

Aerotecnia

CONTRIBUCIÓN AL CALCULO DE LARGUEROS

Estabilidad elástica. - Diagrama de Howard. - Teorema de los tres momentos compuestos

Por JOSÉ CUBILLO FLUITERS

Teniente coronel de Aviación, Ingeniero militar y geógrafo, Profesor de Mecánica Elástica aplicada en la Escuela Superior Aerotécnica

Exposición del tema

EN la ingeniería aeronáutica se presentan problemas de una gran delicadeza; que no es que dejen de presentarse en las otras actividades de la profesión de ingeniero, sino que, en éstas, muchas veces pueden eludirse con soluciones aproximadas sin que, por ello, resulten graves consecuencias en el orden económico y menos en el exclusivamente técnico; mientras que en aquella ingeniería, no caben esas soluciones y es preciso acometer las cuestiones con toda la dificultad que lleven consigo, siendo una prueba de esta modalidad el cálculo de los largueros de ala, a cuya cuestión se va a aportar, en este trabajo, algunos esclarecimientos.

Si se considera el caso de un larguero atirantado por uno o dos brazos, no puede mirarse como viga simplemente sometida a carga transversal; es preciso atender a la carga longitudinal producida por el efecto de los tirantes (en vuelo), lo que no puede hacerse teniendo en cuenta tan sólo el efecto de compresión simple producido, sino que hay que considerar la cuestión de *estabilidad elástica* que se presenta, que hace modificar esencialmente los resultados que se obtuviesen aplicando la teoría clásica de la flexión.

Nos referimos a las cargas críticas de Euler-Lagrange que producen la ruina de la construcción, mucho antes de que los esfuerzos puedan llegar al límite de *fluencia* del material, por determinar en éste un período de grandes deformaciones de *pandeo*.

Sin llegar a desarrollar la teoría de la estabilidad elástica, que no tiene cabida en este momento, se van a recordar únicamente sus consecuencias fundamentales, principalmente en aquello que sea básico para el debido conocimiento de la cuestión que constituye el tema de este artículo.

Estabilidad elástica y su aplicación a las vigas

Si una pieza o conjunto de ellas (estructura) están sometidas a ciertas acciones, aparecen fuerzas elásticas que las equilibran con arreglo a los principios de la Mecánica de los cuerpos rígidos, es decir, en la suposición de que los cuerpos materiales son suficientemente rígidos para que el modo de acción de las fuerzas exteriores sea el mismo que sobre un cuerpo ideal perfectamente invariable de forma; pero si las deformaciones no son tan pequeñas

para poder hacer esa suposición y la existencia de tales deformaciones modifica el modo de acción de las fuerzas exteriores, entonces ya no pueden aplicarse esos principios y aparecen nuevas modalidades de la resistencia de los cuerpos.

Tal ocurre con una pieza comprimida y flexada en la que la deformación producida por la flexión hace que el efecto de la fuerza axial no sea simplemente una compresión, sino además *otra flexión* de momento variable e

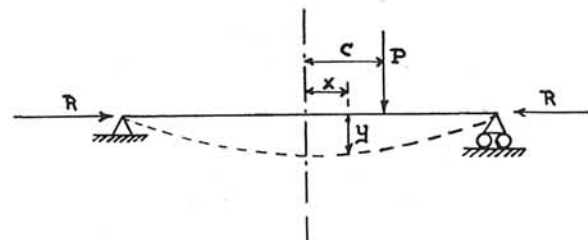


Figura 1.

igual a Ry , si es R la fuerza e y la ordenada de la elástica en un punto (fig. 1).

Entonces, si la sollicitación transversal es, por ejemplo, debida a una carga uniforme q_0 por metro lineal (fig. 2),



Figura 2.

el momento de flexión vale, tomando por origen de coordenadas el punto medio de la viga:

$$M = \frac{l^2 q_0^2}{u^2} \left(\frac{\cos \frac{u}{l} x}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right) \quad [1]$$

siendo u la cantidad numérica

$$u = l \sqrt{\frac{K}{EI}} \quad [2]$$

llamada por Bleich *masa lábil*, ya que es el índice de la *labilidad* o inestabilidad del equilibrio elástico.

