



MINISTERIO DE DEFENSA

REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA

EN SAN FERNANDO

**BOLETIN ROA**

**No. 3/2004**

**“DESARROLLO DE UN ALGORITMO PARA  
LA REALIZACIÓN DE UNA ESCALA  
NACIONAL DE TIEMPO ATÓMICO”.**

Francisco Javier Galindo Mendoza

Foto Portada:  
Fachada Edificio Principal del Real Instituto y Observatorio de la Armada.  
(Siglo XVIII).



MINISTERIO DE DEFENSA

REAL INSTITUTO Y OBSERVATORIO DE LA ARMADA

EN SAN FERNANDO

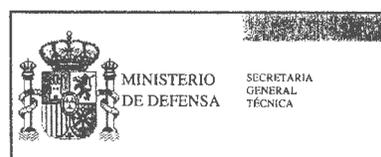
**BOLETIN ROA**

**No. 3/2004**

**“ DESARROLLO DE UN ALGORITMO PARA  
LA REALIZACIÓN DE UNA ESCALA  
NACIONAL DE TIEMPO ATÓMICO ”.**

Francisco Javier Galindo Mendoza

Edita:



NIPO: 076-04-059-6

ISSN : 1131-5040

Depósito Legal: CA 469-78

Imprime: Real Instituto y Observatorio de la Armada  
San Fernando (Cádiz). Junio 2004

**“DESARROLLO DE UN ALGORITMO PARA  
LA REALIZACIÓN DE UNA ESCALA  
NACIONAL DE TIEMPO ATÓMICO”.**

**Francisco Javier Galindo Mendoza.**



Departamento de Física Aplicada

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

**TESIS DOCTORAL**

**Autor:** Francisco Javier Galindo Mendoza.

**Título:** DESARROLLO DE UN ALGORITMO PARA LA REALIZACIÓN DE UNA ESCALA NACIONAL DE TIEMPO ATÓMICO

**Tribunal:**

Presidente: Dra. D<sup>a</sup>. Begoña Tejedor Martínez.  
Profesora Titular del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Cádiz.

Vocales: Dra. D<sup>a</sup>. Elisa Felicitas Arias.  
Jefa de la Sección de Tiempo del Buró Internacional de Pesas y Medidas.  
Dr. D. Rafael Boloix Carlos–Roca.  
Director del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando.  
Dr. D. Juan José Ruiz Pérez.  
Gabinete de Investigación Militar Operativa de la Armada Española.

Secretario: Dr. D. Oscar Álvarez Esteban.  
Profesor Titular del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Cádiz.

Se efectuó la defensa de la Tesis el día 12 de Marzo de 2004, obteniendo la calificación de: SOBRESALIENTE “CUM LAUDE” POR UNANIMIDAD.



**UNIVERSIDAD DE CÁDIZ**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA**

**“DESARROLLO DE UN ALGORITMO PARA  
LA REALIZACIÓN DE UNA ESCALA  
NACIONAL DE TIEMPO ATÓMICO”.**

Memoria para acceder al grado de Doctor, presentada por:

Francisco Javier Galindo Mendoza.

Dirigida por:

Patrizia Tavella.

Primera Investigadora, Departamento de Metrología de Tiempo,  
Frecuencia y Electromagnética del Istituto Elettrotecnico Nazionale  
“GALILEO FERRARIS” de Turín.





Istituto Elettrotecnico Nazionale  
Galileo Ferraris

Sede legale: C.so M. D'Azeglio, 42 - 10125 Torino  
Sede amm.va: Strada delle Cacce, 91 - 10135 Torino  
Tel. (+39)0113919.1 (selez. passante)  
Telefax (+39)011346384

**PATRIZIA TAVELLA, PRIMERA INVESTIGADORA, ADSCRITA AL  
DEPARTAMENTO DE METROLOGÍA DE TIEMPO, FRECUENCIA Y  
ELECTROMAGNÉTICA DEL INSTITUTO ELETTROTECNICO  
NAZIONALE "GALILEO FERRARIS" (TURÍN, ITALIA)**

AUTORIZA: A D. Francisco Javier Galindo Mendoza a presentar  
su Tesis Doctoral "Desarrollo de un Algoritmo para  
la Realización de una Escala Nacional de Tiempo Atómico".

Lo que firma, para cumplir la normativa vigente para la regulación del Tercer Ciclo de Estudios Universitarios, en Turín (Italia), a los quince días del mes de Septiembre de dos mil tres.

*Patrizia Tavella*

dott.ssa Patrizia Tavella

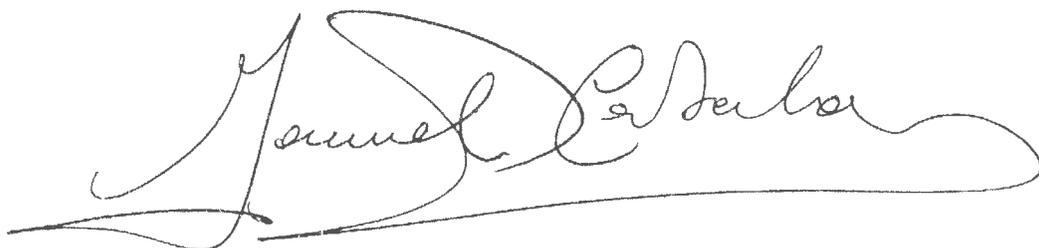


Patrizia Tavella  
Istituto Elettrotecnico Nazionale G. Ferraris  
Strada delle Cacce 91  
10135 TORINO ITALY  
tel. +39-11-3919235  
fax +39-11-3919259  
e-mail [tavella@tf.ien.it](mailto:tavella@tf.ien.it)



MANUEL CATALÁN PEREZ-URQUIOLA, COLABORADOR HONORÍFICO ADSCRITO AL DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA DE LA UNIVERSIDAD DE CÁDIZ, EN CALIDAD DE TUTOR DEL DOCTORANDO, DON FRANCISCO JAVIER GALINDO MENDOZA (32,848,373A), VISTO QUE SE REUNEN LOS REQUISITOS PREVIOS A LA TRAMITACIÓN DE LA TESIS TITULADA “DESARROLLO DE UN ALGORITMO PARA LA REALIZACIÓN DE UNA ESCALA NACIONAL DE TIEMPO ATÓMICO”, RATIFICA LA AUTORIZACIÓN EXPEDIDA Y FIRMADA POR LA DIRECTORA DE TESIS, DRA. Dña. PATRIZIA TAVELLA.

Lo que firma, para cumplir la normativa vigente para regulación del Tercer Ciclo de Estudios Universitarios, en Puerto Real, a los veinticuatro días del mes de Septiembre de dos mil tres.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Manuel Catalán', with a long horizontal flourish extending to the right.



A mi esposa, María del Pilar, y a mis dos hijos, Paula y Javi,  
... fuentes estimulantes en mi quehacer diario,  
por su derroche de paciencia y comprensión  
durante los años invertidos en este trabajo



## AGRADECIMIENTOS

Sirvan estas líneas para mostrar mi agradecimiento

- A los doctores Manuel Catalán Pérez–Urquiola, Almirante de la Armada, y Rafael Bolóix Carlos-Roca, Capitán de Navío de la Armada, a quienes les debo la oportunidad de haber llevado a cabo este trabajo.
- A Juan Palacio Rodríguez, licenciado en Ciencias Físicas y Capitán de Fragata de la Armada, al que debo consideración y un profundo respeto y a quien aprecio como algo más que un amigo, por haber estado ahí siempre que me hizo falta, ayudándome en todo momento a encontrar solución a cualquier problema, tanto de carácter administrativo como de tipo científico o técnico, surgido durante el desarrollo del trabajo.
- A Luis Batanero Guerrero, Brigada Electrónico de la Armada, magnífico profesional y amigo, a quien debo su ayuda durante la implementación física de todo el desarrollo matemático asociado a la realización de las escalas de tiempo que han sido elaboradas.
- Al profesor Sigfrido Leschiutta, Presidente del Istituto Elettrotecnico Nazionale “Galileo Ferraris” de Torino (Italia), por haber hecho factible la colaboración entre ambas Instituciones: Istituto Elettrotecnico Nazionale y Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando; facilitando entre otras cosas que la doctora Tavella, adscrita a aquel laboratorio, pudiera dirigir este trabajo de tesis.
- A mis compañeros de la Sección de Hora del Real Observatorio de la Armada, por su predisposición a colaborar siempre que les he necesitado.
- A todos los colegas del Departamento de Metrología de Tiempo, Frecuencia y Electromagnética del IEN, que me hicieron sentir como en casa durante las múltiples visitas realizadas a Italia; por el excelente trato recibido y por la ayuda que me brindaron cuando la necesité.
- A María Solano Rodríguez, a quien tengo el placer de tener por suegra, y que tantas veces ha cuidado de mis hijos para hacer posible que dedicara mi tiempo a este trabajo.
- Y finalmente y de manera muy especial a mi directora de tesis, Patrizia Tavella, quien además de magnífica profesional de acreditado prestigio ha demostrado ser ante todo una excepcional persona; por haber estado en todo momento comprometida con la dirección de esta tesis, a pesar de la distancia, del idioma y de sus compromisos profesionales y personales. Este agradecimiento lo hago extensivo a su esposo Paolo Perotto, quien a lo largo de estos años se ha hecho acreedor de todo mi cariño y afecto.



# ÍNDICE

Índice	Pág.
<b>Introducción</b>	<b>I – I</b>
<b>1. Escala de tiempo.</b>	<b>3</b>
1.1. Un sistema de datado.	3
Escala integrada de tiempo	4
Escala dinámica de tiempo	4
1.2. Escalas de tiempo en la teoría de la relatividad.	5
1.2.1. Sistemas coordinados en relatividad general.	5
1.2.2. La Resolución A4 de la IAU, 1991.	6
Recomendación I	6
Recomendación II	7
Recomendación III	7
Recomendación IV	7
1.2.3. Sistema Coordinado Baricéntrico.	8
1.2.4. Sistema Coordinado Geocéntrico.	8
1.2.5. Otras escalas de Tiempo Coordinado Geocéntrico.	9
<i>Tiempo Terrestre (TT)</i>	9
<i>Tiempo Atómico Internacional (TAI)</i>	10
<i>Tiempo Universal Coordinado (UTC)</i>	11
<i>El Sistema Coordinado Geocéntrico en Rotación (GRS<sub>R</sub>)</i>	13
1.3. Tiempos Astronómicos y definiciones Astronómicas del segundo.	13
<i>Tiempo Universal (UT1)</i>	13
<i>Tiempo de Efemérides (ET)</i>	14
1.4. Púlsar y escala de tiempo.	15
1.5. Características de una escala de tiempo.	16
Universalidad	16
Perennidad	16
Accesibilidad	16
Fiabilidad	17

Estabilidad	17
Exactitud	18
Retardo de acceso	19
<b>2. Caracterización de relojes y osciladores de precisión.</b>	<b>23</b>
2.1. Modelo de señal de un reloj.	23
2.2. Variaciones sistemáticas de la frecuencia.	26
2.3. Fluctuaciones estadísticas.	27
2.3.1. Ruidos típicos en los relojes.	28
2.3.2. La varianza de dos muestras (varianza de <i>Allan</i> , AVAR).	30
2.3.3. Varianza de dos muestras en presencia de componentes determinísticas.	35
2.3.4. Discriminación entre ruido blanco y <i>flicker</i> de fase: varianza de <i>Allan</i> modifica	36
2.3.5. Varianza de <i>Allan</i> y varianza clásica.	37
2.4. Procesado y análisis de señal en presencia de ruidos aleatorios.	38
<b>3. La media ponderada y el problema de la determinación de pesos.</b>	<b>43</b>
3.1. La necesidad de estimar la varianza de <i>Allan</i> absoluta asociada a cada reloj.	43
3.2. Estimación de las varianzas de <i>Allan</i> absolutas asociadas a cada reloj.	46
3.2.1. El clásico problema del sombrero de tres puntas.	47
3.2.2. Versión revisada del método del sombrero de tres puntas.	48
3.2.3. Estimación de la estabilidad de $N$ relojes supuesta cierta correlación entre ellos.	51
3.2.4. Consideraciones sobre la restricción impuesta por la condición $ \mathbf{R}  > 0$ sobre la estimación de las varianzas y covarianzas de <i>Allan</i> absolutas.	54
3.2.5. Resolución numérica del problema de estimación de estabilidad de $N$ relojes.	59
3.2.6. Elección de la <i>función objetivo</i> para el problema de optimización.	63
3.3. Test de independencia entre relojes.	70
3.4. Ponderación óptima en la definición de una escala de tiempo conjunto.	76
3.5. Pruebas de evaluación del algoritmo de estimación de varianzas absolutas.	79
<b>4. La predicción como garantía de continuidad en la escala conjunta.</b>	<b>87</b>
4.1. La escala conjunta y la predicción.	87
4.2. La predicción en procesos aleatorios.	92
4.2.1. Breve apunte sobre el modelo <i>ARIMA</i> .	93

4.2.2.	El filtro <i>KALMAN</i> .	94
	Deducción del modelo de reloj discreto.	96
	Ecuaciones del filtro <i>KALMAN</i> .	100
	Ciclo básico de cálculo.	101
	Ejemplo sobre datos simulados.	102
4.2.3.	Reflexiones a tener presentes en la elección del predictor.	104
<b>5.</b>	<b>Disciplinado de una escala de tiempo.</b>	<b>109</b>
5.1.	Necesidad de predecir <i>UTC(ROA)</i> en el algoritmo de disciplinado.	109
5.2.	Predicción de <i>UTC(ROA)</i> entre instantes de disciplinado.	109
5.3.	Estima del error cometido en la predicción.	112
<b>6.</b>	<b>Realizaciones de escalas de tiempo de interés en el ámbito internacional.</b>	<b>119</b>
6.1.	El algoritmo del <i>TAI</i> (BIPM).	119
6.2.	El algoritmo del <i>ATI</i> (NIST).	125
6.3.	El algoritmo de <i>TA(F)</i> .	128
6.4.	El algoritmo del <i>UTC(USNO)</i> .	132
6.5.	Otras escalas de tiempo descritas en la literatura científica internacional.	134
<b>7.</b>	<b>Realización de la escala de tiempo española.</b>	<b>137</b>
7.1.	Situación de partida.	137
7.2.	Consideraciones efectuadas en la realización de la nueva escala.	142
7.3.	El nuevo algoritmo para la realización de <i>TA(ROA)</i> .	143
	7.3.1. Adquisición de datos.	143
	7.3.2. Estima de varianzas absolutas.	145
	7.3.3. Varianzas absolutas y ponderación óptima.	147
	Bondad en la estima de la varianza asociada a cada reloj.	148
	Ponderación óptima.	150
	Ponderación óptima y peso límite.	150
	7.3.4. Predictor <i>KALMAN</i> .	151
	7.3.5. Validación de pesos.	153
	7.3.6. Proceso de cálculo de la escala.	157
7.4.	Disciplinado de <i>TA(ROA)</i> : la nueva escala <i>UTC(ROA)</i> .	160
7.5.	Realización física de <i>UTC(ROA)</i> .	164

**Conclusiones**

**C – I**

**Acrónimos**

**A – I**

**Bibliografía**

**B – I**

# INTRODUCCIÓN

Son muchas las aplicaciones de la medida del tiempo y de la frecuencia en las que se reclama un sistema de datado exacto y universal aunque sea con diferentes niveles de precisión: desde quienes se afanan cada día por tomar un autobús, a los astrónomos que observan el universo, los navegantes o los que gestionan un sistema de telecomunicaciones.

Entre las demandas más conocidas cabe destacar, por ejemplo, los sistemas de navegación, que cometen errores de al menos 30 metros (m.) al estimar la posición mediante la medida del tiempo “de vuelo” de una señal por cada 100 nanosegundos (ns) de error en los relojes; la medida de los ángulos basados en técnicas interferométricas, como los estudios geodinámicos y de radioastronomía, que demandan errores relativos de sincronización entre dos relojes menores de alguna unidad en  $1 \times 10^{-15}$  sobre tiempos de medida de 1000 segundos (s); determinados sistemas de telecomunicaciones que necesitan de osciladores de primer nivel, con incertidumbres relativas en la frecuencia menores de  $1 \times 10^{-11}$ ; algunos sistemas anticolidión con técnicas radar, basados en la medida del tiempo, que deben tener incertidumbres relativas menores de  $1 \times 10^{-9}$  sobre tiempos típicos de medida de 1 milisegundo (ms).

Todos los sistemas citados como ejemplo necesitan de la definición de un sistema de referencia universal que dé un significado único a cada medida y que permita la comparación de medidas efectuadas en lugares e instantes diferentes. La referencia de tipo temporal se denomina “Escala de Tiempo” y constituye un sistema para datar eventos.

Con la nueva definición del segundo, adoptada en 1967 durante la 13ª Conferencia General de Pesas y Medidas, se rompe con la tradición de basar la unidad de tiempo del Sistema Internacional de unidades (SI) en la dinámica de la Tierra: en la rotación en torno a su eje (segundo de tiempo solar medio, en vigor hasta 1960) y en su traslación alrededor del Sol (segundo del tiempo de efemérides, en vigor entre 1960 y 1967), dando paso a una nueva concepción basada en transiciones cuánticas del átomo de

cesio. La nueva determinación del segundo, que se materializa en tiempo real a partir de relojes atómicos de precisión, puede ir acumulándose sin interrupción para dar lugar a una escala de tiempo tan precisa como nunca antes pudo haber sido definida.

No existe un único patrón de frecuencia que genere la referencia internacional, la realización práctica basada en un solo patrón vendría acompañada de componentes indeseables o ruidos que le alejaría de la definición teórica de la escala, sin posibilidad de eliminar o al menos reducir semejante inestabilidad. Por otra parte, la realización práctica a partir de un solo patrón resultaría ser arriesgada, por cuanto no podría asegurarse la robustez de la escala.

Cuando se desea disponer de una referencia temporal al máximo nivel de exactitud, fiabilidad y estabilidad, en particular si se trata de una referencia metrológica primaria, es importante disponer de más de un patrón de calidad parecida, de modo que mediante comparación entre los mismos pueda definirse un “segundo medio” con las mejores características estadísticas, capaz de garantizar la continuidad de la escala, incluso en caso de fallo de alguno de los patrones integrantes.

