# Sobre vibraciones de torsión

Por A. P.-MARÍN

*Capitán de Aviación, alumno de la Escuela Superior Aerotécnica*

AUN cuando el tema de las vibraciones de torsión en motores de explosión ha sido ya muy autorizadamente tratado en las columnas de esta revista, se puede afirmar que está muy lejos de su agotamiento. La constante atención que los técnicos de todos los países dedican al asunto y la continua publicación de artículos y obras que al estudiarlo van marcando un avance progresivo en el conocimiento de la materia, demuestran que ésta, como la mayor parte de las que se relacionan con la Aeronáutica, no ha salido todavía del período evolutivo (1).

Teniendo en cuenta todo ello, voy a aportar con este artículo mi modesta colaboración exponiendo un ligero esbozo de la teoría aplicada a un caso particular, lo que a mi juicio tiene la ventaja de que de este modo adquiere un aspecto más práctico y la de que al presentarse los cálculos numéricos de una manera ordenada se marca una pauta que puede seguirse en casos análogos y se gana en concisión, sin que por ello se pierda en generalidad y claridad.

El ejemplo que presentamos es el de un motor de explosión, cuatro cilindros, 40 cv. a 2.500 revoluciones por minuto del cigüeñal, con una reducción para que la hélice gire a 2.000 revoluciones por minuto.

Las dimensiones necesarias para la debida comprensión del problema serán dadas más adelante.

En este primer artículo nos vamos a limitar a determinar la frecuencia propia del cigüeñal, es decir, la frecuencia de la vibración natural, analizando las velocidades críticas del motor.

Como primera aproximación consideramos sólo dos masas: la de la hélice y las del conjunto de las cuatro masas afectas a los codos del cigüeñal.

Calcularemos el momento de inercia total de un codo:

*Muñequilla.* — Su diámetro exterior es de 4 centímetros, el interior de 2 centímetros, la longitud de 5,6 centímetros. Por tanto, teniendo en cuenta la densidad del material empleado, su peso es de 0,423 kilogramos.

El momento de inercia relativo a su propio eje de 0,000645 kg.cm.s$^2$.

Siendo la distancia del eje de la muñequilla al eje del cigüeñal de 4,5 centímetros, el momento de inercia de la muñequilla relativo al eje del cigüeñal es de 0,009395 kg.cm.s$^2$.

*Brazo del codo.* — Sus dimensiones son 2,4, 6 y 9,8 centímetros. Su momento de inercia con respecto a un eje que siendo paralelo al eje del cigüeñal pase por el centro de gravedad del brazo es de 0,0127 kg.cm.s$^2$.

La distancia del centro de gravedad del brazo al eje del árbol es de 2,15 centímetros; luego el momento de inercia del brazo con respecto al eje del árbol cigüeñal es de 0,0179 kg.cm.s$^2$.

*Masas móviles afectas.* — La masa afecta a la cabeza de biela y por tanto con movimiento giratorio es de 0,00028 kg.s$^2$./cm.

La masa afecta al pie de biela (masa del émbolo completo más la parte correspondiente de biela) es de 0,00085 kg.s$^2$/.cm. que hemos de considerar como oscilante.

El momento de inercia con respecto al eje del cigüeñal es el producto del radio del codo por la suma de la masa giratoria más la mitad de la oscilante, o sea 0,014 kg.cm. s$^2$.

El momento total de un codo será:

$$0{,}00939 + 2 \cdot 0{,}0179 + 0{,}014 = 0{,}059 \text{ kg.cm.s}^2.$$

El momento total de los cuatro codos será:

$$4 \cdot 0{,}059 = 0{,}236 \text{ kg.cm.s}^2.$$

El muñón, de diámetro exterior 4,4 centímetros e interior de 2 centímetros, tiene una rigidez de torsión, si el módulo de elasticidad transversal es $E_t = 9{,}10^5$ kg.cm$^2$., de

$$C_1 = E_t \cdot I_p = 317 \cdot 10^5 \text{ kg.cm}^2.$$

La rigidez de torsión de las muñequillas es:

$$C_2 = 212 \cdot 10^5 \text{ kg.cm}^2.$$

La rigidez de flexión del brazo es, siendo el módulo de Young de $24 \cdot 10^5$ kg./cm$^2$.:

$$B = 104 \cdot 10^6 \text{ kg. cm}^2$$

Veamos ahora la longitud reducida de cada codo, es decir, la que tendría un eje circular de sección tal que el ángulo de torsión en su extremo solicitado por el par aplicado al codo sea el mismo que el de éste.