En el caso, interesante para largueros de ala, de que la carga, en vez de ser continua, esté aplicada con distribu-

ción uniforme en puntos equidistantes la cantidad λ , figura 3 (costillas), se modifica la expresión anterior en esta forma:

$$M = \frac{l^2 q_0^2}{u^2} \left(\frac{\cos \frac{u}{l} x}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right) \frac{u}{2n} \operatorname{tg} \frac{u}{2n}, \quad [8]$$

siendo n el número de divisiones de la pieza, es decir, $\frac{u}{n}$ la *masa lábil* de los intervalos λ , viéndose que si u es de pequeño valor por ser $\operatorname{tg} \frac{u}{2n} = \frac{u}{2n}$, el momento es sensiblemente el mismo que para caso de carga uniformemente repartida. En cambio, para cargas próximas a la

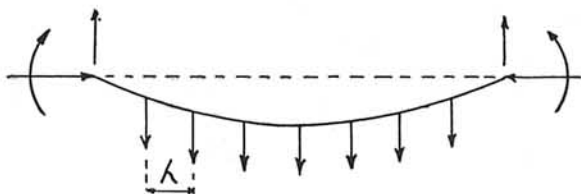


Figura 3.

de rotura, la diferencia entre los valores del momento puede llegar a ser muy importante.

Resulta, por lo tanto, de gran importancia hacer el estudio del material bajo los diferentes estados de carga posible, porque, según se va a ver en seguida, no obedece a la ley de Hooke en estas clases de sollicitaciones y, sobre todo, que la ruptura puede ser debida al *efecto de pandeo*, aun mucho antes de haber podido alcanzarse el período de fluencia del material.

En el caso antes citado (fig. 2), la flecha tiene por expresión:

$$\delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_0 l^4}{EI} \cdot \frac{\sec \frac{u}{2} - 1 - \frac{1}{8} u^2}{\frac{5}{384} \cdot u^4} \quad [4]$$

con la corrección respecto a la flecha de simple flexión, representada por el factor transcendente que se indica, cuyo factor, si la masa lábil u adquiere el valor $u = \pi$, se hace *infinitamente* grande, representando deformaciones que crecen más allá de todo límite, lo cual ocurre para la carga deducida de la igualdad:

$$l \sqrt{\frac{R_c}{EI}} = \pi, \quad [5]$$

es decir,

$$R_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad [6]$$

que es la conocida carga crítica de Euler, cuyo resultado justifica la denominación dada a u .

Es notable la circunstancia de que, en función de la masa lábil, el coeficiente de seguridad, respecto a la carga crítica o *coeficiente de Euler*, es:

$$\nu = \frac{\pi^2}{u^2}, \quad [7]$$

cuyo coeficiente sustituye al ordinario en las sollicitaciones de extensión o compresión simples.

La expresión [4] hace ver claramente cómo la deformación deja ahora de ser proporcional a la carga, puesto que la masa lábil u contiene la carga longitudinal.

En el caso de sollicitación de que se va tratando, los ángulos de rotación de las secciones extremas de la pieza son de la forma

$$\varphi_i = \frac{q_0 l^3}{EI} \varphi^i(q_0) \quad \text{y} \quad \varphi_d = \frac{q_0 l^3}{EI} \varphi^d(q_0), \quad [8]$$

siendo las funciones $\varphi^i(q_0)$ y $\varphi^d(q_0)$ dependientes de la masa lábil u , que, a su vez, depende de la *carga* longitudinal, de la *forma* de la pieza y de la *elasticidad* del material, pero no de su resistencia, y la consideración de que ésta no es ilimitada y de que el material tiene un período elástico limitado, da lugar a uno de los problemas de mayor dificultad de la mecánica elástica, cuando se hace el estudio general de la estabilidad de forma de un material.

Las funciones señaladas son ahora:

$$\varphi(q_0) = \pm \frac{1}{u^3} \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right) \quad [9],$$

correspondiendo el signo superior a φ^i y el inferior a φ^d .

Las expresiones generales de φ^i y φ^d para el caso de sollicitación transversal producida por cargas *repartidas*, *aisladas* y *momentos* aplicados a la distancia c del punto medio de la pieza, son:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \sum \frac{q_n l^3}{EI} \varphi^i(q_n) + \sum \frac{P_c l^2}{EI} \varphi^i(P_c) + \sum \frac{M_c l}{EI} \varphi^i(M_c) \\ \varphi_d &= \sum \frac{q_n l^3}{EI} \varphi^d(q_n) + \sum \frac{P_c l^2}{EI} \varphi^d(P_c) + \sum \frac{M_c l}{EI} \varphi^d(M_c) \end{aligned} \right\} [10],$$

siendo

$$\varphi(P_c) = \pm \frac{1}{u^2} \left[\frac{\operatorname{sen} \left(1 \mp \frac{2c}{l} \right) \frac{u}{2}}{\operatorname{sen} u} - \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{2c}{l} \right) \right] \quad [11],$$

y del mismo modo

$$\varphi(M_c) = - \frac{\cos \left(1 \mp \frac{2c}{l} \right) \frac{u}{2}}{u \operatorname{sen} u} + \frac{1}{u^2} \quad [12].$$