De acuerdo con las más recientes recomendaciones efectuadas, referentes a las realizaciones de escalas de tiempo, la exactitud ha pasado de mantenerse dentro de  $\pm 1$  microsegundo ( $\mu\text{s}$ ) (Comité Consultivo Internacional de Radiocomunicaciones, Rec. 685: Sincronización Internacional de las Escalas de Tiempo UTC, 1990) respecto de la referencia adoptada internacionalmente: el Tiempo Universal Coordinado (UTC), a  $\pm 100$  ns respecto de dicha referencia (Comité Consultivo para la Definición del Segundo, 12<sup>a</sup> Asamblea, 1993). Con las actuales prestaciones de los patrones atómicos a disposición, no resulta suficiente el empleo de un solo patrón en la generación de la escala nacional de tiempo, siendo por tanto necesaria la elaboración de una escala de tiempo atómico a partir de un determinado algoritmo de cálculo capaz de proporcionar una marcha media con mejores prestaciones en cuanto a fiabilidad y estabilidad que un único patrón, una vez identificado previamente los oportunos modelos estadísticos que permitan estimar las inestabilidades y predecir la marcha en el tiempo de cada patrón. Con posterioridad, deberá aplicarse un algoritmo de disciplinado capaz de conseguir el acuerdo deseado entre la escala de tiempo atómico realizada en laboratorio y el UTC sin

afectar significativamente a la estabilidad alcanzada previamente al gobierno de la escala.

Una vez introducido el problema en el capítulo 1, con alusión a la definición y tipos de escalas de tiempo existentes, a las principales definiciones de escalas temporales y a las características que cualquier escala temporal debe reunir, se afronta la caracterización del modelo de señal que mejor se ajusta a los relojes de precisión (capítulo 2). Los capítulos 3 a 5 se dedican a cada uno de los tres problemas fundamentales presentes en la realización de la escala, a saber: la mejor manera en que debe combinarse la información relativa a cada reloj para optimizar cierta cualidad de la escala de tiempo conjunta, la técnica establecida para evitar discontinuidades en la escala ante el establecimiento de nuevos valores en los parámetros que rigen la combinación de la información relativa a cada reloj, y el disciplinado de la escala que proporcione el necesario grado de conformidad con el UTC. En el capítulo 6 se hace un recorrido sobre algunas de las realizaciones de escalas de tiempo más interesantes en el ámbito internacional. El capítulo 7 trata expresamente la nueva realización de la escala UTC en el laboratorio del Real Instituto y Observatorio de la Armada, a partir del conjunto de relojes a disposición. Como resultado se presenta una nueva realización del UTC con cualidades mejoradas respecto de las que mostraba hasta el momento.



“Ocurra lo que ocurra, aun en el día mas borrascoso, las horas y el tiempo pasan”

*SHAKESPEARE, William*



## Capítulo 1

# ESCALA DE TIEMPO

### 1.1. Un sistema de datado

La verdadera naturaleza del tiempo no tiene explicación racional; simplemente sentimos que éste transcurre, sin parar ni dar marcha atrás. Pero al margen de las consideraciones filosóficas, la experiencia indica que la “localización” de cualquier evento viene especificada por tres coordenadas espaciales  $(x, y, z)$  y una coordenada temporal  $(t)$ ; las cuatro deben tener un significado universalmente reconocido y único, debiendo fijarse los diferentes sistemas de referencia y las normas de paso de unos a otros.

Intuitivamente, una escala de tiempo se define como el eje temporal de un sistema de coordenadas. Oficialmente, el *Comité Consultivo Radio Internacional* (CCIR) define la escala de tiempo como un sistema de ordenación inequívoca de los acontecimientos (Recomendación 686, [1]).

Aunque la definición de una escala de tiempo pueda parecer tarea fácil, a partir de la observación de un proceso físico en evolución y la definición unívoca de la relación entre el proceso y la escala temporal, muchas disciplinas de la ciencia requieren escalas de tiempo de referencia cuyas propiedades metrológicas superen determinado umbral en función de cada necesidad. Existe una dificultad añadida: todo fenómeno temporal está afectado por los campos gravitatorios y las velocidades relativas al observador, conforme se deriva de la teoría de la relatividad general, y es precisamente en este marco en el que deben definirse las escalas de tiempo, como se verá más adelante.

Dos son los criterios fundamentalmente empleados en la definición de una escala de tiempo. En virtud del criterio empleado, las escalas se clasifican en: “escalas integradas de tiempo” y “escalas dinámicas de tiempo”.

### **Escala integrada de tiempo**

Es aquella en la que el dato principal lo constituye una unidad de duración o intervalo de tiempo definido a partir de un proceso físico con dos estados bien identificables, como el tiempo transcurrido entre estos dos estados cuando el proceso se repite bajo las mismas condiciones. Son ejemplos de tales unidades de escala la oscilación de un péndulo o el periodo de la radiación electromagnética emitida en una transición electrónica entre dos niveles energéticos.

Una vez definida la unidad de duración, se establece un origen convencional, a partir del cual se acumulan unidades de duración sin tiempos muertos y sin interrupciones.

La actual escala de tiempo de referencia a escala mundial, el Tiempo Atómico Internacional, TAI, es una escala integrada constituida mediante acumulación de segundos atómicos definidos como un número de periodos de la radiación correspondiente a una determinada transición electrónica en átomos de cesio.

### **Escala dinámica de tiempo**

Es aquella en la que el tiempo está considerado como el parámetro de un modelo matemático que describe la dinámica de un sistema físico, con la condición de que cada configuración dinámica pueda estar asociada sin ambigüedad a un único instante (o aun correspondiéndole múltiples instantes, que puedan distinguirse al menos los diversos instantes que se corresponden con una misma configuración). La medida del tiempo se convierte por tanto en una medida de posición, y la unidad de tiempo se define como una duración particular. Un ejemplo lo constituye el movimiento de traslación de la Tierra en torno al Sol: en un modelo simplificado en que ambos cuerpos interactúan sin influencias o perturbaciones externas, la dinámica del sistema queda establecida por las leyes de *Kepler*, lo que lleva finalmente a una relación que liga la posición de la Tierra con cada instante de tiempo. La realización de una escala dinámica implica por tanto la observación de un sistema físico y posterior transformación de una medida de posición en una medida de tiempo.

Son ejemplos de escalas dinámicas el Tiempo Universal, UT1, y el Tiempo de Efemérides, ET, basadas respectivamente en la rotación de la Tierra sobre su eje y en torno al Sol.

## 1.2. Escalas de tiempo en la teoría de la relatividad

### 1.2.1. Sistemas coordinados en relatividad general

Mientras que para la mecánica Newtoniana existe un tiempo absoluto, que transcurre de idéntica manera independientemente del observador, para la teoría relativista el tiempo no posee identidad en sí mismo; más bien constituye, junto al espacio, un continuo espacio–tiempo cuadrimensional. En relatividad general, las escalas de tiempo son consideradas como una de las coordenadas de los sistemas de referencia espacio–tiempo de cuatro dimensiones.

Debido a la curvatura del espacio–tiempo, las unidades de escala de las cuatro coordenadas no presentan una relación constante, en sentido global, con las cantidades propias (invariantes ante transformaciones coordenadas y localmente mensurables). En el marco de la mecánica Newtoniana (empleando la geometría Euclidiana) siempre es posible definir coordenadas de manera que sus unidades de escala sean iguales a las distancias y duraciones medidas en cualquier parte. En relatividad general esto es imposible ya que las cantidades medidas y las unidades de escala coordenadas guardan una relación que depende de la posición espacio–temporal del observador que efectúa la medida. En el ámbito de las escalas temporales, esto implica que la relación entre el intervalo de tiempo–coordenada y la realización local del segundo, empleando un reloj atómico por ejemplo, depende de la posición del reloj.

Un sistema de coordenadas en relatividad general está definido por un origen espacial dependiente del tiempo, una rotación de los ejes espaciales dependiente del tiempo, un origen temporal y un conjunto de condiciones coordenadas. El sistema de coordenadas viene caracterizado por su tensor métrico  $g_{\alpha\beta}(x^\lambda)$  (en el que  $x^\lambda$  representa a las cuatro coordenadas espacio–tiempo, con  $x^0 = ct$  y  $t$  el tiempo–coordenada), que depende de la posición y del tiempo, y que debe conocerse para aquella región del espacio–tiempo en que es aplicable el citado sistema. El tensor métrico proporciona la relación local entre las cantidades propias y coordenadas mediante la ecuación básica:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta \quad (1.1)$$

ecuación en la que se ha empleado la convención de suma de *Einstein*, y que se conoce como Ecuación Métrica, en la que  $ds$  denota un elemento de línea espacio-tiempo infinitesimal, en tanto  $d\tau$  representa el incremento de tiempo propio realizado por un reloj ideal y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

En principio, el espacio-tiempo puede quedar descrito por cualquier conjunto de coordenadas. Mediante definición de varios sistemas de coordenadas solapados, cada cual válido en una región determinada, el tratamiento de problemas prácticos y la relación entre coordenadas y cantidades medidas pueden simplificarse en gran medida. Tales definiciones proporcionan varios tiempos-coordenada, cada uno de ellos válido en determinada región del espacio-tiempo; todos ellos relacionados mediante la correspondiente transformación coordenada relativista.

La necesidad de definir diferentes sistemas relativistas de coordenadas espacio-tiempo, en particular el baricéntrico y el geocéntrico, fue reconocido por la *Unión Astronómica Internacional* (IAU) en su Resolución A4 de 1991 [2]. Esta Resolución incluye la definición de las escalas de tiempo-coordenada baricéntrico y geocéntrico, proporcionando las bases teóricas para la definición del TAI.

### 1.2.2. La Resolución A4 de la IAU, 1991

La *Unión Astronómica Internacional* aprobó la Resolución A4 en su XXI Asamblea General mantenida en Buenos Aires en 1991. El texto completo de la citada Resolución se recoge en [3]. Dicha Resolución contiene varias Recomendaciones de importancia para la definición y realización de escalas de tiempo-coordenada, razón por la que se exponen a continuación:

#### Recomendación I

Introduce explícitamente la teoría general de la relatividad como trasfondo teórico para la definición de los marcos de referencia espacio-tiempo. Proporciona la forma de la métrica a usar en los sistemas coordenados centrados en el baricentro de un conjunto de masas, con un mínimo grado de aproximación en  $ds^2$  en la forma:

$$(1.2) \quad ds^2 = -\left(1 - 2\frac{U}{c^2}\right)(dx^0)^2 + \left(1 + 2\frac{U}{c^2}\right)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right]$$

$U$  es la suma de los potenciales gravitatorios del conjunto de masas y del potencial de marea generado por masas externas al conjunto, cuyo efecto desaparece en el baricentro. La aproximación del tensor métrico, deducida como solución a las ecuaciones de *Einstein* empleando la aproximación “campo débil” o “pos Newtoniana”, es suficiente para el nivel de exactitud de observación actual y en un futuro próximo. No obstante, podrían añadirse términos de mayor orden en la aproximación en serie de potencias del tensor métrico si se hiciera necesario.

## **Recomendación II**

Esta Recomendación indica que los ejes coordenados espaciales con su origen en el centro de masas de la Tierra no deberían mostrar rotación global con respecto a un conjunto de objetos extragalácticos distantes (requisito para sincronizar un conjunto de relojes conforme a la convención de sincronización de *Einstein* [4]); que las coordenadas tiempo para todos los sistemas coordenados deberían derivarse de una escala de tiempo realizada mediante relojes atómicos funcionando en la Tierra y que las unidades físicas básicas del espacio–tiempo son el segundo SI para el tiempo propio y el metro SI para la longitud propia. Esta recomendación es aplicable del mismo modo a los relojes a bordo de satélites terrestres.

## **Recomendación III**

Define las unidades de escala y los orígenes de todos los tiempos–coordenada, y designa los tiempos–coordenada baricéntrico del sistema solar y geocéntrico como Tiempo Coordinado Baricéntrico (TCB) y Tiempo Coordinado Geocéntrico (TCG) respectivamente.

## **Recomendación IV**

La Recomendación IV define el Tiempo Terrestre, TT, como una escala de tiempo coordinado geocéntrico que difiere del TCG en una proporción constante; la unidad de escala del TT ha sido elegida de modo que concuerda con el segundo SI del geoide en rotación. La estima actual de la citada proporción ha sido redefinida recientemente como una constante de valor  $6.969290134 \cdot 10^{10}$  (Resolución B1.9 de la XXIV Asamblea General de la IAU, celebrada en Manchester en Agosto de 2000).

### 1.2.3. Sistema Coordinado Baricéntrico

Se define el centro de masas del sistema solar como origen espacial del sistema celeste de referencia baricéntrico (BRCS), con los ejes coordenados espaciales sin mostrar rotación respecto a un conjunto de objetos extragalácticos. Se asume que la rotación del universo, supuesta nula, viene representada por la rotación (en promedio) de un gran número de objetos extragalácticos.

El tiempo-coordenada (TCB) toma como origen un suceso de referencia localizado en el geocentro y fechado en TAI: la lectura del TCB el 1 de Enero de 1977, a 0 h 0 min 0 s (TAI) en el geocentro es 0 h 0 min 32.184 s del 1 de Enero de 1977. La elección de este origen ha sido arbitraria y coincide con el establecido para el TCG y el TT.

Para obtener la ecuación métrica en coordenadas baricéntricas ( $x^0 = c \text{TCB}$ ,  $x^i$ ), basta con sustituir  $x^0$  por su valor  $c \text{TCB}$  en (1.2), con  $U$  representando el potencial gravitatorio Newtoniano total.

### 1.2.4. Sistema Coordinado Geocéntrico

Se define el centro de masas de la Tierra como origen espacial del sistema celeste de referencia geocéntrico (GRCS), con los ejes coordenados espaciales sin mostrar rotación respecto a un conjunto de objetos extragalácticos, y consecuentemente con respecto al BRCS.

El origen del Tiempo Coordinado Geocéntrico (TCG) es idéntico al del TCB, es decir, la lectura del TCG el 1 de Enero de 1977, a 0 h 0 min 0 s (TAI) en el geocentro fue 0 h 0 min 32.184 s del 1 de Enero de 1977.

En principio, podría pensarse que la transformación de uno a otro sistema de referencia vendría dada por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_j, (\text{TCB}) \\ \text{TCG} &= \text{TCB} \end{aligned}$$

En el que las coordenadas del GCRS se expresan por  $(w^0 = c\text{TCG}, w^j)$ , en tanto el subíndice  $E$  se refiere al centro de masas de la Tierra.

Pero las coordenadas geocéntricas así obtenidas no son las adecuadas ante problemas físicos en las inmediaciones de la Tierra, como por ejemplo el de descripción del movimiento de satélites terrestres, pues introducen innecesarios a la vez que extensos y complejos términos relativistas. La solución pasa por determinar un conjunto de coordenadas geocéntricas en el que no hagan acto de presencia estos términos espurios, alcanzándose así la expresión más simple en problemas de este tipo.

El sistema coordinado geocéntrico adoptado reúne los requisitos anteriores. Su deducción puede obtenerse siguiendo diferentes métodos, unos más rigurosos que otros, pero todos de resultados coincidentes hasta el nivel de interés práctico actual y en un futuro próximo [5–8].

La métrica del GRCS con términos limitados al  $O(c^{-2})$  viene dada por la ecuación:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 \tau^2 \\ &= -\left\{1 - \frac{2}{c^2} [U_E(\mathbf{w}) + \mathbf{U}(\mathbf{x}_E - \mathbf{w}) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_E) - U_{,k}(\mathbf{x}_E)w^k]\right\} c^2 d\text{TCG}^2 + \\ &\quad + \left\{1 + \frac{2}{c^2} [U_E(\mathbf{w}) + \mathbf{U}(\mathbf{x}_E - \mathbf{w}) - \mathbf{U}(\mathbf{x}_E) - U_{,k}(\mathbf{x}_E)w^k]\right\} \delta_{ij} dw^i dw^j \end{aligned} \quad (1.4)$$

En la que  $U_E(\mathbf{w})$  y  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  denotan los potenciales gravitatorios Newtonianos de la Tierra y de las masas externas respectivamente, siendo  $\delta_{ij}$  el símbolo de *kroncker*.

### 1.2.5. Otras escalas de Tiempo Coordinado Geocéntrico

#### *Tiempo Terrestre (TT)*

Ha sido definido como un tiempo coordinado geocéntrico, que difiere del TCG en una proporción constante; la unidad de TT ha sido elegida de modo que coincide con la unidad de tiempo propio (segundo SI) sobre el geoide en rotación.

El origen del TT es idéntico al del TCG y TCB.

El TT es una forma ideal del TAI, salvando la separación de  $32.184 s_{TT}$  introducida entre ambas escalas con el fin de asegurar en la medida de lo posible la continuidad con el Tiempo de Efemérides (ET) empleado hasta aquel momento.

### ***Tiempo Atómico Internacional (TAI)***

La definición del TAI (o realización del TT), aprobada por el *Comité Internacional de Pesas y Medidas* (CIPM) en 1970 y reconocida por la *Conferencia General de Pesas y Medidas* en 1971, es la siguiente:

*El Tiempo Atómico Internacional (TAI) es la coordenada de referencia temporal establecida por el Buró Internacional de la Hora sobre la base de las lecturas de relojes atómicos operando en diferentes lugares de acuerdo con la definición del segundo, la unidad de tiempo del Sistema Internacional de Unidades.*

La definición del segundo, adoptada por la decimotercera CGPM (1967), continúa siendo:

*El segundo es la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.*

Con el fin de acomodar la definición del TAI en un contexto relativista, el *Comité Consultivo para la Definición del Segundo* (CCDS), en su novena sesión mantenida en 1980, la completa de la siguiente manera:

*El TAI es una escala de tiempo coordinado definida en un marco de referencia geocéntrico, en el que se toma como unidad de escala el segundo SI realizado sobre el geoide en rotación.*

Desde 1988, la responsabilidad del TAI recae sobre el BIPM.

La escala TAI tal cual está definida es fiable, mantiene un alto grado de exactitud, pero además proporciona (a) una base para la sincronización de relojes de usuarios, (b) una unidad de tiempo (coordinada) y (c) una realización del argumento tiempo de teorías dinámicas en un contexto relativista [9]. Ello le ha hecho acreedora del reconocimiento oficial de adopción y difusión, como referencia convencional para todas las aplicaciones. Por otra parte, aunque existe la necesidad de otras escalas de tiempo, puede accederse a éstas a través de la relación que guardan con el TAI.