Para tener en cuenta las deformaciones locales en las secciones de unión de la muñequilla y los muñones con los brazos se toma para longitud del cuerpo:

$$2\,b_1 = 2\,b + 0{,}9\,h,$$

siendo $2\,b$ la longitud del muñón, de brazo a brazo, y $h$ la anchura de éstos, o sea, en nuestro caso:

$$2\,b_1 = 5{,}6 + 0{,}9 \cdot 2{,}4 = 7{,}76 \text{ cm.}$$

Para longitud de muñequilla, siendo $a$ su longitud real, se toma:

$$a_1 = a + 0{,}9 \cdot h = 5{,}6 + 0{,}9 \cdot 2{,}4 = 7{,}76 \text{ cm.}$$

(1) Obras consultadas: CUBILLO: *Mecánica elástica aplicada.*
TIMOSHENKO: *Vibration problems in Engeneering.*
LEHR: *Schwingungstechnik.*
HOLZER: *Die Berechnung der Drehschwingungen.*

Supongamos primeramente que los muñones tienen un huelgo suficiente en sus cojinetes para permitir libremente todos los corrimientos de las secciones rectas centrales de los apoyos de muñones.

Supuesto aplicado un momento $M_t$ de torsión entre las secciones límites del codo considerado, el ángulo de deformación será la suma de las tres deformaciones angulares de torsión para el muñón y muñequilla, y de flexión para los brazos, o sea:

$$\frac{2\,b M_t}{C_1} + \frac{a_1\,M_t}{C_2} + \frac{2\,r M_t}{B}.$$

Este ángulo de deformación, si llamamos $l_r$ a la longitud reducida y tomamos como árbol tipo uno de sección igual a la de los muñones, es también:

$$\frac{M_t\,l_r}{C_1}.$$

Por tanto, la longitud reducida en este caso será:

$$l_r = 2\,b_1 + \frac{a_1\,C_1}{C_2} + \frac{2\,r C_1}{B} = 7{,}76 + \frac{7{,}76 \cdot 317}{212} + \frac{9 \cdot 317}{1040} = 22{,}1 \text{ cm}$$

Considerando en segundo lugar el caso extremo de que las secciones de los apoyos no pueden sufrir ningún corrimiento por existir un empotramiento perfecto, se determina la longitud reducida por la fórmula:

$$l = C_1\left[\frac{2\,b}{C_1} + \frac{a}{C_2}\left(1 - \frac{r}{K}\right) + \frac{2\,r}{B}\left(1 - \frac{r}{2\,K}\right)\right]$$

Siendo: $C_3$ la rigidez torsional del brazo

$$C_3 = \frac{c^3\,h^3\,E_t}{3{,}6\,(c^2 + h^2)} = \frac{6^3 \cdot 2{,}4^3 \cdot 9 \cdot 10^5}{3{,}6\,(6^2 + 2{,}4^2)} = 178{,}9 \cdot 10^5 \text{ kg.cm}^2.,$$

la rigidez de flexión de la muñequilla,

$$B_1 = \frac{\pi}{64}\,(4^4 - 2^4) \cdot 24 \cdot 10^5 = 283 \cdot 10^5 \text{ kg.cm}^2.,$$

el área de la sección de la muñequilla

$$F = 9{,}42 \text{ cm}^2.$$

y el area de la sección del brazo

$$F_1 = 14{,}4 \text{ cm}^2.;$$

está $K$ determinado por

$$K = \frac{\dfrac{r\,(a+h)^2}{4\,C_3} + \dfrac{ar^2}{2\,C_2} + \dfrac{a^3}{24\,B_1} + \dfrac{r^3}{3\,B} + \dfrac{1{,}2}{E_t}\left(\dfrac{ar}{2\,F} + \dfrac{r}{F_1}\right)}{\dfrac{ar}{2\,C_2} + \dfrac{r^2}{2\,B}}$$

Con nuestros datos tendríamos una longitud reducida de 17,28 cm.