De la [12] son casos particulares los que resultan de hacer $c = \pm \frac{l}{2}$, que producen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^i(M^i) &= \varphi^d(M^d) = \frac{1 - u \cot u}{u^2} \\ \varphi^i(M^d) &= \varphi^d(M^i) = \frac{1 - u \operatorname{cosec} u}{u^2} \end{aligned} \right\} [13].$$

Aparecen así las funciones siguientes, aplicables a sollicitaciones producidas por momentos en los extremos:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{u^3} \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right) \\ \varphi^i(M^i) &= \varphi^d(M^d) = \frac{1}{u^2} (1 - u \cot u) \\ \varphi^i(M^d) &= \varphi^d(M^i) = \frac{1}{u^2} (1 - u \operatorname{cosec} u) \end{aligned} \right\} [14],$$

que son de gran importancia en los problemas de los que se está tratando.

Hace una treintena de años fué desarrollado el tema de la sollicitación compuesta, en la forma que se va exponiendo, de un lado por Berry y de otra parte por Müller-Breslau, siendo después objeto de estudios especiales por Zimmermann, Bleich, Karman, etc., y más recientemente por Howard.

Las funciones a las que llegó Berry y que se conocen por su nombre en los países de habla inglesa (véanse *The Stresses in Aeroplane Structures*, H. B. Howard; *Aviation Handbook*, Warner), difieren de las expuestas simplemente por un factor numérico; tienen por expresión:

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) &= 6 \cdot \frac{2\theta \operatorname{cosec} 2\theta - 1}{(2\theta)^2} \quad \varphi(\theta) = 3 \cdot \frac{1 - 2\theta \cot 2\theta}{(2\theta)^2} \\ \psi(\theta) &= 3 \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta - \theta}{\theta^3} \end{aligned} \right\} [15]$$

que corresponden a una masa lábil representada por 2θ , es decir, referida a la mitad de la longitud de la pieza.

Hay que advertir que la nomenclatura es de origen alemán reciente y que no ha entrado aún en uso en la literatura inglesa.

El ilustre Müller-Breslau tampoco designó la cantidad con nombre especial estableciendo sus funciones que designó por v cuyos valores eran:

$$\begin{aligned} v' &= 1 - \alpha \cot \alpha \quad v'' = \alpha \operatorname{cosec} \alpha - 1 \\ v''' &= \frac{1}{\alpha} \cot \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned} [16]$$

viéndose que, en esencia, todas las funciones dadas a conocer son las mismas; empleándose en el curso de Mecánica Elástica aplicada de la Escuela Superior Aerotécnica, bajo la forma primera [14] señalada.

La resolución general del problema expuesto se hace, habitualmente, hallando en primer lugar la ecuación de la elástica, lo que le da semejanza de procedimiento con el problema de la viga flotante y, después, por las clásicas relaciones de derivación, se obtienen sucesivamente las deformaciones angulares, los momentos y los esfuerzos constantes, con lo que resultan expresiones análogas a las que se han indicado y que son:

$$y = \sum \frac{q_n l^4}{EI} f_y(q_n) + \sum \frac{P_c l^3}{EI} f_y(P_c) + \sum \frac{M_c l^2}{EI} f_y(M_c) [17]$$

para la elástica, y

$$M = \sum q_n l^2 f_m(q_n) + \sum P_c l f_m(P_c) + \sum M_c f_m(M_c) [18]$$

para el momento de flexión.

Las funciones que aparecen en estas expresiones f_y y f_m son bastante complicadas, pues, por ejemplo, en el caso de carga uniforme, valen:

$$f_y = \frac{1}{u^4} \left(\frac{\cos \frac{u}{l} x}{\cos \frac{u}{2}} - 1 \right) - \frac{1}{8u^2} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right] [19]$$

con

$$f_m = \bar{f}_m + u^2 f_y [20]$$

y siendo;

$$\bar{f}_m = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right] [21]$$

El caso de carga trapecial puede obtenerse combinando una carga uniforme con otra de variación lineal por la ley

$$q_1 \left(\frac{2x}{l} \right) [22]$$

y, como la masa lábil es la misma para los dos casos, pueden sumarse los efectos.

Los valores de f_y y f_m son para esta carga:

$$f_y = \frac{1}{u^4} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{u}{l} x}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} - \frac{2x}{l} \right) - \frac{x}{12u^2 l} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right] [23]$$

siendo como antes:

$$f_m = \bar{f}_m + u^2 f_y$$

con el valor:

$$\bar{f}_m = \frac{x}{12l} \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right] [24]$$

Como los cálculos son laboriosos, conviene tener tabuladas, tanto las expresiones de las distintas funciones que es preciso manejar, como sus valores numéricos para los distintos valores de la masa lábil, cuyos cuadros y tablas son empleados en el citado curso de Mecánica Elástica aplicada.