El TAI es hasta el momento la única realización de escala temporal introducida; todas las anteriores constituyen escalas de tiempo ideales. En cuanto al acrónimo empleado en la designación de esta escala, corresponde comentar que constituye el único caso conocido de realizaciones de escalas de tiempo en el que el acrónimo no se forma a partir del empleado para la escala de tiempo teórica seguido de un identificador entre paréntesis.

El origen del TAI no está bien definido, se ha adoptado oficialmente que TAI y Tiempo Universal (UT1) coincidieron el 1 de Enero de 1958, pero esta definición está sujeta a incertidumbres en diferentes realizaciones locales de UT1 en aquel momento, y en subsiguientes re-evaluaciones de UT1 [9].

En la actualidad, la exactitud del segundo TAI para tiempos de promediado en torno a un mes es inferior a  $1 \times 10^{-14}$ , con una incertidumbre ( $1 \sigma$ ) inferior a  $2.2 \times 10^{-15}$ . En cuanto a la relación que existe entre la unidad de tiempo propio para un observador situado en un punto fijo a altitud  $h$  sobre el geoide y la unidad de escala del TAI, el segundo de tiempo propio es más corto que el segundo TAI en  $1.1 \times 10^{-13} h/\text{km}$  aproximadamente.

### ***Tiempo Universal Coordinado (UTC)***

Definida en 1972, constituye hoy día la base de las horas legales. Tiene su origen en el interés para la navegación astronómica, para la que la escala de tiempo a emplear no debería apartarse más de un segundo del UT1. El UTC es una combinación del TAI y el UT1 según las siguientes expresiones aplicadas a un evento con tiempo coordinado  $u$  :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \text{UTC}(u) - \text{TAI}(u) &= n s_{\text{TAI}} \text{ (n entero)} \\ |\text{UTC}(u) - \text{UT1}(u)| &< 0.9 s_{\text{TAI}} \end{aligned}$$

UTC y TAI difieren en un número entero de  $s_{\text{TAI}}$  (conocidos como segundos intercalares), igual a 32 desde el 1 de Enero de 1999, a 0 h 0 min 0 s (UTC); de este modo se asegura que, en promedio a lo largo de los años, el Sol está sobre el meridiano de *Greenwich* a 12 h 0 min 0 s  $\pm$  0.9 s (UTC). El UTC pasa a ser el vigente sucesor del Tiempo Medio en *Greenwich*, GMT, empleado cuando la unidad de tiempo era el día solar medio.

La decisión sobre el ajuste de segundos intercalares recae en el Servicio Internacional de Rotación de la Tierra (IERS), quien sobre la base de la divergencia prevista entre el TAI y UT1, emplea como fechas prioritarias para el cambio el último día de Junio o de Diciembre, quedando como segunda preferencia el último día de Marzo o de Septiembre.

Por definición el UTC mantiene las mismas cualidades metrológicas que el TAI: es un tiempo coordinado basado en relojes atómicos; pero a su vez sigue el movimiento de rotación de la tierra por debajo de 1  $s_{\text{TAI}}$ . La escala UTC es la base universal para la distribución del tiempo en todo el mundo. Las horas locales se derivan del UTC mediante introducción de un desplazamiento de tiempo, que en la inmensa mayoría de los casos consiste en un número entero de horas, y que a su vez puede cambiar según la época del año, conforme a criterios establecidos en ámbitos nacionales o regionales.

Los laboratorios de tiempo nacionales mantienen realizaciones de UTC, designadas como  $\text{UTC}(k)$  y disponibles en tiempo real (UTC(ROA)), por ejemplo, es la realización del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, base de la Hora Legal española). Esta escala se obtiene mediante el gobierno en frecuencia de un reloj maestro, aunque en ocasiones no existe la representación física, y se obtiene a partir de correcciones, disponibles en tiempo real, a las lecturas de un reloj. En 1990, el CCIR recomendó que las diferencias  $|\text{UTC} - \text{UTC}(k)|$  fueran menores de 1  $\mu\text{s}$  [1]. Esta calidad de sincronización, mantenida por la mayoría de los laboratorios participantes en la generación del TAI y del UTC, se intenta mejorar tal como ha sido expresado por el

CCDS en el año 1993, que ha establecido como deseable objetivo el mantenimiento de UTC-UTC( $k$ ) dentro de  $\pm 0.1 \mu\text{s}$ .

### ***El Sistema Coordinado Geocéntrico en Rotación (GRS<sub>R</sub>)***

Para la mayor parte de las aplicaciones terrestres, se emplea un marco geocéntrico en rotación con la Tierra. Este tipo de marcos presentan la ventaja de que las coordenadas espaciales de puntos sobre la superficie terrestre varían en el tiempo en cantidades pequeñas, a menudo despreciables.

Un sistema coordinado geocéntrico en rotación (GRS<sub>R</sub>) puede definirse a partir de un sistema de referencia geocéntrico sometido a una rotación de velocidad angular  $\omega_E$  (velocidad angular de la Tierra). El tiempo-coordenada del GRS<sub>R</sub> es el mismo que el del GRS: el TCG.

Algunas de las realizaciones de GRS<sub>R</sub> más empleadas son el Sistema Geodésico Mundial, WGS84, y el Marco de Referencia Terrestre del IERS, por ejemplo el ITRF94.

## **1.3. Tiempos Astronómicos y definiciones Astronómicas del segundo**

### ***Tiempo Universal (UT1)***

El Tiempo Universal, UT1, es un tiempo dinámico derivado de la observación de la rotación de la Tierra: es por tanto proporcional al ángulo de rotación de la Tierra en torno a su eje ( $\omega$ ). Como  $\omega$  es variable, la unidad de escala de UT1, o segundo de tiempo solar medio, tiene una duración variable que alcanza el  $10^{-7}$  en términos relativos. El coeficiente de proporcionalidad ha sido elegido de modo que 24 horas de UT1 estén muy próximas a la duración media del día, y la fase ha sido elegida de modo que las cero horas de UT1 se corresponde, en promedio, a la medianoche en el meridiano de *Greenwich*.

La unidad de tiempo asociada a esta escala es el segundo de tiempo solar medio. Su definición no es muy precisa: *es la fracción 1/86400 del día solar medio*. Esta definición del segundo constituyó la definición del segundo SI hasta 1960. Los Astrónomos estimaban que la incertidumbre con que podía realizarse esta unidad era del

orden de  $10^{-9}$ , pero el mayor inconveniente radicaba en que este nivel de exactitud se alcanzaba tras décadas de observaciones astronómicas seguidas de los correspondientes análisis y filtrados de datos.

Aunque la definición del segundo basada en la rotación de la Tierra dejó de emplearse en 1960, el Tiempo Universal no ha dejado de ser la referencia práctica para la diseminación de tiempo, aunque con tolerancias cada vez mayores. Hasta 1960, las señales de difusión horaria diseminaban el UT2 (UT1, corregida por variaciones anuas de hasta  $\pm 30$  ms, debido a la redistribución cíclica de masas que causan variaciones cíclicas en el momento de inercia de la Tierra) con la máxima precisión posible. En 1959, Inglaterra y Estados Unidos acuerdan coordinar sus emisiones de señales de tiempo y frecuencia sobre la base de una escala de tiempo atómico que más adelante recibiría el nombre de Tiempo Universal Coordinado [10]. El número de países que se adhieren a la coordinación, encomendada al *Buró Internacional de la Hora* (BIH), aumenta paulatinamente. Inicialmente, UTC se deriva de una escala de tiempo atómico, establecida con el valor convencional de 9,192,631,770 Hz de frecuencia de la transición de cesio, mediante selección anual de una separación de frecuencia y ocasionales saltos de tiempo de 50 ms para mantenerla dentro de  $\pm 50$  ms respecto de UT2. Los saltos de tiempo se incrementan a  $\pm 100$  ms en 1963. En 1965, el BIH decide definir UTC según una relación estricta con la escala atómica de la que procede, que más tarde se convertirá en el TAI [11]. Este sistema se mantiene hasta 1972, fecha en que UTC toma una nueva definición que se mantiene hoy día.

### ***Tiempo de Efemérides (ET)***

Esta escala temporal es una escala dinámica basada en el movimiento de revolución de la Tierra en torno al Sol. Midiendo la posición angular del Sol respecto de un sistema de referencia celeste y utilizando la órbita aparente del Sol, a cada medida de longitud se le hacía corresponder unívocamente un instante de tiempo. Al no seguir una ley lineal la variación aparente de longitud, era importante fijar la época a la que referir la definición de la unidad.

En 1956, el CIPM adopta como segundo del SI al segundo del tiempo de efemérides, definido por la IAU en los siguientes términos:

*El segundo es la fracción  $1/31,556,925.9794$  del año trópico el 0 de Enero de 1900, a 12 h 0 min 0 s (ET)*

En la Asamblea General de la IAU de 1958 se adoptó la siguiente definición para la época en tiempo de efemérides:

*El tiempo de efemérides se cuenta desde el instante próximo al principio del año 1900 del Calendario Gregoriano, cuando la longitud media geométrica del Sol fue  $279^{\circ} 41' 48''.04$ , en cuyo instante la media del tiempo de efemérides fue precisamente  $0^d 12^h$  de Enero de 1900.*

La definición de segundo SI fue ratificada en la undécima *Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM)* en 1960 e invalidada en la decimotercera CGPM (1967), al adoptarse la definición atómica del segundo.

Como consecuencia de las resoluciones adoptadas en la Asamblea General de la IAU en 1976, el ET es sustituido por el *Tiempo Dinámico Terrestre (TDT)*. En la Asamblea de la IAU de 1991, se retiene el concepto de TDT aunque con un nuevo nombre: tiempo terrestre.

#### **1.4. Púlsar y escala de tiempo**

A finales de los años sesenta se observan por primera vez estrellas con gran velocidad de rotación, que emiten un haz de radiación electromagnética barriendo la Tierra con cada revolución como si se tratara de un faro. Estas estrellas, denominadas púlsares, fueron identificadas como de neutrones, muy pesadas, caracterizadas por un fuerte campo magnético y un intenso campo gravitatorio, que conforme a la teoría de la evolución estelar se encuentran en su última fase tras la explosión de una supernova.

En 1982 se descubre el púlsar PSR1937+21, con un periodo de rotación de 1.6 ms [12], y tras éste, otros muchos de características similares se han ido descubriendo. El retardo de propagación de señales procedentes de púlsares varía con el movimiento de la Tierra, con el del propio púlsar y por otras muchas razones. Tras evaluar estas variaciones, se demuestra que dentro de ciertos límites de incertidumbre, (a) la ley de rotación del

púlsar disminuye linealmente con el tiempo, y (b) tras corregir por la deceleración lineal, es como un reloj tan estable como los mejores relojes atómicos y escalas atómicas.

En el estudio de estos púlsares, el espacio de tiempo en el que la inestabilidad del TAI deja de ser despreciable es inferior a un año.

La deceleración de la rotación en este tipo de púlsares descarta su posible uso como base para la definición del segundo, aunque la combinación de datos púlsar con las lecturas de relojes atómicos puede generar escalas de tiempo mixtas, más estables que las escalas de tiempo atómico puras en el largo plazo.

### **1.5. Características de una escala de tiempo**

Para que un sistema de datado resulte útil y científicamente válido, debe satisfacer una serie de requisitos fundamentales, entre los que deben destacarse:

#### **Universalidad**

Una escala de tiempo debe ser aceptada por todos y considerada adaptada a los diferentes ámbitos en que se prevea su uso. Requiere consecuentemente el previo acuerdo de uso por parte de la comunidad que la adopta, y dentro de ésta, entre las diversas categorías de usuarios: navegantes, científicos, técnicos, etc.

#### **Perennidad**

La escala de tiempo debe ser extensible al pasado y al futuro. Esta cualidad no siempre puede verificarse directamente; si bien la propia definición de la escala, basada en una unidad de escala y un instante inicial, permite enlazar con alguna otra escala preexistente mediante la adecuada definición del origen, lo cual garantiza la continuidad.

#### **Accesibilidad**

Una referencia universal, reconocida por toda una comunidad, debe ser fácilmente accesible y transferible a los diferentes usuarios, sea cual sea la región en la que se encuentren.

## Fiabilidad

Una escala de tiempo no puede verse interrumpida por el hecho de que algún elemento integrante en su realización presente un fallo de funcionamiento; para concretar, una escala integrada constituida por un conjunto de relojes no puede interrumpirse si uno de los relojes se para. La fiabilidad requiere redundancia, así como la eventual colaboración nacional o internacional entre laboratorios que mantienen relojes atómicos.

La solución más simple a este problema consiste en reemplazar el reloj que ha fallado por otro. Esto es lo que normalmente se hace en los laboratorios de Tiempo que generan una aproximación a la escala Tiempo Universal Coordinado ( $UTC(k)$ ). Habitualmente, la escala  $UTC(k)$  está directamente vinculada a la salida de un reloj físico, generalmente al mejor del conjunto de relojes ubicados en un laboratorio, motivo por el cual se le designa “*master clock*”. La salida del *master clock* se gobierna mediante pequeños y predeterminados saltos de tiempo y frecuencia, a través de un instrumento específico conocido como “*microphase stepper*” (comúnmente denominado *microstepper*), para que se mantenga próximo a UTC (Recomendación del CCIR núm.: 536, [1]).

A menudo, la fiabilidad queda asegurada mediante el uso de varios relojes en el desarrollo de una escala de tiempo conjunta. Este tipo de escalas no suelen realizarse físicamente; la mayoría son escalas de papel en las que, entre otros aspectos, se minimizan los posibles efectos que resultan de introducir o extraer determinado reloj en un instante determinado. Es obvio que a mayor número de relojes participando en la realización de una escala de este tipo, menor será el efecto producido por la “entrada” o “salida” de un reloj; esta es la razón fundamental por la que la escala TAI se genera por el *Buró Internacional de Pesas y Medidas* (BIPM) sobre la base de los datos de relojes atómicos de todo el mundo, que funcionan según diferentes principios conforme a la definición del segundo del Sistema Internacional de Unidades (SI).

## Estabilidad

Entendida como la facultad de mantener un intervalo de escala constante, aun cuando difiera del intervalo de tiempo ideal. Una medida de estabilidad consiste en la estima de la dispersión de los valores de frecuencia  $\nu(t)$  con el tiempo; la herramienta más

comúnmente empleada en la estimación de la estabilidad es la varianza de dos muestras, o varianza de Allan  $\sigma_y^2(\tau)$ , que depende del intervalo de tiempo  $\tau$  de muestreo u observación.

La estabilidad de la escala de tiempo conjunto depende de las inestabilidades de los relojes del conjunto y del diseño del algoritmo empleado para generar la mencionada escala. El algoritmo debe ser capaz de tratar adecuadamente cualquier cambio en el comportamiento de un reloj.

El concepto de estabilidad solo es aplicable a escalas de tiempo en carrera libre. Dado que una escala UTC( $k$ ) está sometida a variaciones de frecuencia para mantenerse próxima a UTC, la estabilidad a corto y medio plazo se ve inevitablemente degradada.

### **Exactitud**

La exactitud de una escala de tiempo puede definirse como la capacidad de mantener un intervalo de escala medio tan próximo como sea posible a la definición del intervalo de tiempo. Para todas aquellas escalas que realizan un TT, el intervalo de escala media debería aproximarse tanto como fuera posible al segundo SI sobre el geoide en rotación.

En los patrones de frecuencia primarios, la estima de exactitud se basa en consideraciones físicas sobre las condiciones de realización y sobre los fenómenos que perturban la situación experimental respecto de la definición. Cuando no es posible realizar esta estima, la evaluación se lleva a cabo mediante comparación de la duración del intervalo de escala con la mejor realización del segundo SI proporcionado por patrones de frecuencia primarios. En cualquier caso, es necesario tener en cuenta el efecto de corrimiento al rojo gravitatorio que acusan estos patrones, para transformar el segundo SI realizado en una realización sobre el geoide (elevación nula). La exactitud de una escala de tiempo viene dada generalmente por una diferencia de frecuencia entre la escala de tiempo y el patrón de frecuencia primario, evaluada para un tiempo de promediado coincidente con el de mejor estabilidad de la escala, y teniendo en cuenta la incertidumbre del patrón de frecuencia primario.

Las mejoras en la exactitud suelen llevarse a cabo como complemento al algoritmo de optimización de la estabilidad de la escala. Esta mejora se consigue mediante correcciones de frecuencia, de amplitud mucho menor que la de las fluctuaciones de la escala de tiempo, para evitar la posible degradación de la estabilidad.

### **Retardo de acceso**

Esta cualidad está relacionada con la calidad de los observables a emplear en la realización de la escala y con los propósitos científicos que ésta debe satisfacer.

En ocasiones, los datos deben ser tratados previamente para reducir el ruido introducido por el sistema de medida. Un ejemplo lo constituyen las técnicas de suavizado aplicables sobre un conjunto de muestras sucesivas de diferencias de fase-tiempo; ello supone un retardo en el acceso a la escala de tiempo resultante. Además de ello, puede resultar muy útil la observación del comportamiento a largo plazo de los relojes que intervienen en una escala conjunta, tanto antes como después de hacer uso de los datos correspondientes a determinado instante, ya que proporciona información sobre el mejor uso de los datos en la generación de la escala. Esto también introduce un retardo en el acceso.

Lo que determina si el retardo de acceso es aceptable o no, es el uso para el que se ha diseñado la escala. Para una escala de referencia tal como el TAI, los requisitos son la máxima fiabilidad y estabilidad a largo plazo. Estos objetivos se consiguen a partir de un gran número de relojes de diferentes tipos, localizados en diferentes partes del mundo. La recopilación y manipulación correcta de datos lleva tiempo. El retardo es considerable, pero se acepta porque se consiguen las características deseadas. Para estudios científicos dentro de un laboratorio podría resultar más interesante la realización de una escala próxima al tiempo real, aun cuando esto pudiera suponer un deterioro de la estabilidad a largo plazo.



El tiempo es al reloj lo que la mente al cerebro. En cierto modo, el reloj contiene el tiempo, y sin embargo el tiempo se niega a que lo embotellen como a un genio encerrado en una lámpara. Tanto si fluye cual la arena como si gira sobre unas ruedas dentro de otras ruedas, el tiempo se escapa irremediabilmente, mientras nosotros sólo sabemos observar. Incluso cuando las ampolletas del reloj de arena se hacen añicos, cuando la oscuridad elimina la sombra del reloj de sol, cuando el muelle real de un reloj de pared baja tanto que las manecillas se quedan inmóviles como la muerte, el tiempo continúa pasando. Lo máximo que podemos esperar de un reloj es que señale ese avance. Y como el tiempo impone su propio ritmo, al modo de un latido del corazón o una marea menguante, estos aparatos realmente no marcan el tiempo; simplemente se mantienen al mismo paso, si son eficaces.