Tomando la media de las encontradas para ambos casos tendremos una longitud reducida de 19,69 centímetros.

Por tanto, desde el centro de los cuatro cilindros, en el cigüeñal, hasta el centro de la rueda de reducción, habrá una longitud de 44,68 centímetros, que será nuestra longitud reducida, tomando como árbol tipo el de muñones.

El momento de inercia de la hélice con respecto a su eje podemos considerar es de 100 kg.cm.s$^2$, determinado por analogía con otras hélices empleadas en motores del mismo tipo.

Como la hélice no está en la prolongación del árbol cigüeñal, sino que tenemos una reducción por engranajes de radios primitivos de 3 y 3,75 centímetros para la rueda del cigüeñal y del árbol portahélices, respectivamente, haremos la reducción del momento de la hélice al eje del cigüeñal atendiendo a los momentos de inercia mecánicos.

La primera reducción se efectuará al punto de tangencia de las circunferencias primitivas de engranajes, para lo que se dividirá por $3{,}75^2$, obteniendo así la masa afecta a la rueda del cigüeñal; la segunda reducción consistirá en trasladarla al eje del árbol del cigüeñal, para lo que hemos de multiplicar por $3^2$. Por tanto, el momento reducido buscado, con relación al eje del cigüeñal, es:

$$100 \,.\, \frac{3^2}{3{,}75^2} = 64 \text{ kg.cm.s}^2.$$

Resulta hasta aquí una masa con 64 kg.cm.s$^2$ y otra con 0,236 kg.cm.s$^2$, separadas por una longitud de 44,68 centímetros y con un árbol de la misma sección que la de los muñones, cuya constante de «muelle» es:

$$c = \frac{E_t\,I_p}{l} = \frac{317 \cdot 10^5}{44{,}68} = 7{,}1 \cdot 10^5 \text{ kg.cm.}$$

El momento reducido de tal sistema es:

$$I' = \frac{64 \cdot 0{,}236}{64 + 0{,}236} = 0{,}235 \text{ kg.cm.s}^2.$$

Por tanto, la frecuencia de la vibración natural en esta primera aproximación es:

$$\frac{l}{2\,\pi}\sqrt{\frac{c}{I'}} = 277 \text{ s}^{-1}$$

que corresponde a $277 \cdot 60 = 16.620$ revoluciones por minuto.

En una segunda aproximación consideramos cinco masas: la de la hélice y la de cada una de las masas afectas a los codos del cigüeñal.

Los momentos de estas cinco masas son, respectivamente, $I_1 = 54$ „ $I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = 0{,}059$ kg.cm.s$^2$ de la hélice y de las masas afectas a los codos, siendo las longitudes reducidas entre estas masas: $l_{12} = 15{,}145$ cm. $l_{23} = l_{34} = l_{45} = 19{,}69$ cm.; todo ello conforme a lo visto en la primera aproximación.

Sea $\varphi'_i$ el ángulo de torsión instantáneo del eje en el lugar en que están las masas y supongamos partimos del reposo, es decir, que para $t = 0$ es $\varphi'_i = 0$.

La torsión del primer trozo es la diferencia de la que haya entre los puntos extremos, siendo su momento

$$M_{12} = \frac{E_t I_p}{15{,}145} (\varphi'_1 - \varphi'_2)$$

o, llamando $c_1$ al valor de la constante de «muelle»:

$$M_{12} = c_1 (\varphi'_1 - \varphi'_2).$$

Del mismo modo obtendríamos los momentos correspondientes a la torsión de los diferentes trozos.

Con el empleo en las ecuaciones de Lagrange del tipo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

tendremos, siendo la energía cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \left(\frac{d\varphi'_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} I_2 \sum_2^5 \left(\frac{d\varphi'_i}{dt}\right)^2$$

y la energía potencial:

$$V = \frac{1}{2} c_1 (\varphi'_1 - \varphi'_2)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi'_2 - \varphi'_3)^2 + \frac{1}{2} c_3 (\varphi'_3 - \varphi'_4)^2 + \\ + \frac{1}{2} c_4 (\varphi'_4 - \varphi'_5)^2;$$

el siguiente sistema:

$$I_1 \frac{d^2\varphi'_1}{dt^2} + c_1 (\varphi'_1 - \varphi'_2) = 0$$

$$I_2 \frac{d^2\varphi'_2}{dt^2} + c_2 (\varphi'_2 - \varphi'_3) - c_1 (\varphi'_1 - \varphi'_2) = 0$$

$$I_3 \frac{d^2\varphi'_3}{dt^2} + c_3 (\varphi'_3 - \varphi'_4) - c_2 (\varphi'_2 - \varphi'_3) = 0$$

$$I_4 \frac{d^2\varphi'_4}{dt^2} + c_4 (\varphi'_4 - \varphi'_5) - c_3 (\varphi'_3 - \varphi'_4) = 0$$

$$I_5 \frac{d^2\varphi'_5}{dt^2} - c_4 (\varphi'_4 - \varphi'_5) = 0$$

Para integrarlo hacemos una hipótesis, de acuerdo con la experiencia, sobre la forma de las funciones: $\varphi'_i = \varphi_i \cos pt$, siendo $\varphi_i$ el ángulo de torsión máximo correspondiente a cada punto del eje en que estén las masas.

Con esta hipótesis es inmediato el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 p^2 \varphi_1 - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ I_2 p^2 \varphi_2 - c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ I_3 p^2 \varphi_3 - c_3 (\varphi_3 - \varphi_4) + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\ I_4 p^2 \varphi_4 - c_4 (\varphi_4 - \varphi_5) + c_3 (\varphi_3 - \varphi_4) = 0 \\ I_5 p^2 \varphi_5 + c_4 (\varphi_4 - \varphi_5) = 0 \end{array}\right\} \quad [1]$$

De este sistema, eliminando $\varphi_i$, tendremos una ecuación de cuarto grado en $p^2$ que nos dice habrá cuatro formas de vibrar, aunque nos limitaremos al estudio de la forma fundamental que, como es sabido, es la de mayor importancia.

Sumando aquellas ecuaciones obtenemos la propiedad general $\sum I_i \varphi_i = 0$ que nos sirve como condición para las amplitudes, ya que al ser las ecuaciones de éstas homogéneas sólo quedarían determinadas las relaciones entre aquéllas.

Puesto el sistema [1] en la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{I_1 p^2}{c_1} \varphi_1 \\ \varphi_3 = \varphi_2 - \dfrac{p^2}{c_2} (I_1 \varphi_1 + I_2 \varphi_2) \\ \varphi_4 = \varphi_3 - \dfrac{p^2}{c_3} (I_1 \varphi_1 + I_2 \varphi_2 + I_3 \varphi_3) \\ \varphi_5 = \varphi_4 - \dfrac{p^2}{c_4} (I_1 \varphi_1 + I_2 \varphi_2 + I_3 \varphi_3 + I_4 \varphi_4) \\ I_1 \varphi_1 + I_2 \varphi_2 + I_3 \varphi_3 + I_4 \varphi_4 + I_5 \varphi_5 = 0 \end{array}\right\}$$

Para seguir el procedimiento de sucesivas aproximaciones consistente en atribuir un valor arbitrario a $p^2$ y a $\varphi_1$ obteniendo los valores de $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ y $\varphi_5$ en las siguientes ecuaciones; examinaremos si la última se satisface con aquellos valores arbitrarios que serán los verdaderos si se cumple dicha condición y repitiendo el cálculo con nuevos valores en el caso contrario.

Damos a los cálculos la forma tabular partiendo de una amplitud unidad y de una pulsación $p$ igual 1.740, valor que obtuvimos en la primera aproximación, que nos sirve, como vemos, para no ir completamente a ciegas en este valor arbitrario.

De este modo se ha calculado el cuadro número 1.

CUADRO NÚM. 1.