Por fin, se hace constar que, en el caso de sollicitación de extensión y flexión, las funciones obtenidas son las que resultan de sustituir en las que se han dado a conocer, en lugar de las líneas circulares, las hiperbólicas.

Diagrama de Howard

Mister H. B. Howard, del «Aeronautical Research Committee», dió a conocer, en 1928, un diagrama polar sumamente curioso e interesante para la resolución de los problemas que se han citado, y cuyo artificio consiste en invertir el orden de la investigación y, en lugar de hallar la expresión finita del momento de flexión por de-

rivación de la ecuación de la elástica, obtener directamente la ecuación diferencial de la ley de momentos con su integral correspondiente.

Resulta así el siguiente cálculo. El momento tiene el valor

$$M = \bar{M} - Ry, \tag{25}$$

siendo \bar{M} el momento producido por la carga transversal; derivando dos veces, se obtiene:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + R \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \bar{M}}{dx^2} = q_n, \tag{26}$$

en donde q_n es la carga por unidad lineal, y puesto que se tiene siempre $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ e introduciendo la masa lábil unitaria $k = \frac{u}{l} = \sqrt{\frac{R}{EI}}$, resulta la ecuación diferencial del momento:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + k^2 M = q_n, \tag{27}$$

cuya integración produce:

$$M = C \cos(kx - \varepsilon) + \frac{q_n}{k^2}, \tag{28}$$

con lo que el esfuerzo cortante valdrá:

$$S = \frac{dM}{dx} = -kC \sin(kx - \varepsilon) + \frac{q'_n}{k^2}. \tag{29}$$

Hay que advertir que si la pieza está cargada con una ley variable, será $q_n = f(x)$ y los segundos sumandos de las integrales serían α y $\frac{d\alpha}{dx}$, siendo α

$$\alpha = \left(1 + \frac{\Delta}{k^2}\right)^{-1} q_n$$

con la significación simbólica de Leibnitz en la derivación:

$$\alpha = q_n - \frac{1}{k^2} \frac{d^2 q_n}{dx^2} + \frac{1}{k^4} \frac{d^4 q_n}{dx^4} - \dots \tag{30}$$

que se convierte en q_n si la carga es uniforme.

La expresión [28] puede transformarse como sigue introduciendo el momento ficticio m :

$$m = M - \frac{q_n}{k^2} = C \cos(kx - \varepsilon), \tag{31}$$

y en seguida se ve que representa una circunferencia en coordenadas polares que pasa por el origen y tal que el diámetro de este punto forma el ángulo ε con el eje polar; el otro extremo de este diámetro es el punto *apex* del diagrama (fig. 4).

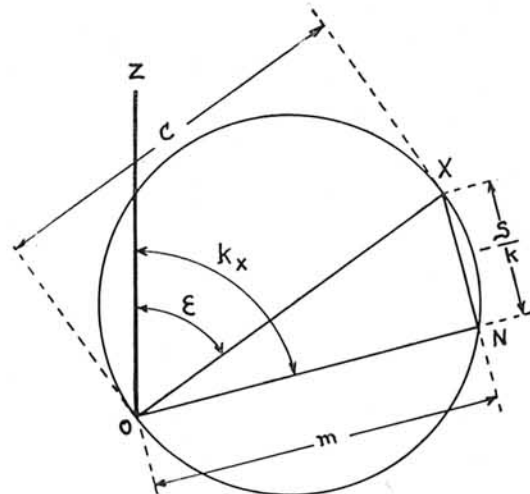


Figura 4.

Si se traza el ángulo $ZON = kx$, siendo x la abscisa de un punto de la viga referida al punto medio, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} ON &= OX \cos(kx - \varepsilon) = m \\ XN &= OX \sin(kx - \varepsilon) = -\frac{S}{k} \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

Estos resultados quieren decir que el diagrama proporciona en ON el momento ficticio del que inmediatamente se puede deducir por [31] el verdadero momento y en XN el cociente de dividir por $-k$ el esfuerzo cortante, o sea:

$$S = -k \cdot \bar{XN}.$$

Si se llevan los ángulos $\frac{u}{2}$ a derecha e izquierda del eje

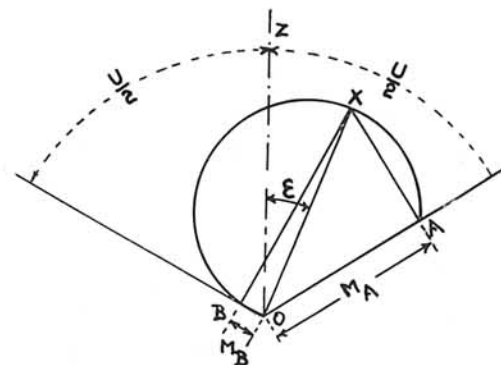


Figura 5.

polar, se obtienen en OA y OB los momentos extremos (fig. 5).