*SOBEL, Dava*



# CARACTERIZACIÓN DE RELOJES Y OSCILADORES DE PRECISIÓN.

### 2.1. Modelo de señal de un reloj

Para describir adecuadamente el comportamiento de un reloj de precisión y poder aplicar determinado método estadístico, es necesario emplear un modelo matemático capaz de describir la señal en todas sus componentes.

Tal modelo y toda la caracterización que sigue han sido objeto de muchos trabajos teóricos y experimentales llevados a cabo durante los años 60 [13–15]. A continuación se describen algunos de los métodos y modelos más simples y convencionalmente aceptados.

Considérese un generador de señal cuya tensión instantánea de salida  $V(t)$  viene dada de acuerdo con el siguiente modelo:

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)] \sin[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] \quad (2.1)$$

donde  $V_0$  y  $\nu_0$  representan la amplitud y frecuencia nominal a la salida,  $\varepsilon(t)$  la fluctuación en amplitud y  $\varphi(t)$  la fluctuación instantánea en fase (respecto de la fase ideal  $2\pi\nu_0 t$ ) respectivamente, de modo que se asume que:

$$\left| \frac{\varepsilon(t)}{V_0} \right| \ll 1 \quad (2.2)$$

y

$$(2.3) \quad \left| \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi\nu_0} \right| \ll 1$$

Estas dos últimas ecuaciones son esenciales para que las fluctuaciones de fase  $\varphi(t)$  en torno a la ideal  $2\pi\nu_0 t$  puedan ser definidas convenientemente y sin ambigüedad. Si además se asume despreciable el ruido en amplitud ( $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ ), el modelo de señal aún puede ser más simple.

Se ha supuesto que la desviación instantánea de fase  $\varphi(t)$  tan solo tenga carácter aleatorio, de no ser así, siempre puede extraerse la componente sistemática (un modelo más completo contemplaría dos nuevos términos: un polinomio de segundo grado, para expresar la deriva lineal en frecuencia, y una función senoidal, que denote una modulación en fase con carácter periódico), de modo que sin pérdida de generalidad puede asumirse la aleatoriedad de  $\varphi(t)$ .

Definida la frecuencia instantánea de un oscilador,  $\nu(t)$  (expresada en hercios), como una variable directamente proporcional a la ley de variación temporal de la fase  $\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \varphi(t)$  del citado oscilador:

$$(2.4) \quad \nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}(t)$$

Se denomina desviación fraccional o normalizada de frecuencia instantánea  $y(t)$  (respecto de la frecuencia nominal  $\nu_0$ ) a la siguiente expresión, en la que  $x(t)$  representa la fase instantánea expresada en unidades de tiempo:

$$(2.5) \quad y(t) \equiv \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi\nu_0} = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{dx}{dt}$$

$x(t)$  tiene ecuación de dimensiones de tiempo, mientras  $y(t)$  denota un número (adimensional).

En la mayor parte de los casos prácticos se trabaja con una señal de referencia de mucha mayor calidad respecto de la cual se determinan las desviaciones  $x(t)$  e  $y(t)$  del oscilador bajo examen. La cantidad  $x(t)$  puede interpretarse como el tiempo transcurrido entre el instante de paso a través de un determinado nivel de la señal en examen y el de paso a través de cierto nivel de la señal de referencia. La cantidad  $y(t)$  representa por otra parte la desviación relativa de la frecuencia del oscilador en examen respecto de la frecuencia de referencia.

En el supuesto de que la referencia pudiera ser considerada ideal, la incertidumbre y las fluctuaciones estadísticas puestas de manifiesto en el análisis de  $x(t)$  e  $y(t)$  deberían ser atribuidas al oscilador bajo examen.

La medida de estabilidad en frecuencia en el dominio del tiempo está basada en la varianza muestral de las desviaciones normalizadas de frecuencia  $\bar{y}_k^\tau$ , variable cuyo significado es el siguiente:

$$y_k^\tau = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt = \frac{\varphi(t_k + \tau) - \varphi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau} = \frac{x(t_k + \tau) - x(t_k)}{\tau} \quad (2.6)$$

donde  $t_{k+1} = t_k + T$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , indicando  $T$  la periodicidad con que se hace cada medida, efectuada en un tiempo de integración  $\tau$ .

Las desviaciones normalizadas de frecuencia  $\bar{y}_k^\tau$  son cantidades adimensionales.

Conviene destacar que la desviación de fase-tiempo  $x(t)$ , obtenida mediante integración, representa la diferencia entre la fase del reloj bajo examen respecto de la del reloj de referencia. En la medida de la desviación de tiempo entre dos relojes se usa habitualmente la convención opuesta, es decir, se coloca la referencia en primer lugar. Estas diferentes convenciones no tienen ningún significado particular y tan solo necesitan un mínimo de atención.

El modelo expuesto de señal de un reloj contiene solamente fluctuaciones aleatorias (ya sea en amplitud, ya sea en fase). En la realidad, a menudo se presentan perturbaciones no completamente casuales, que por otra parte no siempre resultan ser claramente identificables y distinguibles de los fenómenos aleatorios.

Las perturbaciones sistemáticas o determinísticas serán objeto del siguiente apartado.

## 2.2. Variaciones sistemáticas de la frecuencia

El tipo principal de perturbación “determinística” es la “deriva lineal de frecuencia” que, por diferentes causas (alteraciones del punto de trabajo de algunas componentes electrónicas en los relojes de cesio, variaciones en las concentraciones de gas en la celda del patrón de rubidio, deriva de la cavidad para el máser, alteraciones en la estructura de los cristales) se presenta en las señales de los relojes como un aumento (o disminución) constante de la frecuencia. La deriva debe ser considerada como una variación sistemática de la frecuencia, en función del tiempo, debida a modificaciones internas del resonador y debe ser distinguida de las variaciones estocásticas que, en un tiempo corto, pueden manifestarse de manera similar a una verdadera deriva.

$$(2.7) \quad y(t) = y(t_0) + d_0 (t - t_0)$$

Otro efecto determinístico, habitualmente de menor entidad, se pone de relieve en forma de variaciones periódicas (desviaciones de la frecuencia a la salida del oscilador siguiendo una ley senoidal), y suele guardar relación con disturbios acoplados al sistema, o con variaciones de las condiciones ambientales.

$$(2.8) \quad y(t) = a \cos 2\pi f_m t$$

Por lo general, resulta suficiente el modelo siguiente:

$$(2.9) \quad y(t) = y(t_0) + d_0 (t - t_0) + \varepsilon(t)$$

donde  $y(t_0)$  es la desviación (normalizada) de frecuencia en el instante inicial  $t_0$ ,  $d_0$  representa la variación progresiva de la frecuencia y  $\varepsilon(t)$  representa un proceso aleatorio, esto es, una fluctuación completamente estocástica.

Del mismo modo, es posible expresar la desviación de tiempo  $x(t)$  según la formulación general:

$$x(t) = x(t_0) + y(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} d_0 (t - t_0)^2 + \psi(t) \quad (2.10)$$

donde  $x(t_0)$  es la desviación de fase en el instante inicial  $t_0$ ,  $y(t_0)$  es la desviación de frecuencia en ese mismo instante inicial  $t_0$ ,  $d_0$  representa la deriva y  $\psi(t)$  representa un proceso aleatorio genérico.

El modelo antes expuesto, aunque útil en la mayoría de los casos, no siempre es el más adecuado. El comportamiento periódico (senoidal) a la salida del oscilador requiere un modelo específico; los patrones de haz de cesio se adaptan mejor al modelo simplificado que resulta de hacer  $d_0 = 0$ , etc.

En el supuesto de que el término adicional debido a la fluctuación estocástica sea despreciable respecto de la componente determinística, puede examinarse como estimar las diferentes componentes sistemáticas.

### 2.3. Fluctuaciones estadísticas

Volviendo al modelo completo de señal del reloj, debe tenerse en cuenta la existencia de variaciones estocásticas de frecuencia, de naturaleza y efectos diversos y que están presentes en todos los tipos de patrones de frecuencia.

El análisis de las componentes estocásticas, del ruido, debe llevarse a cabo solo cuando se ha confirmado y corregido la componente determinística descrita en el párrafo anterior. Esto no siempre ocurre y, con los métodos estadísticos típicamente empleados, puede comportar dificultad de interpretación sobre todo en el caso en que esté presente una deriva de frecuencia.

Para caracterizar las fluctuaciones estocásticas presentes en la señal de un patrón son posibles dos aproximaciones respectivamente en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo.

En el primer caso se estima la densidad espectral de potencia de las fluctuaciones de frecuencia  $y(t)$ , para evaluar la contribución de cada componente espectral, en el momento de la medida, a la fluctuación de la señal en examen.

En términos simples, esto significa escindir el ruido observado sobre la señal del oscilador en tantos ruidos *elementales*, cada uno caracterizado por una senoide de una particular frecuencia, y estimar cuanta potencia de cada senoide elemental contribuye a formar el ruido observado.

Este tipo de análisis se lleva a cabo fundamentalmente para estimar las componentes de *Fourier*, o amplitudes de las sinusoides elementales, de alta frecuencia. Generalmente requiere el uso de un discriminador de frecuencia que entregue a la salida una señal proporcional a  $y(t)$ , que podrá ser examinada con un analizador de espectros analógico o con algún dispositivo que proporcione la transformada discreta de *Fourier* (*DFT*).

Las caracterizaciones que se emplearán a continuación consideran sobre todo los tiempos largos de observación y por consiguiente la baja frecuencia de *Fourier*. En este caso es más cómodo utilizar datos como  $x(t)$  o  $y(t)$  obtenidos a partir de medidas en secuencia temporal, estimando a continuación la “dispersión”, esto es, la varianza de tales valores. Este tipo de elaboración se conoce como análisis en el dominio del tiempo y será objeto de los próximos párrafos.

### 2.3.1. Ruidos típicos en los relojes

Para describir las fluctuaciones estocásticas de las señales de los osciladores en el dominio de la frecuencia se usa la densidad espectral de potencia unilateral  $S_{\phi}(f)$ ,  $S_x(f)$  y  $S_y(f)$  indicativas de la contribución de cada componente espectral de *Fourier*  $f$  a las fluctuaciones de la fase  $\phi(t)$ , de la desviación de tiempo  $x(t)$  y de la desviación en frecuencia  $y(t)$  respectivamente.

Desde el punto de vista matemático, las densidades se definen a partir de la transformada de *Fourier* de la función de autocorrelación de la señal, y están ligadas entre ellas según las siguientes relaciones:

$$S_x(f) = \frac{1}{(2\pi\nu_0)^2} S_\phi(f) \quad (2.11)$$

$$S_y(f) = (2\pi f)^2 S_x(f) \quad (2.12)$$

$$S_y(f) = \frac{f^2}{\nu_0^2} S_x(f) \quad (2.13)$$

Se ha confirmado experimentalmente que las densidades espectrales de las fluctuaciones estocásticas de señales de los relojes pueden ser expresadas habitualmente mediante series de potencia de la frecuencia de *Fourier*. Algunos de los tipos de “ruido” pueden ser identificados a partir de la evolución del espectro en función de  $f$ ; de entre ellos, los más comunes en los relojes de alta precisión se recogen en la tabla 2.1.

Tipo de ruido	$S_\phi(f) \propto f^{\alpha-2}$	$S_y(f) \propto f^\alpha$	Causas
Blanco de fase	$\nu_0^2 h_2 f^0$	$h_2 f^2$	Ruido aditivo de origen térmico o cuántico, suele generarse en las etapas de amplificación.
<i>Flicker</i> de fase	$\nu_0^2 h_1 f^{-1}$	$h_1 f^1$	Puede estar relacionado con el mecanismo de resonancia del oscilador, pero usualmente se debe al empleo de electrónica ruidosa (multiplicadores de frecuencia, amplificadores,...)
Blanco de frecuencia o Camino aleatorio de fase	$\nu_0^2 h_0 f^{-2}$	$h_0 f^0$	Típico en patrones de frecuencia con resonador pasivo.
<i>Flicker</i> de frecuencia	$\nu_0^2 h_{-1} f^{-3}$	$h_{-1} f^{-1}$	Poco conocido, parece relacionarse con el mecanismo de resonancia en osciladores activos, o al diseño o elección de otros elementos.
Blanco de aceleración o Camino aleatorio de frecuencia	$\nu_0^2 h_{-2} f^{-4}$	$h_{-2} f^{-2}$	Normalmente relacionado con el entorno físico del oscilador: golpes, vibraciones, cambio de temperatura, etc.

Tabla 2.1: Tipos de ruidos más comunes en los relojes.

### 2.3.2. La varianza de dos muestras (varianza de *Allan*, AVAR)

En el dominio del tiempo también es posible estimar la entidad y el tipo de ruido predominante a partir del estudio de la dispersión de las desviaciones  $x(t)$  e  $y(t)$ . A pesar de que la caracterización en el dominio de la frecuencia es más completa, se verá que existe una relación entre los métodos estadísticos utilizados en el dominio del tiempo y la densidad espectral, y consecuentemente con los diversos tipos de ruidos presentados en el apartado anterior. Antes de adentrarnos en la relación existente entre ambos dominios, veamos cuales pueden ser los problemas que se presenten en la elaboración de la medida de desviaciones de tiempo o de frecuencia y cuales son los métodos estadísticos recomendados en cada caso para describir las señales de los osciladores.

El modelo usado comúnmente para caracterizar estadísticamente los datos de medida  $d_i$ , consiste en suponer que los datos son independientes y estocásticos con distribución *gaussiana*. El análisis consiste en la estima del valor medio  $\mu$  y de la varianza  $\sigma^2$  y, eventualmente, del nivel de confianza atribuible a la estima. Bajo estas hipótesis, con  $N$  datos de medida a disposición, se emplean como buenos estimadores de  $\mu$  y  $\sigma^2$  la media y la varianza muestral definidas como:

$$(2.14) \quad \bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$$

$$(2.15) \quad s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i - \bar{d})^2$$

Cuando se desea caracterizar las fluctuaciones de frecuencia de un oscilador, es útil estimar la dispersión de las  $N$  medidas de frecuencia; es decir: la varianza, porque proporciona una indicación de la repetitividad y consecuentemente de la estabilidad del reloj [14]:

$$(2.16) \quad \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle \equiv \left\langle \left( \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left( y_n^\tau - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^\tau \right) \right)^2 \right\rangle$$

Sin embargo, el modelo clásico de distribución *gaussiana* no siempre se adapta adecuadamente a los datos a disposición. En presencia de ciertos tipos de ruido (*flicker* y camino aleatorio de frecuencia), la estima de la varianza no converge, dependiendo estrechamente del número  $N$  de muestras de medida. Es por tanto necesario acordar el número de muestras a usar para poder comparar los diversos resultados. Como no siempre es fácil disponer de un número elevado de medidas, se ha acordado usar el valor más pequeño posible,  $N = 2$ . Cada varianza particular estimada a partir de dos muestras tiene un bajo nivel de fiabilidad, pero pueden estimarse muchas varianzas de dos muestras para posteriormente calcular la media. Este tipo de análisis fue propuesto en los años 60 por Allan y Barnes [13, 14] y se ha convertido en un método común (International Telecommunication Union ITU-R Rec. TF 538-3 “*Frequency and time (phase) instability measures*”, Geneva, 1992.) para la estima de la estabilidad en frecuencia en el dominio del tiempo [1].

Si el ruido predominante en la señal del reloj en examen fuera de otro género, por ejemplo, blanco de frecuencia, en cuyo caso no existirían problemas de convergencia, sería posible estimar la varianza clásica de la medida de frecuencia (que, en el caso del ruido blanco de frecuencia, con un número infinito de muestras coincidiría con la varianza de *Allan*). Este es el caso de, por ejemplo, los osciladores de cuarzo o de las celdas a rubidio, en los que para tiempos de observación comprendidos entre 100 y 1000 segundos, presentan como ruido predominante ruido blanco de frecuencia, por lo que se suele calcular la varianza clásica de la medida de frecuencia como estimador de la dispersión, y por tanto de la estabilidad en frecuencia.

La varianza de dos muestras, o varianza de *Allan*, se define como la media matemática de un número infinito de varianzas de parejas de muestras adyacentes de  $\bar{y}$ , sin tiempo muerto entre los dos intervalos de integración:

$$\sigma_y^2(\tau) = \langle \sigma_y^2(N = 2, T = \tau, \tau) \rangle \equiv \left\langle \left( \frac{y_{k+1}^\tau - y_k^\tau}{2} \right)^2 \right\rangle \quad (2.17)$$

donde  $\langle \dots \rangle$  indica la media sobre un número infinito de valores (esperanza matemática).

La relación (2.17) puede expresarse en función de la fluctuación relativa de fase  $x(t)$ :

$$(2.18) \quad \sigma_y^2(\tau) \equiv \frac{1}{2} \tau^{-2} [x(t_i + 2\tau) - 2x(t_i + \tau) + x(t_i)]^2$$

La marcha de la varianza de *Allan*, en función del tiempo de integración  $\tau$ , depende del tipo de ruido presente. Esto también es cierto para la varianza clásica, pero la varianza de *Allan* presenta la ventaja de estar definida para todos los tipos de fluctuaciones descritas en la tabla 2.1.

La relación entre el tipo de ruido presente y la varianza de *Allan* en cierto rango de intervalos de tiempo de integración puede deducirse del siguiente esquema. Antes se tenía:

$$(2.19) \quad S_y(f) = h_\alpha f^\alpha \quad \alpha = -2, -1, 0, 1, 2$$

y ahora la varianza de *Allan* se puede expresar como:

$$(2.20) \quad \sigma_y^2(\tau) = A_\mu \tau^\mu \quad \mu = 1, 0, -1, -2$$

estando  $\alpha$  y  $\mu$  relacionados según la tabla 2.2. Los valores de  $h_\alpha$  y  $A_\mu$  son asimismo constantes que mantienen una relación entre sí dependiendo del tipo de ruido presente.

$\alpha$	-2	-1	0	1	2
$\mu$	1	0	-1	-2	-2

**Tabla 2.2:** Relación entre la marcha de la densidad espectral y la varianza de *Allan*.

Esto significa que, variando el tiempo de integración  $\tau$  y repitiendo el cálculo de la varianza de *Allan*, es posible determinar la potencia  $\mu$  y consecuentemente deducir el tipo de ruido presente en la señal del reloj, al menos en determinada zona del tiempo de integración (correspondiente con una determinada banda de componentes espectrales).

