0{,}00257; \quad k = 0{,}0021; \quad f = 0{,}00163;$$
$$b = 0{,}0004.$$

En las diagonales:

$$p = 0{,}00298; \quad l = 0{,}00257; \quad g = 0{,}00219; \quad c = 0{,}00185.$$

Cálculo de los corrimientos. — Para hallar los corrimientos puede seguirse el método del diagrama de Villiot, o bien el de la *poligonación de Müller-Breslau.* Pero este método, que en teoría tiene la misma inexactitud del de Villiot (sustitución de arco por seno), presenta en la práctica el inconveniente sobre aquél de que exige el conocimiento de los ángulos que los diferentes elementos de la estructura forman entre sí, ángulos que solamente pueden medirse por métodos manuales, comprendiéndose fácilmente que su determinación es causa de nuevos errores que añadir al anteriormente indicado. Por esta razón creemos que el procedimiento más adecuado para hallar los corrimientos es el diagrama de Villiot, teniendo la precaución de comprobar el corrimiento vertical del último nudo por el método de Maxwell-Mohr.

Sin embargo, en los casos en que interese particularmente conocer la forma de la vibración (elástica), puede emplearse el método de Müller-Breslau, que nos proporciona ésta directamente.

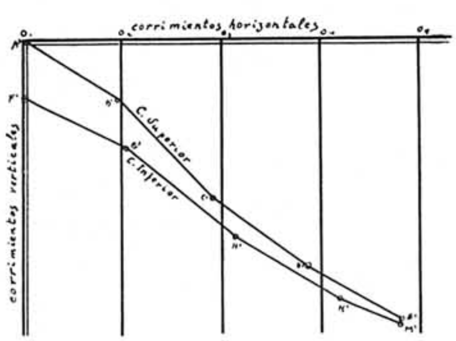

Fig. 2.
Escala de corrimientos: 1 mm <> 4/10⁴ mm

En la figura 3 están representados gráficamente los corrimientos totales siguiendo el método gráfico de Villiot. En la figura 2 están representadas las elásticas de los dos cordones, curvas que referidas a los ejes y orígenes que se aprecian en la figura nos dan los corrimientos verticales y horizontales de cada nudo. Por este método el corrimiento vertical del nudo M es de:

$$\delta_v = 0{,}01475 \text{ mm.}$$

Es evidente que si por cualquier método comprobamos ahora este corrimiento del último nudo y obtenemos que el valor hallado es el verdadero, con mayor razón lo serán los corrimientos encontrados para los nudos anteriores. Como antes dijimos, seguiremos para esta comprobación el método de Mohr, que da el corrimiento de un nudo en la dirección de una fuerza en él aplicada. Este corrimiento viene dado por la siguiente fórmula:

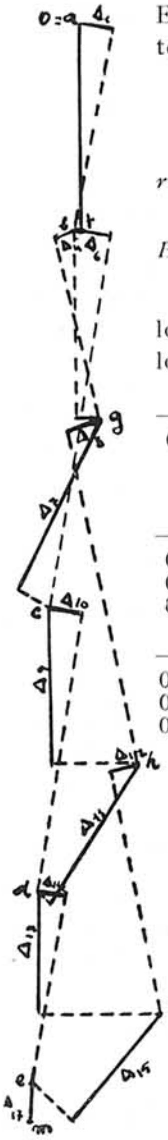

Fig. 3.
Escala: 1 mm 1/10⁴ mm

$$Z = \sum_{a}^{m} B^2\, r.$$

En la cual:

r = deformaciones específicas en cada barra ($R = 1$)