El momento máximo es $OX = C$, y como es:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2},$$

siendo por las condiciones en los límites:

$$A = \frac{m^d + m^i}{2 \cos \frac{u}{2}} \quad " \quad B = \frac{m^d - m^i}{2 \sin \frac{u}{2}} \tag{33}$$

con lo que

$$OX = m_{\text{m}\acute{a}\text{x.}} = \sqrt{\left(\frac{m^d + m^i}{2 \cos \frac{u}{2}}\right)^2 + \left(\frac{m^d - m^i}{2 \sin \frac{u}{2}}\right)^2} \quad [34]$$

$$\text{tg. } \varepsilon = -\frac{m^i + m^d}{m^i - m^d} \cot \frac{u}{2}. \quad [35]$$

Se ve, pues, la sencillez del diagrama que se ha descrito del cual se va a hacer aplicaci3n a dos casos muy frecuentes: carga por dos momentos extremos y carga uniforme.

Aplicaciones

En el primer caso es (fig. 6):

$$\bar{M} = \frac{M^d + M^i}{2} + \frac{M^d - M^i}{2} \cdot \frac{2x}{a}, \quad [36]$$

y el momento, si no existiese carga axil, seguiría la ley lineal que se indica en la figura, que sería sustituida por la curva, que también se representa en ella si existe la referida carga.

El trazado de esta línea da lugar a cálculos muy laboriosos si se emplean los métodos ordinarios, siendo, en este caso, en el que se aprecia la enorme ventaja del

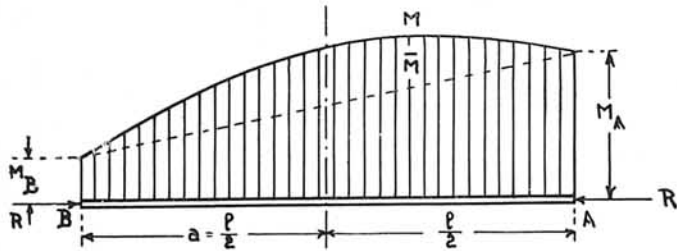


Figura 6.

diagrama de Howard, pues se obtiene un trazado continuo y sencillísimo.

La ley se reduce ahora a:

$$m = M = C \cos(kx - \varepsilon), \quad [37]$$

y el momento ficticio es igual al real, siendo el diagrama polar el de la figura 7 con los valores de OX y ε que resultan de sustituir en los anteriores [34] y [35] m por M.

Este diagrama da a conocer también la existencia de la carga crítica: si fuese u = π, OA y OB estarían en prolongación y el punto apex se trasladaría al infinito, indicando así valores que acusan la pérdida de la estabilidad de la pieza.

Si se trata del caso de carga uniforme, figura 2, entonces es:

$$M = C \cos(kx - \varepsilon) + \frac{q_n}{k^2} \quad [38]$$

y si la viga está apoyada, los momentos extremos son nulos, es decir:

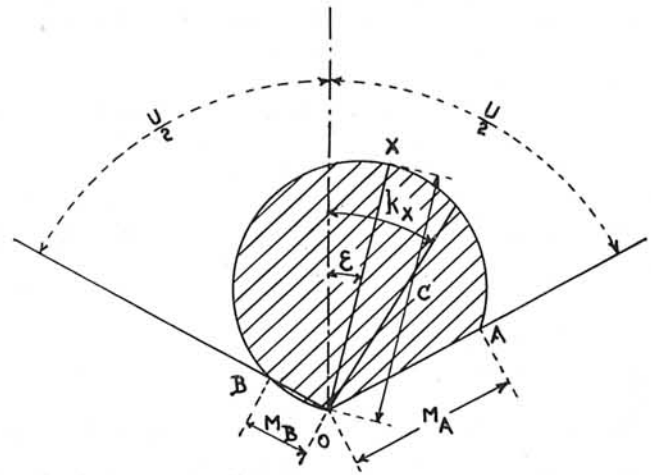


Figura 7.