En la definición de la AVAR aparece el concepto de esperanza matemática o media teórica sobre un número infinito de datos. La realidad es que este parámetro tan solo puede ser estimado a partir de un número finito  $N$  de lecturas de desviaciones de fase  $x(t)$ , que en lo que resta del capítulo se denotarán mediante un subíndice indicativo del orden ocupado entre las  $N$  medidas:  $x_i = x(t_i)$ , siendo el espaciado nominal entre éstas  $T_0$ . En el supuesto de que no existan tiempos muertos entre medidas, se tendrá por tanto que  $\tau_0 = T_0$ , y la estima de la AVAR podrá ser expresada en función de  $\tau = m\tau_0$ .

Habitualmente se emplean dos estimas de la AVAR, la primera de ellas es conocida como estima normal, de este modo se asegura la independencia entre varianzas de pares adyacentes de desviaciones normalizadas de frecuencia, aunque no se aprovecha en su totalidad la información sobre el ruido presente en el proceso. La segunda se conoce como estima con solapamiento, y emplea todas las posibles combinaciones de parejas de desviaciones normalizadas de frecuencia adyacentes. La expresión analítica de ésta última estima es la siguiente:

$$s_y^2(m\tau_0) = \frac{1}{2(N-2m)m^2\tau_0^2} \sum_{i=1}^{N-2m} (x_{i+2m} - 2x_{i+m} + x_i)^2 \quad (2.21)$$

El efecto de tener un número limitado de muestras se traduce en el hecho de que la estima obtenida es imperfecta, estando sujeta a una incertidumbre tanto mayor cuanto menor sea el número de muestras a disposición. El cálculo de la banda de incertidumbre, es decir, del nivel de fiabilidad de la estima, requiere el conocimiento del tipo de distribución de los datos y del número de grados de libertad. Para la estima de la varianza de dos muestras, se han efectuado estudios para determinar los grados de libertad y la expresión de la incertidumbre.

El problema consiste en determinar el número de medidas independientes de frecuencias medias a disposición. Esto depende del modo en que se ha realizado la medida y, sobre todo, de la existencia o no de superposición de los intervalos sobre los que se estima la frecuencia media.

Cuando se recurre a la estima normal, *Lesage* y *Audoin* [16] demostraron que el intervalo de confianza  $I_\alpha$  asociado a la estima de la desviación de *Allan* venía dado por:

$$(2.22) \quad I_\alpha \approx s_y(\tau) k_\alpha M^{-1/2} \quad \text{para } M > 10$$

en la que  $M$  representa el número de medidas de desviación normalizada de frecuencia disponibles, siendo  $k_\alpha$  un valor numérico que depende del tipo de ruido presente:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} k_2 &= k_1 = 0.99 \\ k_0 &= 0.87 \\ k_{-1} &= 0.77 \\ k_{-2} &= 0.75 \end{aligned}$$

Para el caso de estima con solapamiento, la determinación del intervalo de confianza es ligeramente más compleja. Dado que por lo general, la diferencia de pares adyacentes de desviaciones normalizadas de frecuencia es una variable normalmente distribuida con media nula, su cuadrado dividido entre dos (que representa una muestra de la varianza de *Allan*) será siempre una cantidad positiva y obedecerá a una distribución de tipo Chi-cuadrado con un grado de libertad. Al promediar todas las posibles varianzas asociadas a pares adyacentes, el número de grados de libertad pasa a ser función del número de términos participantes en el promedio y del tipo de ruido presente en el proceso: a mayor integración del ruido en el tiempo, mayor dependencia entre muestras de AVAR y menor número de grados de libertad. El número de grados de libertad ha sido calculado analíticamente y mediante la técnica de Monte Carlo, habiéndose alcanzado ecuaciones empíricas con un grado de exactitud de un 1% para modulaciones de tipo blanco de fase, blanco de frecuencia y camino aleatorio de frecuencia [17, 18]. Las tolerancias alcanzadas para el ruido *flicker* de fase y frecuencia son algo peores.

El intervalo de confianza para este caso es asimétrico, y si se ha decidido por ejemplo que la probabilidad de que éste contenga al valor verdadero de AVAR sea de un 95%, los límites del mismo vendrán dados por las inecuaciones:

$$(2.24) \quad \frac{V \cdot s_y^2}{\chi^2(0.05)} > \sigma_y^2 > \frac{V \cdot s_y^2}{\chi^2(0.95)}$$

donde  $s_v^2$  representa la estima con solapamiento de la AVAR obtenida a partir de  $N$  medidas de diferencias de fase-tiempo  $x(t)$ ,  $\chi^2$  se refiere a la distribución Chi-cuadrado y  $v$  denota los grados de libertad, que no tienen que ser necesariamente números enteros. Para cada tipo de ruido presente, los grados de libertad pueden ser aproximados mediante las ecuaciones de la tabla 2.3:

Tipo de ruido	Grados de libertad ( $v$ )
Blanco de fase	$\frac{(N+1)(N-2m)}{2(N-m)}$
<i>Flicker</i> de fase	$\exp\left[\ln\left(\frac{N-1}{2m}\right)\ln\left(\frac{(2m+1)(N-1)}{4}\right)\right]$
Blanco de frecuencia	$\left[\frac{3(N-1)}{2m} - \frac{2(N-2)}{N}\right] \frac{4m^2}{4m^2+5}$
<i>Flicker</i> de frecuencia	$\frac{2(N-2)}{2.3N-4.9}$ para $m=1$ $\frac{5N^2}{4m(N+3m)}$ para $m \geq 2$
Camino aleatorio de frecuencia	$\frac{N-2}{m} \frac{(N-1)^2 - 3m(N-1) + 4m^2}{(N-3)^2}$

**Tabla 2.3:** Número de grados de libertad para el cálculo de la confianza de la estima de una varianza de *Allan* muestral [22].

### 2.3.3. Varianza de dos muestras en presencia de componentes determinísticas

La presencia de ciertas componentes sistemáticas en las señales generadas por los relojes pueden ponerse de manifiesto, y consecuentemente ser analizadas, mediante el estudio de la evolución de la varianza de *Allan* en cierto rango de intervalos de tiempo de integración. En efecto, atendiendo a la expresión del citado estadístico (2.17), una desviación normalizada de frecuencia no puede llegar a detectarse, pero sí la existencia de cierta deriva lineal de frecuencia  $d_0$ .

Sea por ejemplo la expresión (2.9) (prescindiendo del término estocástico  $\varepsilon(t)$ ). En tal caso, la aplicación de la definición (2.17) lleva a la expresión:

$$(2.25) \quad \sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} d_0^2 \tau^2$$

Algo parecido ocurre ante la presencia de variaciones senoidales de frecuencia [19]; si la frecuencia obedece al modelo dado en (2.8), la definición (2.17) lleva a:

$$(2.26) \quad \sigma_y^2(\tau) = \frac{a^2}{(\pi f_m \tau)^2} \text{sen}^4(\pi f_m \tau)$$

Es decir: al variar el tiempo de integración  $\tau$ , la varianza de *Allan* evoluciona conforme a la cuarta potencia de la función seno, alcanzando un máximo para  $\tau$  igual al semiperiodo de modulación  $T_m/2 = 1/2 f_m$  cuando se emplea la varianza muestral con solapamiento.

#### 2.3.4. Discriminación entre ruido blanco y *flicker* de fase: varianza de *Allan* modificada

Este nuevo estadístico fue introducido por *D.W. Allan* y *J.A. Barnes* en 1981 [20] con el específico fin de discernir entre el ruido blanco y *flicker* de fase. La idea básica sobre la que se fraguó esta variable era bien simple: si ambos tipos de ruido dependen del ancho de banda del sistema de medida  $f_h$  [14], la variación provocada deliberadamente mediante *software* podría ser útil para eliminar la ambigüedad.

Su cálculo es algo más laborioso, por lo que aún pudiendo ser empleado para identificar otros tipos de ruidos predominantes, solo se recomienda su uso cuando del estudio de la AVAR se derive ambigüedad:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \text{Mod } \sigma_y^2(\tau) &\equiv \frac{1}{2} \left\langle \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_{k+n}^\tau - y_k^\tau) \right]^2 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2\tau^2} \left\langle \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x(t+2\tau) - 2x(t+\tau) + x(t)) \right]^2 \right\rangle \end{aligned}$$

en la que  $\tau = n\tau_0$ . Una vez más las limitaciones en la práctica tan solo permiten calcular una estima de este parámetro, cuya expresión es la siguiente:

$$\text{Mod } s_y^2(n\tau_0) = \frac{1}{2(n\tau_0)^2 (N - 3n + 1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n+j-1} [x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i] \right\}^2 \quad (2.28)$$

La nueva variable así definida vuelve a ser proporcional a alguna potencia  $\mu'$  del intervalo de tiempo  $\tau$  para cada tipo de ruido predominante. Las potencias coinciden con las alcanzadas en el cálculo de la AVAR ( $\mu$ ), salvo cuando el ruido predominante es de tipo blanco de fase, en cuyo caso  $\mu' = -3$ .

### 2.3.5. Varianza de Allan y varianza clásica

La relación entre varianza de Allan y varianza clásica pone de manifiesto lo que se ha venido expresando en párrafos previos. La naturaleza divergente de la desviación estándar hace acto de presencia cuando el ruido predominante es *flicker* de frecuencia o camino aleatorio de frecuencia. Incluso ante fluctuaciones de carácter blanco de frecuencia, la desviación estándar referida a los datos de diferencia de fase diverge de acuerdo con la raíz cuadrada de la longitud de datos, esto es, del número de muestras de fase-tiempo  $N$  ( $N = M + 1$ ). La tabla 2.4 muestra la relación existente entre la desviación de Allan y las desviaciones muestrales de fase instantánea y de desviación normalizada de frecuencia (media) para cada tipo de fluctuación predominante [14, 21].

Tipo de ruido	Desviación estándar ( $N$ muestras) de $x$	Desviación estándar ( $M$ muestras) de $y$
Blanco de fase	$\tau \sigma_y(\tau) / \sqrt{3}$	$\sigma_y(\tau) \sqrt{2(N+1)/3N}$
<i>Flicker</i> de fase	$\approx \tau \sigma_y(\tau) \sqrt{\ln M / \ln 2}$	$\approx \sigma_y(\tau) \sqrt{2(N+1)/3N}$
Blanco de frecuencia	$\tau_0 \sigma_y(\tau_0) \sqrt{(M+1)/6}$	$\sigma_y(\tau_0)$
<i>Flicker</i> de frecuencia	Indefinida	$\sigma_y(\tau) \sqrt{N \ln N / (2(N-1) \ln 2)}$
Camino aleatorio de frecuencia	Indefinida	$\sigma_y(\tau) \sqrt{N/2}$

Tabla 2.4: Relación entre la desviación de Allan y las desviaciones estándar de  $x$  e  $y$ , aplicadas a  $N$  muestras de  $x$  ( $M$  de  $y$ ).

## 2.4. Procesado y análisis de señal en presencia de ruidos aleatorios

Tal como se indicó en el apartado 2.3.2, la varianza de *Allan* puede emplearse como herramienta para estimar las componentes determinísticas presentes en las señales generadas por los relojes, pero de mayor interés resulta aún su empleo en la caracterización de las componentes aleatorias o casuales. Esta caracterización requiere la extracción previa de la componente determinística, que se llevará a cabo con mayor eficiencia según sea el tipo de ruido aleatorio predominante en la señal.

La separación de las componentes determinísticas requiere, no obstante, el establecimiento previo de un modelo y la estima de los diferentes parámetros que conforman tal modelo.

El modelo será tanto mejor si los residuos o diferencias entre los valores experimentales y los estimados (resultantes de la aplicación del modelo) constituyen un proceso aleatorio blanco, es decir, sin memoria o correlación con el pasado. En el supuesto de que los residuos no cumplan esta condición, debería pensarse en la existencia de alguna componente susceptible de ser prevista a partir de los datos previos, y que por su carácter de predecible debería ser incluida en el modelo.

La estima de los parámetros del modelo puede llevarse a cabo mediante cualquiera de los métodos conocidos. De entre ellos, el más comúnmente empleado es el de “mínimos cuadrados” o de “regresión”, que coincide con el de “máxima probabilidad” cuando los residuos obedecen a una distribución normal multivariable, blanca (incorrelada) y con varianza común  $\sigma^2$ . Aun no obedeciendo al tipo de distribución normal multivariable, si los residuos mantienen las otras dos características: incorrelados y de varianza  $\sigma^2$ , de acuerdo con el teorema de *Gauss–Markov* la estima así obtenida es la mejor u óptima; denominada así por ser más eficiente que cualquier otro tipo de estima lineal.

Supongamos, para concretar, que se disponen de datos que obedecen a un modelo de señal como el introducido en (2.10), en el que el proceso aleatorio  $\psi(t)$  es blanco y normal de media nula y varianza  $\sigma_\psi^2$ . En tal caso, las estimas óptimas de los parámetros  $x(t_0)$ ,  $y(t_0)$  y  $d_0$  se obtienen del ajuste de una parábola, en sentido de mínimos cuadrados, a los datos experimentales.

Si en lugar de prevalecer el ruido aditivo blanco (de fase), predomina el blanco de frecuencia, normal de media nula y varianza  $\sigma_\epsilon^2$ , es preferible el empleo del modelo (2.9). En tal caso, las estimas óptimas de los parámetros  $y(t_0)$  y  $d_0$  se obtienen del ajuste de una recta, en sentido de mínimos cuadrados, a los datos experimentales (valores medios de desviación normalizada de frecuencia a partir de los datos observados de desviación de fase, en el supuesto de que resulte admisible la aproximación de los valores instantáneos mediante los valores medios).

Cuando el tipo de ruido aditivo predominante es camino aleatorio de frecuencia, normal de media nula y varianza  $\sigma_\eta^2$ , el modelo empleado se deduce por diferenciación de (2.9):

$$d(t) = d_0 + \eta(t) \quad (2.29)$$

Para este caso, la estima óptima de la constante  $d_0$  se obtiene promediando las segundas diferencias de los datos observados de desviación de fase.

Para finalizar, cuando el tipo de ruido aditivo predominante es de naturaleza *flicker* (de fase o frecuencia), no existe un estimador óptimo de la deriva de frecuencia  $d_0$ . No obstante, cuando se trata de ruido *flicker* de frecuencia, se ha demostrado [22] que la media aritmética de las segundas diferencias de los datos de desviación de fase es todavía un buen estimador del parámetro  $d_0$ .

Si se tiene en cuenta que la diferencia sin solapamiento de dos variables aleatorias independientes sigue teniendo independencia, la estima óptima de la deriva en frecuencia puede llevarse siempre a cabo como promedio de las segundas diferencias de los datos de desviación de fase, sea cual sea el tipo de ruido aditivo predominante entre los cuatro previamente considerados. El único inconveniente del método estriba en que con las segundas diferencias desaparece la posibilidad de determinar los restantes parámetros del modelo:  $x(t_0)$  e  $y(t_0)$ .



**Cappello a tre punte, II** – (*El sombrero de tres picos*), romanzo breve di P.A. de Alarcón y Arriaza, pubblicato nel 1874. L'argomento è tratto da un racconto popolare che si trova anche nel "romance" *El molinero de Alarcos* (Il mugnaio di Alarcos). Il vecchio Corregidor di una cittadina andalusa ha messo gli occhi sulla bella e virtuosa Frasquita, moglie del mugnaio Lucas, e architetta un piano per conquistarla, dando l'avvio a una serie d'equivoci in cui vengono coinvolti la di lui moglie e il marito di Frasquita. L'ironia maliziosa della narrazione, la freschezza e la vivacità del dialogo, la ricchezza coloristica con cui è rievocata la vita paesana della Spagna di Carlo IV rendono tuttora piacevolissima la lettura dell'opera. ■ Al romanzo è ispirato l'omonimo balletto in un atto musicato da Manuel de Falla e presentato all'Alhambra Theatre di Londra il 22 luglio 1919 dai Ballets Russes di Djagilev con la coreografia di L. Massine e i costumi (ispirati a quadri di Goya) e le scene di Pablo Picasso.



# LA MEDIA PONDERADA Y EL PROBLEMA DE LA DETERMINACIÓN DE PESOS

En la elaboración de una escala de tiempo integrada, obtenida mediante la acumulación de segundos atómicos definidos como un número de periodos de la radiación correspondiente a determinada transición del átomo de cesio, se da la circunstancia de que cada realización particular llevada a cabo por determinado patrón de cesio tiene defectos que pueden ser minimizados si sus lecturas se combinan adecuadamente con las de otros relojes. De este modo se puede obtener una escala conjunta más próxima a la ideal.

Cuando se efectúan diferentes medidas de lecturas de relojes independientes:  $X_i$ , en un mismo instante  $t$ , de una misma cantidad física que designaremos como  $TA$  y que representa el “tiempo atómico”, la lectura  $TA$  puede expresarse teóricamente, para el instante  $t$ , como la media ponderada de las lecturas de los relojes contribuyentes, en la que los pesos relativos son seleccionados para optimizar determinada cualidad en la escala.

### 3.1. La necesidad de estimar la varianza de *Allan* absoluta asociada a cada reloj

La escala de tiempo conjunta en cada instante  $t$  se determina como una combinación lineal, o media ponderada de las lecturas instantáneas tomadas para los  $N$  relojes que constituyen el conjunto, en la que los valores  $X^i(t)$  representan las lecturas del reloj  $i$ -ésimo en el instante  $t$ :

$$TA(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) X^i(t) \quad (3.1)$$

Los pesos relativos  $\omega_i(t)$ ,  $i=1, \dots, N$  se determinarán de modo que permitan discriminar entre los diferentes relojes de acuerdo con sus cualidades intrínsecas. Podremos suponer que por lo general dichos pesos se mantendrán invariables en el tiempo, por lo que a lo largo del capítulo serán considerados constantes para cada reloj:  $\omega_i(t) = \omega_i$ .