B = esfuerzos en las barras bajo la fuerza $R = 1$

El procedimiento de ordenación de cálculo seguido para la obtención de cada uno de los productos $B^2 r$ es el siguiente:

a	*b*	*c*	*d*	*e*
0,0004	0,0004	0,00018	0,0004	0,0004
0	1	1,27	0,56	0,56
0	0,0004	0,00022	0,00022	0,0002

g	*h*	*f*	*i*	*k*
0,0022	0,0004	0,00163	0,0004	0,00210
0,58		0,53	1,39	0,36
0,0012	0,00055	0,000863	0,000863	0,00075

l	*m*	*n*	*r*	*p*
0,0025	0,0004	0,0004	0,00257	0,00298
0,42	2,15	2,15	0,22	0,23
0,00107	0,00086	0,00086	0,563	0,000685

q	*s*
0,0004	0,00298
2,76	0,46
0,001062	0,00137

donde a, b, c, etc., representan las barras correspondientes en la estructura; representando los tres renglones que tienen debajo las siguientes cantidades:

Primer renglón: Deformaciones específicas (r).

Segundo renglón: Cuadrados de los esfuerzos (B^2).

Tercer renglón: Productos ($B^2\, r$).

Por tanto, hallando la suma de los últimos renglones de cada letra obtenemos:

$$\sum B^2 r = 0{,}013274$$

para valor del corrimiento vertical del último nudo. Y como con el diagrama hemos obtenido para este mismo valor la cantidad

$$\delta_v = 0{,}01475 \text{ milímetros,}$$

se ve que los valores de los corrimientos hallados por este procedimiento son lo suficientemente exactos para que se puedan tomar como buenos.

Una vez que se conocen los corrimientos, podremos ya calcular las energías cinética y de deformación, que son las que en definitiva nos resuelven nuestro problema.

Cálculo de $\frac{1}{2} \sum S^2 r = U$. — Puesto que S son los esfuerzos en las barras bajo la fuerza única $R = 300$ kilogramos, U será los $\frac{90.000}{2}$ de la suma $\sum R^2 r$ anteriormente hallada.

Es decir:

$$U = 5.970.$$

Cálculo de $\frac{1}{2} \sum W \delta^2$ (δ son los corrimientos totales). — Primeramente tendremos que calcular los pesos de las barras para repartirlos en los nudos correspondientes, puesto que W son las cargas totales exteriores en los nudos teniendo en cuenta los pesos correspondientes a las barras que concurren en dichos nudos. Suponiendo que el material empleado es el acero, tendremos los siguientes pesos:

Cordones:

Todas las barras 183 gramos.

Verticales:

$s = 1.800$ gramos; $r = 1.060$; $k = 1.140$; $f = 1.050$; $b = 1.216$.

Diagonales:

$p = 1.800$ gramos; $l = 1.500$; $g = 1.325$; $o = 1.110$.

Después de esto podemos establecer, procediendo de un modo análogo a lo hecho con las barras, el siguiente cuadro:

A	*B*	*C*	*D*	*E*
0	0,717	1,507	1,380	1,203
0	0,87	1,550	3,51	4,29
0	0,77	2,36	12,9	20,02
0	0,55	3,56	17,8	24,06

F	*G*	*H*	*K*	*M*
1,525	1,464	1,425	1,267	300,7
0,84	1,08	3	3,905	4,44
0,7	1,13	9	15,9	20,6
0,3675	1,655	11,825	20	631,00

En donde A, B, C, etc., representan los diferentes nudos. En los primeros renglones se hallan escritos las (W).

En el segundo los corrimientos (δ).

En el tercero los cuadrados de dichos corrimientos (δ^2).

Y en el último los productos ($W\delta^2$).

Sumando las cantidades escritas en los últimos renglones tendremos:

$$\frac{1}{2} \sum W \delta^2 = 3.194.$$

Luego, la frecuencia de la vibración natural buscada será, aplicando la fórmula dada anteriormente:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9810 \times 5970}{3194 \text{ seg.}^2}} = 21{,}2 \text{ períodos/segundo.}$$

o lo que es lo mismo:

$$f = 1.272 \text{ períodos por minuto.}$$

Obras consultadas: *Mecánica elástica* (Cubillo). — *Estática Gráfica* (Henkel).