$$C \cos\left(\frac{u}{2} - \varepsilon\right) + \frac{q_n}{k^2} = 0$$

$$C \cos\left(\frac{u}{2} + \varepsilon\right) + \frac{q_n}{k^2} = 0 \quad [39]$$

de donde:

$$\varepsilon = 0 \quad \text{,} \quad C = -\frac{q_n}{k^2} \sec \frac{u}{2} \quad [40]$$

con lo que resulta:

$$M = -\frac{q_n}{k^2} \left(\sec \frac{u}{2} \cos kx - 1\right) \quad [41]$$

y el máximo:

$$M_{\text{m}\acute{a}\text{x.}} = -\frac{q_n}{k^2} \left(\sec \frac{u}{2} - 1\right) \quad [42]$$

Si se toma $m^i = m^d = -\frac{q_n}{k^2}$ en OA y OB (fig. 8), se traza el círculo AXB que pasa por AOB, resulta el círculo del momento ficticio m: trazando el círculo de centro O y radio OA = $-\frac{q_n}{k^2}$, el área rayada es la ley

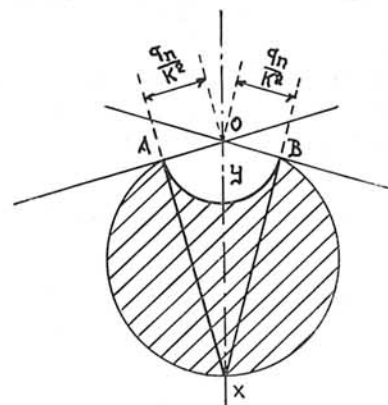


Figura 8.

de *momentos efectivos*, viéndose en seguida que el máximo es $XY = -\frac{q_n}{k^2} \left(\sec \frac{u}{2} - 1 \right)$.

Los esfuerzos cortantes en los extremos serían XA y XB multiplicados por $-k$.

Los dos casos expuestos son los fundamentales para poder resolver la mayoría de los de la práctica: viga con voladizos; tramo de una viga continua después de calculados los momentos en los apoyos; elementos de una estructura una vez conocidos los momentos en los nudos, etcétera.

Así, si la pieza está solicitada por carga uniforme transversal y momentos extremos, el diagrama es el de la figura 9.

Los puntos A y B obtenidos con

$$OA = M_A - \frac{q_n}{k^2} \quad \text{y} \quad OB = M_B - \frac{q_n}{k^2}$$

determinan, con O , el círculo OX ; el otro círculo de radio $\frac{q_n}{k^2}$ y centro O , termina el trazado; la ley de momentos es la rayada en la figura; el momento máximo es OX con el argumento ε ; resultando conocidos el *valor* y la *posición* del momento máximo, ya gráfica, ya analíticamente.

Se observa que resultan dos puntos de inflexión y que, por suponer las cargas dirigidas ascendentemente, se han tomado los momentos en la forma que se ve en la figura.

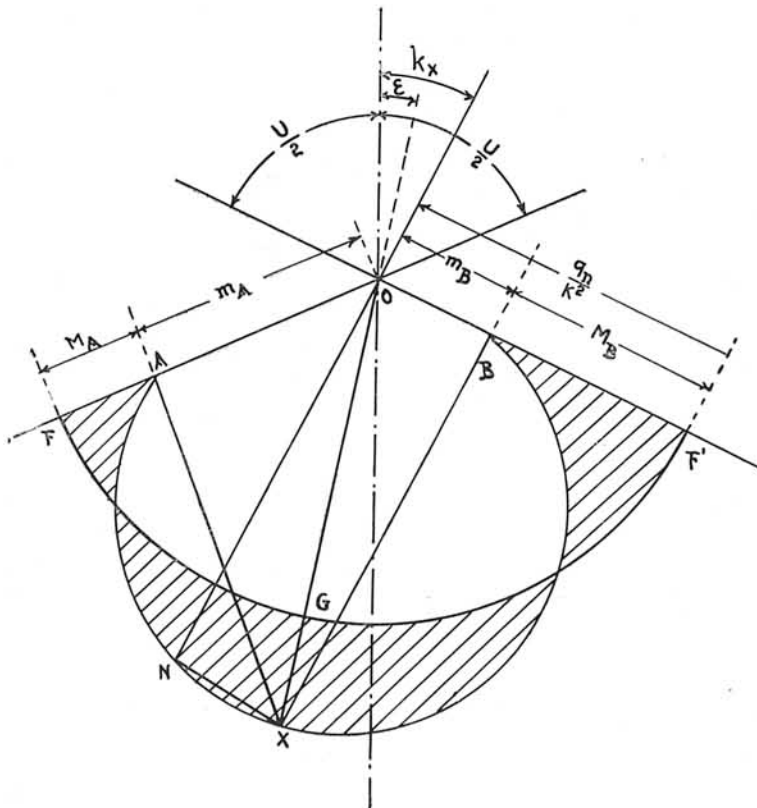


Figura 9.