$p^2 = 3{,}02 \cdot 10^6$

| Núm. de masas | $I$ | $I p^2$ | $\varphi$ | $I p^2 \varphi$ | $p^2 \Sigma I \varphi$ | $l$ | $\dfrac{l p^2 \Sigma I \varphi}{E_t I_p}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 64 | $193{,}28 \cdot 10^6$ | 1 | $193{,}28 \cdot 10^6$ | $193{,}28 \cdot 10^6$ | 15,145 | 92,3 |
| 2 | 0,059 | $0{,}178 \cdot 10^6$ | $-91{,}3$ | $-16{,}5 \cdot 10^6$ | $176{,}78 \cdot 10^6$ | 19,69 | 109,5 |
| 3 | 0,059 | $0{,}178 \cdot 10^6$ | $-200{,}8$ | $-35{,}6 \cdot 10^6$ | $141{,}18 \cdot 10^6$ | 19,69 | 88 |
| 4 | 0,059 | $0{,}178 \cdot 10^6$ | $-288{,}8$ | $-51{,}5 \cdot 10^6$ | $89{,}68 \cdot 10^6$ | 19,69 | 57,7 |
| 5 | 0,059 | $0{,}178 \cdot 10^6$ | $-344{,}5$ | $-61{,}5 \cdot 10^6$ | $28{,}18 \cdot 10^6$ | | |

Sabido es que el grado de vibración se reconoce por el número de cambios de signos de las amplitudes. En el cuadro figura un solo cambio de signo que nos indica un solo nodo, o sea la vibración fundamental y de grado impar.

Si el valor ensayado $p = 1740$ fuese el exacto, es indudable que la columna $p^2 \Sigma I \varphi$ terminaría con un valor nulo; como no es así, sino positivo, y el grado de la vibración es impar, el valor de la pulsación es inferior al real.

Por tanto, ensayamos el valor $p^2 = 3{,}8 \cdot 10^6$, obteniendo el cuadro número 2, y observando que es negativo el valor final de la columna $p^2 \Sigma I \varphi$, tendremos encuadrado

CUADRO NÚM. 2.

$p^2 = 3{,}8 \cdot 10^6$

| Núm. de masas | $I$ | $I p^2$ | $\varphi$ | $I p^2 \varphi$ | $p^2 \Sigma I \varphi$ | $l$ | $\frac{l p^2 \Sigma I \varphi}{E_t I_p}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 64 | $243{,}2 \cdot 10$ | 1 | $243{,}2 \cdot 10^6$ | $243{,}2 \cdot 10^6$ | 15,145 | 116 |
| 2 | 0,059 | $0{,}224 \cdot 10^6$ | $-115$ | $-26 \cdot 10^6$ | $217{,}2 \cdot 10^6$ | 19,69 | 134,5 |
| 3 | 0,059 | $0{,}\ 24 \cdot 10^6$ | $-249{,}5$ | $-55{,}7 \cdot 10^6$ | $161{,}5 \cdot 10^6$ | 19,69 | 100,5 |
| 4 | 0,059 | $0{,}224 \cdot 10^6$ | $-350$ | $-78{,}4 \cdot 10^6$ | $83{,}1 \cdot 10^6$ | 19,69 | 51,5 |
| 5 | 0,059 | $0{,}224 \cdot 10^6$ | $-401{,}5$ | $-89{,}9 \cdot 10^6$ | $-8{,}7 \cdot 10^6$ | | |

el verdadero valor de la pulsación. Para su determinación podremos emplear un método de interpolación, aunque hemos preferido ensayar dos nuevos valores $p^2 = 3{,}7 \cdot 10^6$ y $p^2 = 3{,}715 \cdot 10^6$ que nos estrechen más el intervalo. (Cuadros números 3 y 4.)

CUADRO NÚM. 3.

$p^2 = 3{,}7 \cdot 10^6$

| Núm. de masas | $I$ | $I p^2$ | $\varphi$ | $I p^2 \varphi$ | $p^2 \Sigma I \varphi$ | $l$ | $\frac{l p^2 \Sigma I \varphi}{E_t I_p}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 64 | $230 \cdot 10^6$ | 1 | $230 \cdot 10^6$ | $230 \cdot 10^6$ | 15,145 | 112 |
| 2 | 0,059 | $0{,}212 \cdot 10^6$ | $-111$ | $-23{,}5 \cdot 10^6$ | $206{,}5 \cdot 10^6$ | 19,69 | 128 |
| 3 | 0,059 | $0{,}212 \cdot 10^6$ | $-239$ | $-50{,}7 \cdot 10^6$ | $155{,}8 \cdot 10^6$ | 19,69 | 96,5 |
| 4 | 0,059 | $0{,}212 \cdot 10^6$ | $-335{,}5$ | $-71 \cdot 10^6$ | $84{,}8 \cdot 10^6$ | 19,69 | 52,7 |
| 5 | 0,059 | $0{,}212 \cdot 10^6$ | $-388{,}2$ | $-82{,}4 \cdot 10^6$ | $2{,}4 \cdot 10^6$ | | |

CUADRO NÚM. 4.