Ante la hipótesis de independencia entre patrones, y por tanto de incorrelación entre éstos, las covarianzas absolutas se anulan, de modo que pueden determinarse los valores de  $\omega_i$  en función de las varianzas absolutas optimizando la estabilidad de la escala conjunta, es decir, haciendo mínima la varianza asociada a la escala conjunta sea cual sea el concepto de varianza utilizado. En concreto se hará mínima la varianza de *Allan* (AVAR) para algún valor del intervalo de tiempo  $\tau$ :

$$(3.2) \quad \sigma_{IA}^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left( \sum_{i=1}^N \omega_i X^i(t+2\tau) - 2 \sum_{i=1}^N \omega_i X^i(t+\tau) + \sum_{i=1}^N \omega_i X^i(t) \right)^2$$

Si se denomina  $r_{ii}$  a la AVAR absoluta asociada al reloj  $i$ -simo para un intervalo de tiempo  $\tau$ , bajo la hipótesis de independencia, la AVAR absoluta asociada a la escala conjunta puede expresarse en función de los valores  $r_{ii}$ ,  $i=1, \dots, N$ :

$$(3.3) \quad \sigma_{IA}^2(\tau) = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 r_{ii}$$

La condición de minimización (derivada parcial de  $\sigma_{IA}^2(\tau)$ , respecto de cada parámetro  $\omega_i$ , igualada a cero) aplicada a (3.3), con la condición de que la suma de los pesos relativos sea igual a la unidad, lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} 2\omega_j r_{jj} - \sum_{i=1}^N \omega_i r_{ii} &= 0 & j=1, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^N \omega_i &= 1 \end{aligned}$$

Cuya resolución lleva a los siguientes valores para los pesos relativos  $\omega_i$ :

$$\omega_i = \frac{\frac{1}{r_{ii}}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{r_{jj}}} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

Los pesos relativos solo pueden ser estimados a partir de las AVAR absolutas estimadas para cada patrón, debido a la imposibilidad de calcular el promediado infinito en el tiempo que requiere la determinación de los citados estadísticos. Definiremos las estimas de los pesos relativos del siguiente modo:

$$\hat{\omega}_i = \frac{\frac{1}{\hat{r}_{ii}}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\hat{r}_{jj}}} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

En estas expresiones,  $\hat{r}_{ii}$  tiene el siguiente significado:

$$\hat{r}_{ii} = \hat{r}_{ii}(m\tau_0) = \frac{1}{2(M-2m)m^2\tau_0^2} \sum_{j=1}^{M-2m} (X_{j+2m}^i - 2X_{j+m}^i + X_j^i)^2 \quad (3.7)$$

$M$  representa el número total de lecturas de fase-tiempo  $X_j^i$  en el que se basa la estima, los subíndices  $j$  representan la posición que ocupa la medida  $j$ -sima en la serie de  $M$  medidas realizadas,  $\tau_0$  indica el mínimo espaciado entre datos y  $\tau = m\tau_0$  el intervalo para el cual se está estimando la AVAR.

El símbolo  $\langle \cdot \rangle$  que denota esperanza matemática, o promediado infinito en el tiempo en el supuesto de que el proceso de promediado de dobles diferencias de fase-tiempo es estacionario y ergódico, ha sido sustituido por un promediado finito en el tiempo para alcanzar el estimador de  $r_{ii}$ .

### 3.2. Estimación de las varianzas de *Allan* absolutas asociadas a cada reloj

El problema de la estimación de la estabilidad en frecuencia absoluta de los relojes es una constante habitualmente presente en las escalas de tiempo medio. La dificultad estriba en que los observables en laboratorio no son las diferencias de fase-tiempo entre  $N$  relojes y el ideal, sino que son las diferencias de fase-tiempo entre  $N-1$  relojes y el reloj  $N$ -simo, tomado como referencia.

Si denominamos  $x^i(t)$  a la diferencia de fase-tiempo en el instante  $t$  entre el reloj  $i$ -simo y el  $N$ -simo, tendremos que:

$$(3.8) \quad x^i(t) = X^i(t) - X^N(t)$$

Si se denomina  $s_{ii}$  a la AVAR del reloj  $i$ -simo referido al reloj  $N$ -simo para un intervalo de tiempo  $\tau$ , su expresión quedará como sigue:

$$(3.9) \quad s_{ii} = s_{ii}(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left\langle \left( x^i(t+2\tau) - 2x^i(t+\tau) + x^i(t) \right)^2 \right\rangle$$

De nuevo  $\langle \quad \rangle$  representa la esperanza matemática, y ante el supuesto de estacionariedad y ergodicidad ya mencionado, aquellos valores tan solo podrán aproximarse con los siguientes estimadores:

$$(3.10) \quad \hat{s}_{ii} = \hat{s}_{ii}(m\tau_0) = \frac{1}{2(M-2m)m^2\tau_0^2} \sum_{j=1}^{M-2m} \left( x_{j+2m}^i - 2x_{j+m}^i + x_j^i \right)^2$$

Al igual que se hizo anteriormente, se ha denominado  $x_j^i, \dots, i=1, \dots, N-1$  a la diferencia de fase-tiempo entre el reloj  $i$ -simo y el  $N$ -simo, siendo  $j$  el lugar que ocupa la medida  $j$ -sima en la serie de  $M$  medidas tomadas con un intervalo de tiempo  $\tau_0$  de separación entre ellas.

### 3.2.1. El clásico problema del sombrero de tres puntas

El problema clásico de separación de las varianzas entre osciladores se conoce como problema del “sombrero de tres puntas” [23]. El problema consiste en determinar las varianzas individuales asociadas a cada reloj mediante comparaciones entre tres relojes, supuesto que éstos sean independientes entre sí.

Ante esta última hipótesis, se debe verificar que:

$$\begin{aligned} s_{11} &= r_{11} + r_{33} \\ s_{22} &= r_{22} + r_{33} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se ha empleado la notación ya introducida, con  $N = 3$  y el tercer reloj como reloj de referencia.

Si se define la covarianza de *Allan* (ACOV) de los relojes  $i$ -simo y  $j$ -simo referidos al  $N$ -simo del siguiente modo:

$$s_{ij} = s_{ij}(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left\langle \left( x^i(t+2\tau) - 2x^i(t+\tau) + x^i(t) \right) \left( x^j(t+2\tau) - 2x^j(t+\tau) + x^j(t) \right) \right\rangle \quad (3.12)$$

Desarrollando la expresión y teniendo en cuenta la condición de independencia, resultará que:

$$s_{12} = r_{33} \quad (3.13)$$

La solución al sistema de ecuaciones formado por (3.11) y (3.13) es sencilla de obtener:

$$\begin{aligned} r_{11} &= s_{11} - s_{12} \\ r_{22} &= s_{22} - s_{12} \\ r_{33} &= s_{12} \end{aligned} \quad (3.14)$$

La expresión más comúnmente empleada como solución al clásico problema del sombrero de tres puntas utiliza la varianza ( $s$ ) del primer reloj referido al segundo. Si se desarrolla  $s$  en función de las varianzas individuales se tendrá:

$$(3.15) \quad s = r_{11} + r_{22}$$

Y empleando el sistema formado por (3.11) y (3.15) resulta finalmente:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{2}(s + s_{11} - s_{22}) \\ r_{22} &= \frac{1}{2}(s_{22} + s - s_{11}) \\ r_{33} &= \frac{1}{2}(s_{22} + s_{11} - s) \end{aligned}$$

En la práctica, este procedimiento solo puede aplicarse sobre los estimadores de  $s_{11}$ ,  $s_{22}$  y  $s$  ( $s_{11}$ ,  $s_{22}$  y  $s_{12}$ ):  $\hat{s}_{11}$ ,  $\hat{s}_{22}$  y  $\hat{s}/\hat{s}_{12}$ . La consecuencia fundamental es que en ocasiones se obtienen resultados incoherentes, es decir, valores negativos de varianzas asociados a los relojes cuando las varianzas de *Allan* reales son de hecho definidas positiva. Tal resultado se presume así debido a que los intervalos de confianza asociados a la estima de este parámetro son suficientemente grandes como para incluir valores de varianzas negativos; el problema debería solucionarse considerando mayor número de datos en el cálculo de las varianzas de *Allan* conjuntas, lo que reduciría el tamaño de los intervalos de confianza. El problema podría subsistir aun habiendo aumentado el número de datos para calcular las varianzas de *Allan* conjuntas, el principal argumento empleado para justificar este hecho es que la hipótesis de incorrelación entre relojes no es aceptable.

### 3.2.2. Versión revisada del método del sombrero de tres puntas

La correlación entre relojes próximos, principalmente debido a las condiciones ambientales del entorno, parece un hecho obvio ante intervalos de tiempo de integración de 5 a 10 días y superiores [19, 24–32]. Ante tal tesitura, ciertos autores [33] han obtenido una solución óptima al problema desechando la hipótesis de incorrelación entre relojes.

Partiendo de este supuesto, y definiendo previamente la covarianza de *Allan* (ACOV) entre los relojes  $i$ -simo y  $j$ -simo del siguiente modo:

$$r_{ij} = r_{ij}(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \left( X^i(t+2\tau) - 2X^i(t+\tau) + X^i(t) \right) \left( X^j(t+2\tau) - 2X^j(t+\tau) + X^j(t) \right) \quad (3.17)$$

si se desarrolla (3.12) resulta que el sistema lineal de ecuaciones a resolver es indeterminado (tres ecuaciones y seis incógnitas):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} + r_{33} - 2r_{13} & r_{12} + r_{33} - r_{13} - r_{23} \\ r_{12} + r_{33} - r_{13} - r_{23} & r_{22} + r_{33} - 2r_{23} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

En la que  $\mathbf{S}$  es una matriz simétrica 2 X 2 de valores conocidos, que denominaremos matriz de covarianza (de *Allan*)  $\mathbf{S}$ .

Definiremos  $\mathbf{R}$  como la matriz simétrica 3 X 3 de valores desconocidos de AVAR y ACOV de los tres relojes referidos al reloj ideal, que denominaremos matriz de covarianza (de *Allan*)  $\mathbf{R}$ .

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Dado que el sistema de ecuaciones establecido en (3.18) presenta infinitas soluciones, si existiera alguna manera razonable de fijar los valores de tres de las incógnitas (por ejemplo, los relacionados con las (co)varianzas<sup>1</sup> asociadas al reloj  $N$ -simo), las tres incógnitas restantes quedarían perfectamente identificadas, y con ello la matriz  $\mathbf{R}$ . La condición establecida para fijar los parámetros libres  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  y  $r_{33}$  se deduce del hecho de que la matriz  $\mathbf{R}$ , por su carácter de definida positiva, restringe significativamente el espacio solución.

Ambas matrices  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{R}$  son definidas positivas, y por tanto verifican que todos sus menores principales son positivos, en particular los menores principales de (3.20) para la matriz  $\mathbf{S}$ , y los de (3.21) para la matriz  $\mathbf{R}$ , que constituyen respectivamente conjuntos de condiciones necesarias y suficientes:

<sup>1</sup> Se ha empleado la palabra (co)varianza para hacer referencia indistintamente a los valores de varianza y de covarianza.

$$(3.20) \quad \begin{aligned} s_{11} &> 0 \\ |\mathbf{S}| &= s_{11} s_{22} - s_{12}^2 > 0 \end{aligned}$$

$$(3.21) \quad \begin{aligned} r_{33} &> 0 \\ r_{22} r_{33} - r_{23}^2 &> 0 \\ |\mathbf{R}| &= r_{11} r_{22} r_{33} + 2 r_{12} r_{23} r_{13} - r_{13}^2 r_{22} - r_{12}^2 r_{33} - r_{23}^2 r_{11} > 0 \end{aligned}$$

La relación (3.18) permite asegurar el carácter de definida positiva en la matriz incógnita  $\mathbf{R}$  con tal de que se verifique que  $|\mathbf{R}| > 0$ ; expresión en la que  $|\cdot|$  representa el determinante de la matriz  $\mathbf{R}$ , (Apéndice A de [33]).

Si se expresa  $|\mathbf{R}|$  en función de los tres parámetros libres  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  y  $r_{33}$ , la solución deberá verificar la siguiente inecuación:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} |\mathbf{R}| \equiv H(r_{13}, r_{23}, r_{33}) &= r_{33} |\mathbf{S}| - s_{22} (r_{13} - r_{33})^2 \\ &+ 2s_{12} (r_{13} - r_{33})(r_{23} - r_{33}) - s_{11} (r_{23} - r_{33})^2 > 0 \end{aligned}$$

Empleando como criterio la minimización de alguna función que caracterice la “covarianza global” entre relojes, con la condición  $|\mathbf{R}| > 0$ , se introduce una *función objetivo* directamente proporcional a la suma cuadrática de las covarianzas  $r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2$  e inversamente proporcional a la función  $H(r_{13}, r_{23}, r_{33})$ .

Denominando  $G$  a la raíz cuadrada de la media cuadrática de las covarianzas, resulta:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} [G(r_{13}, r_{23}, r_{33})]^2 &= (r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2) / 3 = \left[ 2(r_{13} - r_{33})^2 + 2(r_{13} - r_{33})(r_{23} - r_{33}) \right. \\ &+ 2(r_{23} - r_{33})^2 + 2(2r_{33} + s_{12})(r_{13} - r_{33}) \\ &\left. + 2(2r_{33} + s_{12})(r_{23} - r_{33}) + 2r_{33}^2 + (s_{12} + r_{33})^2 \right] / 3 \end{aligned}$$

Siendo la *función objetivo* a minimizar:

$$F(r_{13}, r_{23}, r_{33}) = \frac{3 \sqrt{|\mathbf{S}|} [G(r_{13}, r_{23}, r_{33})]^2}{H(r_{13}, r_{23}, r_{33})} \quad (3.24)$$

Se demuestra que existe uno y solo un mínimo global de  $F(r_{13}, r_{23}, r_{33})$  dentro del dominio factible [33]. La minimización de la *función objetivo* puede obtenerse de manera cuasi analítica; los valores  $r_{13}^{min}$ ,  $r_{23}^{min}$  y  $r_{33}^{min}$  resultantes de la minimización se sustituyen en (3.18) para calcular las restantes incógnitas y completar la matriz de covarianza  $\mathbf{R}$ .

En la práctica no se conoce  $\mathbf{S}$ , pero puede conocerse un buen estimador de la citada matriz, que representaremos por  $\hat{\mathbf{S}}$ , cuyos términos se calcularán aplicando la siguiente expresión:

$$s_{ij} = s_{ij}(m\tau_0) = \frac{1}{2(M-2m)m^2\tau_0^2} \sum_{k=1}^{M-2m} (x_{k+2m}^i - 2x_{k+m}^i + x_k^i)(x_{k+2m}^j - 2x_{k+m}^j + x_k^j) \quad (3.25)$$

Del desarrollo de (3.25) se obtiene una expresión similar a (3.18), que liga los términos de la matriz de covarianza (de *Allan*) estimada  $\hat{\mathbf{S}}$  con los de la matriz de covarianza (de *Allan*) estimada  $\hat{\mathbf{R}}$ . El resto de la formulación es igual a la anteriormente presentada, con tal de que se sustituya  $\mathbf{S}$  por  $\hat{\mathbf{S}}$ ,  $\mathbf{R}$  por  $\hat{\mathbf{R}}$ ,  $s_{ij}$  por  $\hat{s}_{ij}$  y  $r_{ij}$  por  $\hat{r}_{ij}$ .

### 3.2.3. Estimación de la estabilidad de $N$ relojes supuesta cierta correlación entre ellos.

La versión revisada del método del sombrero de tres puntas puede ser aplicada a un conjunto de  $N$  relojes: empleando el procedimiento sobre las  $(N-1)(N-2)/2$  triadas que contienen a un mismo reloj, se obtienen idéntico número de estimas de varianza asociadas al citado reloj. La varianza absoluta asociada al reloj se calcula como media ponderada de los  $(N-1)(N-2)/2$  valores de varianza calculados, los pesos son inversamente proporcionales a las incertidumbres asociadas a cada una de las triadas [34].

La solución al problema puede alcanzarse de manera aún más elegante si se tienen en cuenta las importantes conclusiones alcanzadas en [35]:

- Definida  $\mathbf{S}$  como la matriz de covarianza (matriz simétrica de orden  $N-1$ ) cuyos términos vienen dados por (3.12) y  $\mathbf{R}$  como la matriz de covarianza (matriz simétrica de orden  $N$ ) formada por los términos de AVAR y ACOV absolutos asociados al conjunto de  $N$  relojes, puede demostrarse que  $\mathbf{R}$  es definida positiva si y solo si  $|\mathbf{R}| > 0$ .
- Cuando el número de relojes en comparación aumenta, la arbitrariedad en la determinación de la estabilidad en frecuencia absoluta disminuye.

La formulación para estimar la estabilidad de  $N$  relojes, presentada a continuación, constituye una de las aportaciones destacables de este trabajo de tesis.

Conforme va en aumento el número de relojes que se comparan entre sí, crece la dificultad en el cálculo de la solución cuasi analítica estima de  $\mathbf{R}$  con  $|\mathbf{R}| > 0$  [33, 36]. Sin embargo, existe la posibilidad de resolver el problema de estimación mediante el empleo del cálculo numérico. El problema a resolver consistirá en la minimización de una *función objetivo* supuesta la existencia de una restricción de desigualdad.

La restricción de desigualdad parece clara: si se desarrolla  $|\mathbf{R}|$  en función de  $\mathbf{S}$  y de los valores de (co)varianza  $r_{iN}; i = 1, \dots, N$ , elegidos como parámetros libres, puede deducirse la siguiente relación:

$$(3.26) \quad |\mathbf{R}| = |\mathbf{S}| \left[ r_{NN} - (r_{1N} - r_{NN}, \dots, r_{(N-1)N} - r_{NN}) \mathbf{S}^{-1} (r_{1N} - r_{NN}, \dots, r_{(N-1)N} - r_{NN})^T \right] > 0$$

Al ser la matriz de covarianza  $\mathbf{S}$  una matriz definida positiva, su determinante es mayor que cero, por lo que podemos prescindir del citado factor en la desigualdad anterior. En lo sucesivo se denominará *función de constreñimiento* a  $H(r_{1N}, \dots, r_{NN})$ , de modo que  $H(r_{1N}, \dots, r_{NN}) > 0$  represente la restricción:

$$H(r_{1N}, \dots, r_{NN}) = \frac{\left| r_{NN} - (r_{1N} - r_{NN}, \dots, r_{(N-1)N} - r_{NN}) \mathbf{S}^{-1} (r_{1N} - r_{NN}, \dots, r_{(N-1)N} - r_{NN})^T \right|}{N-1 \left| \mathbf{S} \right|} \quad (3.27)$$

El término divisor ha sido introducido al objeto de mantener el problema de minimización invariante en escala.