Carga variable

Es fácil hacer la modificación del diagrama en el caso de que la ley de cargas no sea continua.

Si es OY (fig. 10) el radio correspondiente al punto de la viga en el que cambia la ley, es claro que en ese radio habrá también una discontinuidad en el diagrama, pues siendo el radio del círculo de valor $\frac{q_n}{k^2}$, deberá variar con q_n

debiendo, pues, existir dos puntos *apex*: X_1 y X_2 .

Si se supone resuelto el problema, como deberán cumplirse las condiciones:

- a) El esfuerzo cortante en el punto Y debe ser único o sea: $X_1 X_2$ deberá ser *paralela* a OY .
- b) El momento en Y debe ser único, o sea:

$$m_{Yi} = M_Y - \frac{q_n}{k^2} \quad \text{y} \quad m_{Yd} = M_Y - \frac{q'_n}{k^2} = m_{Yi} + \frac{q_n - q'_n}{k^2}$$

de lo que se deduce:

$$OH - OK = HK = X_1 X_2 = \frac{q_n - q'_n}{k^2}$$

y por tanto, el trazado que se ve en la figura; la perpendicular Bh a OB ; el punto h arbitrario; la paralela hk a OB ; la distancia $hk = \frac{q_n - q'_n}{k^2}$ y por K la paralela KX_2 a Bh produce el apex X_2 y la $X_2 X_1$ paralela a OY el X_1 , completándose en seguida el trazado fácilmente.

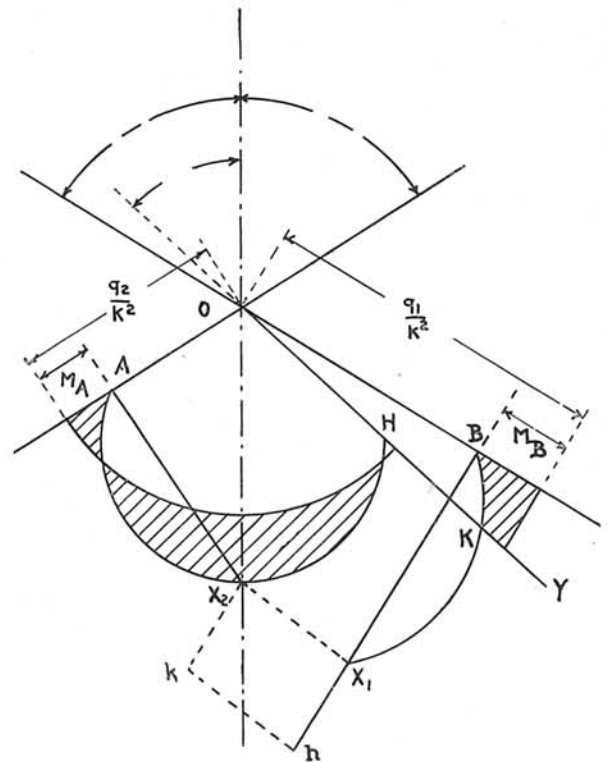


Figura 10.

Ecuación de los tres momentos compuestos

Resulta evidente la consecuencia de no ser aplicable, a los casos de esfuerzo longitudinal, simultáneo con transversal, la ecuación de Clapeyron para la viga continua, puesto que esta ecuación no representa todos los efectos que el material soporta en este caso.

Ya la ecuación de los tres momentos ha de ser substituida por la de los cinco momentos en el caso de que, por ser los apoyos elásticos, cedan bajo la acción de las cargas, siendo preciso considerar el asunto como de viga flotante introduciendo el coeficiente de boyancia o asiento de los apoyos, como ocurre en los puentes sobre flotantes y en algunas cuestiones de aeronaves, tales como el eje del timón de profundidades.

Pero ahora se va a presentar únicamente la generalización de la ecuación de Clapeyron al caso de una viga continua si ésta sufre sollicitación compuesta.

Entonces, el método basado en la identidad de deformación angular sobre los apoyos, en una viga continua, expresando la deformación por el teorema de Mohr, conduce, rápida y sencillamente al resultado.