$p^2 = 3{,}715 \cdot 10^6$

| Núm. de masas | $I$ | $I p^2$ | $\varphi$ | $I p^2 \varphi$ | $p^2 \Sigma I \varphi$ | $l$ | $\frac{l p^2 \Sigma I \varphi}{E_t I_p}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 64 | $238 \cdot 10^6$ | 1 | $238 \cdot 10^6$ | $238 \cdot 10^6$ | 15,145 | 113 |
| 2 | 0,059 | $0{,}219 \cdot 10^6$ | $-112$ | $-24{,}5 \cdot 10^6$ | $213{,}5 \cdot 10^6$ | 19,69 | 131 |
| 3 | 0,059 | $0{,}219 \cdot 10^6$ | $-243$ | $-53{,}2 \cdot 10^6$ | $160{,}3 \cdot 10^6$ | 19,69 | 99,5 |
| 4 | 0,059 | $0{,}219 \cdot 10^6$ | $-342{,}5$ | $-15 \cdot 10^6$ | $85{,}5 \cdot 10^6$ | 19,69 | 53,2 |
| 5 | 0,059 | $0{,}219 \cdot 10^6$ | $-395{,}7$ | $87 \cdot 10^6$ | $-1{,}5 \cdot 10^6$ | | |

Interpolando ahora podremos decir que el verdadero valor de la pulsación en la vibración fundamental es $p = 1927$, que corresponde a una frecuencia de

$$\frac{30}{\pi} \cdot 1.927 = 18.400 \text{ r. p. m.},$$

valor que está muy lejos del régimen de 2.500 revoluciones por minuto, para el que está calculado el árbol cigüeñal de nuestro ejemplo.

Examinemos las posibles velocidades críticas. Todo armónico del diagrama de esfuerzos tangenciales tendrá una frecuencia múltiple de 1.250, que es el número de ciclos de trabajo por minuto del motor considerado.

La condición de resonancia entre un armónico y la vibración natural de frecuencia 18.400 será que esta frecuencia sea igual a 1.250 multiplicado por el orden del armónico. Obtendremos, por consiguiente, todos los números de vueltas en los que ha de temerse la resonancia dividiendo la frecuencia 18.400 de la vibración natural por los números 0,5-1-1,5-2-2,5-3, etc., y los números que resulten definirán las velocidades críticas caracterizadas por la posibilidad de un fenómeno de resonancia.

Con la frecuencia de 18.400 vueltas por minuto habría que llegar a dividir por 7,5 para encontrar el primer número de vueltas menor que las 2.500 para el que ha sido calculado el cigüeñal, obteniendo la posible primera velocidad crítica. Al seguir dividiendo por 8-8,5, etc., encontraríamos las restantes posibles velocidades críticas. Todas ellas se diferencian en número de vueltas, no muy distantes relativamente, pero en general nada peligrosas, pudiendo reservarse, como es usual, el nombre de velocidad crítica a la que pueda producir alguna perturbación.

En nuestro caso habría que examinar una primera velocidad crítica de décimosexto orden a 2.300 vueltas, una de décimoctavo orden a 2.044 vueltas, y así sucesivamente. Los armónicos del diagrama de esfuerzos tangenciales que nos interesan son el décimosexto a 2.300 vueltas, el décimoctavo a 2.044 vueltas, etc. Hecho su estudio, se ha visto que todos esos armónicos son despreciables, y, por tanto, para la vibración natural fundamental no son de temer en absoluto fenómenos de resonancia, siendo de presumir que tampoco serán de temer las otras tres vibraciones naturales que no hemos considerado de frecuencias muy superiores a la de la fundamental.

En otro artículo completaremos este estudio con las llamadas vibraciones forzadas, siempre con el deseo de ser útil en la medida de mis fuerzas a aquellos que por su afición o su obligación hubieren de ocuparse de asuntos de esta índole.


**Estos buques, sujetos a la servidumbre de la tierra y del agua, sólo pueden ser socorridos por el avión, que domina las tres dimensiones.**