En cuanto a la *función objetivo* elegida, a minimizar con la condición  $|\mathbf{R}| > 0$ , se antojan dos como posibles candidatas en el problema de estimación, cada una de ellas presenta particulares ventajas e inconvenientes. La adecuada combinación de ambas llevará a la solución finalmente propuesta.

La primera de ellas es directamente proporcional a la suma cuadrática de las ACOV absolutas:

$$F_1(r_{1N}, \dots, r_{NN}) = \frac{\sum_{i < j} r_{ij}^2}{N-1 \left| \mathbf{S} \right|^2} \quad (3.28)$$

La segunda es directamente proporcional a la suma cuadrática de los coeficientes de correlación absolutos:

$$F_2(r_{1N}, \dots, r_{NN}) = \sum_{i < j} \frac{r_{ij}^2}{r_{ii} \cdot r_{jj}} \quad (3.29)$$

Las condiciones iniciales deben asegurar la convergencia del problema de minimización. Una buena elección podría ser:

$$r_{iN}^{mi} = 0 \quad \forall i < N \quad (3.30a)$$

$r_{NN}^{mi}$  se deduce de la condición de restricción impuesta por ser  $\mathbf{R}$  definida positiva: al ser  $r_{NN} - (-r_{NN}, \dots, -r_{NN}) \mathbf{S}^{-1} (-r_{NN}, \dots, -r_{NN})^T > 0$ , teniendo en cuenta que  $\mathbf{S}$  – y por

tanto  $\mathbf{S}^{-1}$  es definida positiva, la expresión  $(1, \dots, 1)\mathbf{S}^{-1}(1, \dots, 1)^T$  es mayor que cero, pudiéndose emplear el siguiente valor para  $r_{NN}^{ini}$ :

$$(3.30b) \quad 0 < r_{NN}^{ini} = \frac{1}{2(1, \dots, 1)\mathbf{S}^{-1}(1, \dots, 1)^T} < \frac{1}{(1, \dots, 1)\mathbf{S}^{-1}(1, \dots, 1)^T}$$

A igual que en el apartado anterior, en la práctica se desconoce la matriz  $\mathbf{S}$ , pero puede conocerse su estimador que se designará  $\hat{\mathbf{S}}$ . La estima de la matriz  $\mathbf{R}$ :  $\hat{\mathbf{R}}$ , se deduce de la formulación expuesta, con tal de que se sustituya  $\mathbf{S}$  por  $\hat{\mathbf{S}}$ ,  $\mathbf{R}$  por  $\hat{\mathbf{R}}$ ,  $s_{ij}$  por  $\hat{s}_{ij}$  y  $r_{ij}$  por  $\hat{r}_{ij}$ .

### 3.2.4. Consideraciones sobre la restricción impuesta por la condición $|\mathbf{R}| > 0$ sobre la estimación de las varianzas y covarianzas de *Allan* absolutas.

Para interpretar el efecto que sobre la solución al problema produce la restricción de desigualdad impuesta por la condición  $|\mathbf{R}| > 0$ , se efectuarán ciertas manipulaciones sobre la *función de constreñimiento*, tal como ha sido definida en (3.27), igualada a cero. Esta expresión representa la frontera del dominio solución y describe geoméricamente un hiperparaboloide elíptico en un espacio  $N$ -dimensional, mientras su "interior" representa la región factible del problema.

Por simplicidad en las sucesivas expresiones, la matriz  $\mathbf{S}^{-1}$  se representará como  $\mathbf{T}$ , y el elemento de la fila  $i$ -ésima y columna  $j$ -ésima como  $t_{ij}$ ;  $\mathbf{T}_{k, \dots, l, m}$  denotará al menor principal constituido por las filas y columnas  $k, \dots, l, m$  mientras  $\mathbf{T}_{k, \dots, l, m}^{(i, j)}$  representará al menor anterior orlado con la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima.

La proyección del hiperparaboloide elíptico sobre el espacio de  $N-1$  dimensiones definido por  $r_{1N}, r_{2N}, \dots, r_{(k-1)N}, r_{(k+1)N}, \dots, r_{NN}$  se obtiene a partir de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
H(r_{1N}, \dots, r_{NN})^{N-1} \sqrt{S} &\equiv r_{NN} - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (r_{iN} - r_{NN})(r_{jN} - r_{NN}) t_{ij} = 0; \\
\frac{\partial H(r_{1N}, \dots, r_{NN})}{\partial r_{kN}} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.31}$$

La segunda ecuación de (3.31) representa el lugar geométrico constituido por las hiperrectas normales al hiperparaboloide elíptico  $H = 0$ , que a su vez son perpendiculares al vector unitario en la dirección “ $k$ ”, es decir: si la ecuación de la hiperrecta normal al hiperparaboloide elíptico en cualquiera de sus puntos viene dada por:

$$\frac{r_{1,N} - r_{1,N}^0}{\left. \frac{\partial H}{\partial r_{1,N}} \right|_{(r_{1,N}^0, \dots, r_{N,N}^0)}} = \frac{r_{2,N} - r_{2,N}^0}{\left. \frac{\partial H}{\partial r_{2,N}} \right|_{(r_{1,N}^0, \dots, r_{N,N}^0)}} = \dots = \frac{r_{N,N} - r_{N,N}^0}{\left. \frac{\partial H}{\partial r_{N,N}} \right|_{(r_{1,N}^0, \dots, r_{N,N}^0)}}
\tag{3.32}$$

La condición de perpendicularidad entre ésta y alguna de vector director unitario en la dirección “ $k$ ” se obtiene haciendo el producto escalar de los vectores directores igual a cero, lo que lleva a la ecuación anterior.

Esta ecuación, que representa un hiperplano en el espacio  $N$ -dimensional, permite obtener una expresión para  $r_{kN} - r_{NN}$  en función de las restantes variables. Sustituyendo adecuadamente en la primera ecuación de (3.31) se obtiene la proyección buscada:

$$\begin{aligned}
H_k(r_{1N}, \dots, r_{(k-1)N}, r_{(k+1)N}, \dots, r_{NN}) &\equiv \\
r_{NN} - \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq k} (r_{iN} - r_{NN})(r_{jN} - r_{NN}) &\left( \frac{t_{kk} t_{ij} - t_{ik} t_{kj}}{t_{kk}} \right) = 0
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

La operación puede repetirse tantas veces como se desee de modo que en general, la proyección del hiperparaboloide elíptico original sobre el espacio definido por  $r_{1N}, \dots, r_{(k-1)N}, r_{(k+1)N}, \dots, r_{(l-1)N}, r_{(l+1)N}, \dots, r_{(m-1)N}, r_{(m+1)N}, \dots, r_{NN}$  se determina a partir de las ecuaciones:

$$(3.34) \quad H_{k,\dots,l} \equiv r_{NN} - \sum_{\substack{i \neq k \\ \dots \\ \neq l}} \sum_{\substack{j \neq k \\ \dots \\ \neq l}} (r_{iN} - r_{NN})(r_{jN} - r_{NN}) \frac{\mathbf{T}_{k,\dots,l}^{(i,j)}}{\mathbf{T}_{k,\dots,l}} = 0;$$

$$\frac{\partial H_{k,\dots,l}}{\partial r_{mN}} = 0$$

Las cuales llevan al siguiente resultado:

$$(3.35) \quad H_{k,\dots,l,m}(r_{1N}, \dots, r_{(k-1)N}, r_{(k+1)N}, \dots, r_{(l-1)N}, r_{(l+1)N}, \dots, r_{(m-1)N}, r_{(m+1)N}, \dots, r_{NN}) \equiv$$

$$r_{NN} - \sum_{\substack{i \neq k \\ \dots \\ \neq l \\ \neq m}} \sum_{\substack{j \neq k \\ \dots \\ \neq l \\ \neq m}} (r_{iN} - r_{NN})(r_{jN} - r_{NN}) \frac{\mathbf{T}_{k,\dots,l,m}^{(i,j)}}{\mathbf{T}_{k,\dots,l,m}} = 0$$

En particular, la proyección sobre el plano  $r_{1N} - r_{NN}$  vendrá dada por la ecuación que sigue, en la que  $\mathbf{T}_{11}$  representa el adjunto del elemento  $t_{11}$ :

$$(3.36) \quad (r_{NN} - r_{1N})^2 - \frac{\mathbf{T}_{11}}{|\mathbf{T}|} r_{NN} = (r_{NN} - r_{1N})^2 - s_{11} r_{NN} = 0$$

Expresión que no debe resultar extraña, y que obedece a que los valores de las variables  $r_{2N}, r_{3N}, \dots, r_{(N-1)N}$  han sido seleccionados de manera muy particular, entre aquellos que hacen máxima la superficie proyectada sobre el plano  $r_{1N} - r_{NN}$ . Cualquier otra selección de valores para  $r_{2N}, r_{3N}, \dots, r_{(N-1)N}$  hubiera llevado a un conjunto de valores factibles de  $r_{1N}$  y  $r_{NN}$  contenido en el recinto limitado por (3.36).

En efecto, si en lugar de efectuar la proyección del hiperparaboloide elíptico en el espacio  $N$ -dimensional sobre el plano  $r_{1N} - r_{NN}$  se efectúa la proyección del hiperparaboloide elíptico  $(N-1)$ -dimensional que resulte de la intersección de éste y el hiperplano situado a “distancia”  $\pm d_k$  del obtenido mediante la segunda ecuación de (3.31), siguiendo el mismo procedimiento ya introducido, se llega a:

$$(r_{NN} - r_{1N})^2 - s_{11} r_{NN} + \frac{s_{11}}{t_{kk}} \left[ \sum_{i=1}^{N-1} t_{ik}^2 + \left( \sum_{i=1}^{N-1} t_{ik} \right)^2 \right] d_k^2 = 0 \quad (3.37)$$

El término independiente es siempre positivo, de modo que cualquier “alejamiento”  $\pm d_k$  respecto del hiperplano  $N$ -dimensional que provoca la máxima proyección se traduce en una reducción del dominio factible para  $r_{1N}$  y  $r_{NN}$ .

Si efectuamos de manera sistemática proyecciones eliminando secuencialmente las coordenadas  $r_{(N-1)N}, r_{(N-2)N}, \dots, r_{2N}$  hasta alcanzar el plano  $r_{1N} - r_{NN}$ , de modo que en cada proyección se considere la intersección con hiperplanos “distanciados”  $\pm d_{N-1}, \pm d_{N-2}, \dots, \pm d_2$  respecto de aquellos que producían máxima proyección, se alcanza finalmente la expresión siguiente:

$$(r_{NN} - r_{1N})^2 - s_{11} r_{NN} + \sum_{i=2}^{N-1} k_i^2 d_i^2 = 0 \quad (3.38)$$

En la que los coeficientes  $k_i^2$  adquieren los siguientes valores:

$$k_m^2 = s_{11} \frac{\sum_{i=1}^m (\mathbf{T}_{m+1, \dots, N-1}^{(i,m)})^2 + \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{T}_{m+1, \dots, N-1}^{(i,m)} \right)^2}{\mathbf{T}_{m+1, \dots, N-1} \mathbf{T}_{m, m+1, \dots, N-1}}; \quad m = 2, \dots, N-2 \quad (3.39)$$

$$k_{N-1}^2 = \frac{s_{11}}{t_{(N-1)(N-1)}} \left[ \sum_{i=1}^{N-1} t_{i(N-1)}^2 + \left( \sum_{i=1}^{N-1} t_{i(N-1)} \right)^2 \right]$$

Las “distancias”  $d_k$  se expresan a partir de los hiperplanos ya citados tal cual sigue:

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^m (r_{1N} - r_{NN}) \mathbf{T}_{m+1, \dots, N-1}^{(i,m)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\mathbf{T}_{m+1, \dots, N-1}^{(i,m)})^2 + \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{T}_{m+1, \dots, N-1}^{(i,m)} \right)^2}}; \quad m = 2, \dots, N-2 \quad (3.40)$$

$$d_{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (r_{iN} - r_{NN}) t_{i(N-1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} t_{i(N-1)}^2 + \left( \sum_{i=1}^{N-1} t_{i(N-1)} \right)^2}}$$

Aunque el razonamiento seguido carece de interés desde el punto de vista práctico, la ecuación (3.38) presenta una lectura interesante:

- La incorporación de un nuevo reloj al conjunto nunca disminuirá el efecto restrictivo en las variables  $r_{iN}$  y  $r_{NN}$  en el supuesto de que las restantes variables se mantuvieran definidas de acuerdo con lo expresado en las ecuaciones (3.40):  $(r_{iN} = r_{iN}(r_{1N}, r_{NN}; d_2, \dots, d_i) \quad i = 2, \dots, N-2)$ , sea cual fuere el valor de ACOV absoluta estimada entre el nuevo reloj y el de referencia.
- Si por el contrario, al aumentar el número de relojes el criterio de selección de la solución óptima es tal que los valores de ACOV absoluta ya estimados sufren variación (hecho que por otra parte es perfectamente factible, especialmente cuando el número de relojes que constituyen el conjunto es reducido, o cuando el criterio de selección de la solución óptima *–función objetivo–* no ha sido muy acertado), nada debe hacer pensar que los valores de  $r_{iN}$  y  $r_{NN}$  van a estar sometidos a una mayor restricción, pues no existe ligadura alguna que condicione el problema, salvo la ya conocida dada por (3.36).

Todo ello sin perjuicio de que tal como se citó en el apartado 3.2.3, la arbitrariedad en la determinación de la estabilidad en frecuencia absoluta disminuya al aumentar el número de relojes en comparación, es decir: aunque el dominio delimitado por la comparación de  $N$  relojes tenga una dimensión superior debido a la variable adicional  $r_{(N-1)N}$ , si se fija un valor para este parámetro se obtendrá un dominio  $(N-1)$ –dimensional que nunca será mayor al obtenido por comparación de  $N-1$  relojes.

Esta última afirmación abre una nueva vía en el proceso de determinación de la estabilidad en frecuencia absoluta, pues si de alguna forma pudiera estimarse la ACOV absoluta  $r_{(N-1)N}$ , el dominio solución resultante estaría incluido en el dominio  $(N-1)$ –dimensional delimitado por comparación de  $N-1$  relojes (1 a  $(N-2)$ –simo y  $N$ –simo). De

hecho, si se efectúan las sucesivas proyecciones del hiperparaboloide elíptico  $(N-1)$ -dimensional obtenido una vez fijado el valor del parámetro  $r_{(N-1)N}$ , se alcanza finalmente la siguiente ecuación implícita:

$$s_{(N-1)(N-1)} (r_{1N} - r_{NN})^2 + (-1)^N 2 (r_{1N} - r_{NN}) (r_{(N-1)N} - r_{NN}) + s_{11} (r_{1N} - r_{NN})^2 - (s_{11} s_{(N-1)(N-1)} - s_{1(N-1)}^2) r_{NN} = 0 \quad (3.41)$$

Esta ecuación representa una elipse en el plano  $r_{1N} - r_{NN}$ , que permanece inscrita en la parábola (3.36), con los siguientes puntos de corte en los que ambas curvas son tangentes:

$$r_{NN}^0 = \frac{1}{2s_{11}} \left( 2s_{11} r_{(N-1)N} + s_{1(N-1)}^2 \pm s_{1(N-1)} \sqrt{s_{1(N-1)}^2 + 4s_{11} r_{(N-1)N}} \right) \quad (3.42)$$

$$r_{1N}^0 = r_{NN}^0 \mp \sqrt{s_{11} r_{NN}^0}$$

En el caso particular en el que el discriminante de  $r_{NN}^0$  sea negativo, ni siquiera llegarán a tangente ambas proyecciones.

Si se pudieran estimar por otros métodos otros valores de ACOV absolutas, se irían obteniendo sucesivas proyecciones de carácter elíptico sobre el plano  $r_{1N} - r_{NN}$  inscritas en las ya obtenidas previamente, de modo que el dominio factible en este plano cada vez aparecería más restringido.

### 3.2.5. Resolución numérica del problema de estimación de estabilidad de $N$ relojes.

Tal como se introdujo en el apartado 3.2.3, el problema de la estimación puede resolverse numéricamente optimizando (minimizando) una *función objetivo* del tipo (3.28) o (3.29), con la condición de que se verifique que la función de constreñimiento (3.27) es mayor que cero; se trata por tanto de un problema de optimización, también conocido como programa matemático.

La idea básica en la optimización con restricciones consiste en transformar el problema en un subproblema más sencillo, que pueda ser resuelto y empleado como base de un proceso iterativo. La traslación desde el problema con restricciones a uno más básico sin restricciones se efectúa siguiendo métodos basados en la solución de las ecuaciones de *Karush–Kuhn–Tucker (KKT)*. Estas ecuaciones, descritas previamente por W. Karush (1939) y posteriormente publicadas H. Kuhn y A. Tucker (1951), son condiciones necesarias de optimalidad, que constituyen la generalización de las dadas por *Lagrange* para problemas con restricciones de desigualdad.

El teorema de *Karush–Kuhn–Tucker* expresa lo siguiente:

“Dado un problema de la forma:

$$(3.43) \quad \begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & g_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \dots \\ & g_m(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned}$$

que tiene un mínimo local en el punto  $\mathbf{x}_{\min}$ . Si los vectores gradientes de las restricciones saturadas en  $\mathbf{x}_{\min}$  son linealmente independientes en  $\mathbf{x}_{\min}$ , entonces cada restricción saturada tiene asociado un número positivo  $\lambda_i \geq 0$ , (conocido como multiplicador de *Karush–Kuhn–Tucker* o variable dual del problema) de tal forma que:

$$(3.44a) \quad \nabla f(\mathbf{x}_{\min}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(\mathbf{x}_{\min}) = 0$$

Para que en la expresión anterior intervengan todas las restricciones se asocian multiplicadores nulos a las restricciones no saturadas, para ello se imponen las condiciones:

$$(3.44b) \quad \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x}_{\min}) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.”$$

Una restricción se dice saturada cuando en la solución óptima (u óptimo) se verifica en forma de igualdad. Cuando lo hace en forma de desigualdad estricta, la restricción se denomina no saturada.

El teorema de *Karush–Kuhn–Tucker* sirve, igual que el teorema de *Lagrange*, para determinar los posibles óptimos de un problema (condición necesaria de optimalidad); para ello habría que resolver un sistema de  $n + m$  ecuaciones con  $n + m$  incógnitas. Una vez resuelto este sistema habría que seleccionar aquellas soluciones que verifican las desigualdades. Por analogía con los problemas con restricciones de igualdad, a estos puntos se les llama puntos estacionarios.