Considerando dos tramos consecutivos: *n*-ésimo y (*n*+1)-ésimo (fig. 11) de momentos de inercia *I_n* e *I_{n+1}* sometidos a cargas axiales que den lugar a las masas lábiles *u_n* y *u_{n+1}*, siendo, para fijar las ideas, la carga transversal uniforme de valores *q_n* y *q_{n+1}* en dichos tramos,

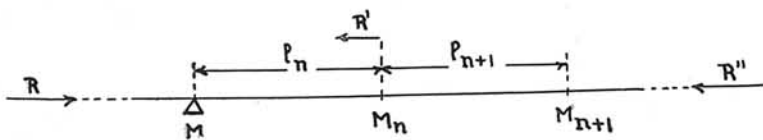


Figura 11.

la rotación de la sección en el apoyo *n*-ésimo considerado como perteneciente al tramo del mismo orden es, sucesivamente:

$$-\frac{q_n l_n^3}{E_n I_n} \varphi^d(q_n); \quad -\frac{l_n}{EI_n} M_{n-1} \cdot \varphi^d(M_{n-1}^i);$$

$$-\frac{l_n}{EI_n} M_n \varphi^d(M_n^d);$$

por la acción de la carga continua; por el momento sobre el apoyo (*n*-1)-ésimo y por el momento sobre el *n*-ésimo.

De igual modo, la rotación de la sección como perteneciente al tramo (*n*+1)-ésimo, será, en el mismo orden, por análogas causas:

$$\frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{E_n I_n} \varphi^i(q_{n+1}); \quad -\frac{l_{n+1}}{EI_{n+1}} M_{n+1} \varphi^i(M_{n+1}^d);$$

$$\frac{l_{n+1}}{EI_{n+1}} M_n \varphi^i(M_n^i);$$

lo que permite poner la ecuación de identidad

$$-\frac{q_n l_n^3}{E_n I_n} \varphi^d(q_n) - \frac{l_n}{EI_n} M_{n-1} \varphi^d(M_{n-1}^i) - \frac{l_n}{EI_n} M_n \varphi^d(M_n^d) =$$

$$= \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{E_n I_n} \varphi^i(q_{n+1}) - \frac{l_{n+1}}{EI_{n+1}} M_{n+1} \varphi^i(M_{n+1}^d) +$$

$$+ \frac{l_{n+1}}{EI_{n+1}} M_n \varphi^i(M_n^i) \quad [43]$$

que transformada convenientemente produce

$$M_{n-1} \frac{l_n}{I_n} [-\varphi^d(M_{n-1}^i)] + 2M_n \left[\frac{l_n}{I_n} \cdot \frac{1}{2} \varphi^d(M_n^d) +$$

$$+ \frac{l_{n+1}}{I_n} \cdot \frac{1}{2} \varphi^i(M_n^i) \right] + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{I_n} [-\varphi^i(M_{n+1}^d)] =$$

$$= \frac{l_n^3}{I_n} q_n \varphi^d(q_n) - \frac{l_{n+1}^3}{I_{n+1}} q_{n+1} \varphi^i(q_{n+1}) \quad [44]$$

que es la ecuación que se quería obtener.

Como se ve, en esta expresión intervienen las funciones dadas antes a conocer, pero podría ponerse igualmente mediante las funciones de Berry o con las *v* de Müller-Breslau.

Si se define la masa lábil respecto a la mitad de la pieza, son preferibles las funciones de Berry, que es el criterio que se emplea en la literatura de habla inglesa.

Observación interesante

El ilustre Müller-Breslau, que, como se ha dicho antes, había establecido las funciones *v* para el cálculo de los esfuerzos secundarios en las estructuras de puentes, de empleo indispensable cuando los nudos sean ensamblados y las piezas de esbeltez importante, dió las directrices para su empleo en el cálculo de largueros de alas; pues, en efecto: durante la guerra europea fué nombrado Consejero de la Sección de Aeronáutica del Ministerio de la Guerra de Prusia y presidente del Instituto científico-aeronáutico «Kaiser Wilhelm» del mismo Ministerio, y como tal hubo de dictar las reglas para llevar el cálculo de esfuerzos en los aviones hasta el límite de ruptura por haberlo ordenado así la Superioridad, lo que le obligó a desarrollar toda la teoría de la estabilidad elástica, pues llevado el asunto hasta ese límite, no era posible prescindir de ningún efecto.

Con las normas que se dedujeron de los cálculos y experiencias dirigidos por Müller-Breslau, fueron calculados los largueros de los aviones *Albatros* que intervinieron en la Gran Guerra.

El tema, como se ve, es de una gran amplitud, y lo expuesto no es más que una modalidad del asunto, pues cuando se trata de la determinación de los esfuerzos en sistemas más complejos que la viga continua, tal como el larguero *bitirante*, entonces es preciso acudir al potencial interno resultante en el pandeo, cuyo aspecto tal vez sea tratado también en esta REVISTA próximamente.

Todo ello forma parte, como puede apreciarse, de los conocimientos que se pueden calificar de fondo en la ingeniería aeronáutica.