Una vez determinados los puntos estacionarios, deben estudiarse las condiciones suficientes de optimalidad que permitan decidir si realmente los puntos localizados corresponden a verdaderas soluciones. Existe no obstante un caso particular, conocido como caso convexo, según el cual si el problema es convexo las condiciones necesarias de *Karush–Kuhn–Tucker* son además suficientes.

Un problema convexo es aquel de la forma:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in D \end{cases} \quad (3.45)$$

donde  $D$  es un conjunto convexo y  $f(\mathbf{x})$  una función convexa. La propiedad más importante de este tipo de problemas viene dada por el conocido como teorema fundamental de la programación convexa que asegura que todo óptimo local de un problema convexo es también óptimo global. Para que un conjunto dado mediante inecuaciones sea convexo basta con que las funciones que intervienen en las desigualdades del tipo menor o igual a una constante sean convexas.

Si además de lo anterior puede asegurarse que la *función objetivo* es estrictamente convexa (problema conocido como estrictamente convexo), en caso de que exista un óptimo, éste será único.

Alcanzado un punto estacionario en un problema convexo, se puede concluir diciendo que el punto encontrado es mínimo y además global. Si el problema es estrictamente convexo puede asegurarse que este mínimo es el único en el conjunto  $D$  de soluciones factibles.

Llegado este momento en el planteamiento del problema de optimización, es preciso indicar que el teorema de *Karush–Kuhn–Tucker* afecta a restricciones de desigualdad en sentido amplio (menor o igual que), pues las desigualdades estrictas pueden conducir a problemas sin solución. Aun siendo la restricción que nos ocupa una desigualdad de tipo estricto, se tratará como si tuviera sentido amplio, lo que a efectos prácticos no revestirá mayor importancia.

La solución a las ecuaciones de *Karush–Kuhn–Tucker* constituye la base del algoritmo de programación no lineal empleado. Este algoritmo emplea un método de Programación Cuadrática Secuencial (*SQP*), denominado así ya que en cada iteración principal se resuelve un subproblema de programación cuadrática (*QP*). Estos métodos son conocidos también como de Programación Cuadrática Iterativa, Programación Cuadrática Recursiva o de Métrica Variable Restringida.

Los métodos *SQP* representan el estado del arte entre los métodos de programación no lineal. El método empleado imita como tantos otros al método de *Newton* utilizado en los problemas de optimización sin restricciones (por ello son conocidos como métodos de actualización de cuasi-*Newton*). En particular, se ha aplicado el método conocido como *BFGS* en honor a sus autores (*Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno*) [37–41].

En cada iteración principal se calcula la matriz Hessiana ( $H_k$ ) de la función Lagrangiana ( $L(\hat{r}_{1N}, \dots, \hat{r}_{NN}; \lambda) = F_i(\hat{r}_{1N}, \dots, \hat{r}_{NN}) + \lambda \cdot H(\hat{r}_{1N}, \dots, \hat{r}_{NN})$ ) a partir de su valor en la iteración anterior ( $H_{k-1}$ ). La linealización de la *función de constreñimiento* permite finalmente alcanzar el subproblema *QP* de resolución más simple:

$$(3.46) \quad \min_{\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^N} \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \cdot H_k \cdot \mathbf{d} + \nabla F_i(\hat{r}_{1N}^k, \dots, \hat{r}_{NN}^k)^T \cdot \mathbf{d} \\ \nabla H(\hat{r}_{1N}^k, \dots, \hat{r}_{NN}^k)^T \cdot \mathbf{d} + H(\hat{r}_{1N}^k, \dots, \hat{r}_{NN}^k) \leq 0$$

Este subproblema se ha resuelto mediante un conjunto estratégico activo similar al que se describe en [42] y [43]. La solución obtenida se emplea en la siguiente iteración, pues  $\hat{r}_{iN}^{k+1} = \hat{r}_{iN}^k + \alpha^k \cdot d_i^k$  con  $i = 1, \dots, N$ . El parámetro  $\alpha^k$ , indicativo de la longitud del paso, se determina mediante un procedimiento de búsqueda apropiado de manera que se obtenga suficiente decrecimiento en una función de mérito similar a la propuesta en [44] y [45].

### 3.2.6. Elección de la *función objetivo* para el problema de optimización.

En el apartado 3.2.3 se han citado dos *funciones objetivo* como posibles candidatas para el problema de optimización a resolver (expresiones (3.28) y (3.29)). Ambas presentan sus particulares ventajas e inconvenientes, cuya discusión se centra en este apartado.

Al seleccionar una *función objetivo*, hay dos aspectos que deben ser tenidos en cuenta:

- La *función objetivo* debe tener sentido físico, es decir, debe expresar fielmente la propiedad que se desea minimizar: dependencia entre relojes.
- El problema de optimización idóneo a resolver es aquél estrictamente convexo.

Como se recordará del apartado anterior, un problema de optimización estrictamente convexo requiere que la *función de constreñimiento* sea convexa, y así es, pues tal como se indicó en el apartado 3.2.4,  $H(r_{1N}, \dots, r_{NN}) = 0$  representa un hiperparaboloide elíptico en el espacio  $N$ -dimensional, siendo  $H(r_{1N}, \dots, r_{NN}) > 0$  su interior. La restricción de desigualdad representa por tanto un conjunto convexo (en sentido estricto) de soluciones factibles para el problema de optimización [35].

Reconocer si una función es convexa utilizando la definición de convexidad resulta ser tarea en muchos casos complicada. Cuando las funciones son diferenciables existen procedimientos que facilitan esta tarea; en particular, cuando una función es dos veces derivable con respecto a todas sus variables, el carácter de la matriz Hessiana (semidefinida positiva, semidefinida negativa, definida positiva o definida negativa) para cualquier valor  $\mathbf{x}$  del dominio determinará si la función es o no convexa. La función  $f(\mathbf{x})$  es convexa si y solo si la matriz Hessiana de  $f(\mathbf{x})$  es semidefinida

positiva; si la matriz Hessiana de  $f(\mathbf{x})$  es definida positiva, la función  $f(\mathbf{x})$  es estrictamente convexa (ésta última propiedad expresa una condición suficiente, aunque no necesaria).

En el caso de la primera *función objetivo* propuesta (3.28), no solo se dan las circunstancias de derivabilidad citadas en el párrafo anterior, sino que al ser una función de segundo grado, las segundas derivadas son constantes, lo que facilita el estudio del carácter de la matriz Hessiana y la consecuente caracterización de la función.

El empleo de la siguiente igualdad del análisis algebraico simplifica en gran medida los cálculos posteriores:

$$(3.47) \quad \begin{bmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+z \end{bmatrix} = ab \dots z \left( 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{z} \right)$$

Obtenida la matriz Hessiana de la función (3.28), su carácter podría deducirse a partir del signo de los menores principales “delanteros” de la citada matriz, entendiéndose como tales las siguientes expresiones, en las que  $h_{ij}$  representa cada uno de los elementos de la matriz Hessiana  $\mathbf{H}$ :

$$(3.48) \quad p_0 = 1, \quad p_1 = h_{11}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}, \quad p_N = |\mathbf{H}|$$

La matriz Hessiana obtenida en este caso es:

$$(3.49) \quad \mathbf{H}_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N-1} \mathbf{S}_1^2 \begin{bmatrix} 2(N-1) & 2 & \cdots & 2 & -2(N-2) \\ 2 & 2(N-1) & \cdots & 2 & -2(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2(N-1) & -2(N-2) \\ -2(N-2) & -2(N-2) & \cdots & -2(N-2) & (N-2)(N-1) \end{bmatrix}$$

Y las expresiones que engloban a los citados menores son:

$$p_m = \frac{2^m (N-2)^{m-1} (N+m-2)}{N \sqrt{|\mathbf{S}|}^{2m}}; \quad 1 \leq m \leq N \quad (3.50)$$

Todas ellas son positivas siempre y cuando  $N \geq 3$ , lo cual implica que la función es estrictamente convexa, siéndolo consiguientemente el problema de optimización que se desea resolver.

La caracterización de la segunda *función objetivo* (3.29) no resulta fácil, pues aun tratándose de una función diferenciable, las derivadas sucesivas se complican y con ello los métodos de reconocimiento de la convexidad basados en éstas: el que emplea el vector gradiente y el basado en el carácter de la matriz Hessiana. No obstante, mediante contraejemplos ha quedado demostrado que no puede asegurarse la convexidad de las funciones del tipo (3.29) [46]:

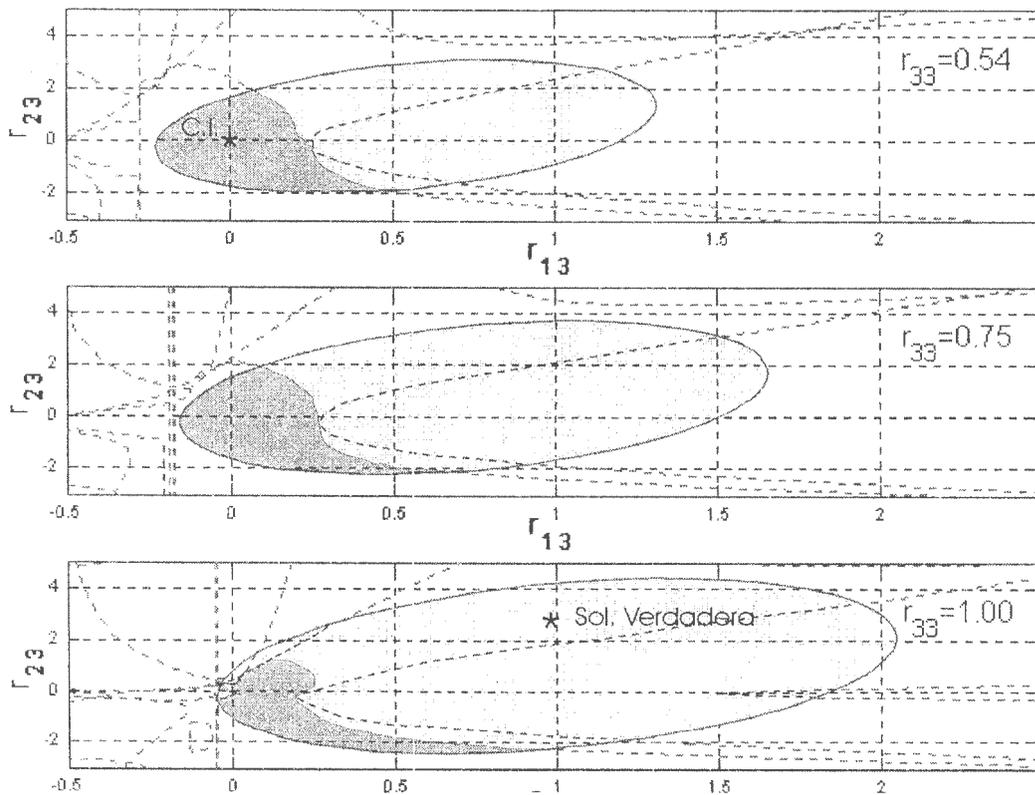


Figura 3.1: Carácter de una matriz Hessiana correspondiente a un ejemplo particular para tres relojes.

La figura 3.1 muestra tres secciones del hiperparaboloide elíptico que limita la región factible para la matriz de covarianza  $\hat{\mathbf{S}}$ . Esta matriz ha sido calculada a partir de tres series temporales de datos simulados con ruido blanco de frecuencia de carácter *gaussiano* y varianzas absolutas (de *Allan*) y coeficientes de correlación  $\rho_{ij}$  predeterminados, que prefijan por completo la matriz de covarianza de los relojes  $\hat{\mathbf{R}}$ :  $\hat{r}_{11} = 2$ ,  $\hat{r}_{22} = 16$ ,  $\hat{r}_{33} = 1$  y  $\hat{\rho}_{ij} = 0.68 \forall i \neq j$ . Cuya correspondiente matriz  $\hat{\mathbf{S}}$  viene dada por:

$$(3.51) \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1.09 & 1.18 \\ 1.18 & 11.35 \end{bmatrix}$$

Las secciones se refieren respectivamente a los planos  $\hat{r}_{33} = [2 \cdot (11) \hat{\mathbf{S}}^{-1} (11)^T]^{-1} = 0.54$ ,  $\hat{r}_{33} = 0.75$  y  $\hat{r}_{33} = 1.00$ , e incluyen al punto inicial  $(0, 0, 0.54)$  y a la presunta solución  $(0.97, 2.73, 1.00)$ . En cada sección se han representado las regiones en que la función objetivo es (o no) definida positiva (signo + o -). Este ejemplo pone de manifiesto que la segunda función objetivo ( $F_2$ ) no lleva a una solución única.

La conclusión de los párrafos anteriores supone un serio contratiempo, pues esta *función objetivo* es la que contiene mayor significado físico, adaptándose perfectamente a la realidad del problema. Ante ello se ha optado por introducir un proceso adaptivo, según el cual se efectúan sucesivas aproximaciones a una solución única con pleno significado físico.

La nueva *función objetivo* propuesta es la siguiente:

$$(3.52) \quad F_3^{(l)}(\hat{r}_{1N}, \dots, \hat{r}_{NN}) = \sum_{i < j} \left( \frac{r_{ii}^{(l-2)} + r_{ii}^{(l-1)}}{4 \cdot \hat{r}_{ij}^2} \right) \cdot \left( \frac{r_{jj}^{(l-2)} + r_{jj}^{(l-1)}}{4 \cdot \hat{r}_{ij}^2} \right) = \sum_{i < j} q_i q_j \cdot \hat{r}_{ij}^2$$

En esta ecuación, los coeficientes  $k_{ij} = q_i \cdot q_j$  se mantienen constantes durante la resolución de cada problema de minimización, tomando como nuevo valor el que

resulta de invertir el producto de las medias aritméticas de las varianzas  $\hat{r}_{ii}$  y  $\hat{r}_{jj}$  en las dos iteraciones previas, y asumiendo que  $r_{ii}^{(-1)} = r_{ii}^{(0)}$  y  $r_{jj}^{(-1)} = r_{jj}^{(0)}$ .

El superíndice  $\ell$ ) denota el orden que ocupa cada problema de optimización en las sucesivas aproximaciones; así, si se eligen los valores iniciales  $\hat{r}_{iN}^{mi}$  conforme a (3.30a) y (3.30b) para asegurar un punto de partida dentro de la región factible, se tendrá que:

$$\begin{aligned} r_{ii}^{(0)} &= \hat{s}_{ii} - \hat{r}_{NN}^{mi}; \\ r_{jj}^{(0)} &= \hat{s}_{jj} - \hat{r}_{NN}^{mi} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Las iteraciones sucesivas toman como condiciones iniciales el resultado de la última iteración.

Si el problema es convergente, en el límite cuando  $\ell \rightarrow \infty$  los valores  $k_{ij}$  tienden a  $(\hat{r}_{ii} \cdot \hat{r}_{jj})^{-1}$ , y la solución final será la que minimice la suma cuadrática de las covarianzas normalizadas.

En cuanto al carácter del problema de minimización a resolver en cada iteración, puede asegurarse que será estrictamente convexo tal como quedará demostrado a continuación, por lo que los resultados parciales serán únicos, y llevarán finalmente a un mínimo local dentro de la región factible que, aunque no necesariamente tiene porqué ser único, de serlo será el mínimo global dentro de la región factible:

La matriz Hessiana asociada a la función  $F_3$  es:

$$\mathbf{H}_3 \equiv \begin{bmatrix} 2q_1(S-q_1) & 2q_1q_2 & \cdots & 2q_1q_{N-1} & 2q_1(q_1+q_N-S) \\ 2q_2q_1 & 2q_2(S-q_2) & \cdots & 2q_2q_{N-1} & 2q_2(q_2+q_N-S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2q_{N-1}q_1 & 2q_{N-1}q_2 & \cdots & 2q_{N-1}(S-q_{N-1}) & 2q_{N-1}(q_{N-1}+q_N-S) \\ 2q_1(q_1+q_N-S) & 2q_2(q_2+q_N-S) & \cdots & 2q_{N-1}(q_{N-1}+q_N-S) & 2\sum_{i<j}^{N-1} q_i q_j \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

En la que  $S$  representa la suma de todos los coeficientes  $q_i$ :  $S = \sum_{i=1}^N q_i$

Como paso previo a la demostración, se procederá a la manipulación del determinante de la matriz Hessiana para simplificar su expresión:

1. Se sustituye la columna  $N$ -sima por la que resulta de sumar a ésta, previamente multiplicada por 2, las  $(N-1)$  columnas anteriores (sale fuera el factor  $1/2$ ).
2. Se sustituye la fila  $N$ -sima por la que resulta de sumar a ésta, previamente multiplicada por 2, las  $(N-1)$  filas anteriores (sale fuera el factor  $1/2$ ).

El resultado obtenido es el expresado a continuación, en el que puede observarse como, salvo el factor  $1/4$ , el determinante coincide formalmente con el correspondiente a cada uno de los menores principales “delanteros” de la matriz:

$$(3.55) \quad \mathbf{H}_3 \equiv \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2q_1(S-q_1) & 2q_1q_2 & \cdots & 2q_1q_{N-1} & 2q_1q_N \\ 2q_2q_1 & 2q_2(S-q_2) & \cdots & 2q_2q_{N-1} & 2q_2q_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2q_{N-1}q_1 & 2q_{N-1}q_2 & \cdots & 2q_{N-1}(S-q_{N-1}) & 2q_{N-1}q_N \\ 2q_Nq_1 & 2q_Nq_2 & \cdots & 2q_Nq_{N-1} & 2q_N(S-q_N) \end{vmatrix}$$

Todo menor principal será directamente proporcional a una potencia de dos, al producto de los  $m$  primeros términos  $q_i$  elevados al cuadrado y al determinante  $\Delta_m$ , por lo que el carácter de la matriz Hessiana vendrá determinado exclusivamente por el signo de estos últimos determinantes. Para la resolución formal del determinante  $\Delta_m$ , se hará uso de la identidad (3.47), que permite obtener el siguiente resultado:

$$(3.56) \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} S-q_1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & S-q_2 & \cdots & 1 \\ 1 & q_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & S-q_m \\ & & & q_m \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^m (S-2q_i) + \sum_{j=1}^m q_j \prod_{i \neq j}^m (S-2q_i) \prod_{i=1}^m q_i$$

Este resultado dice poco acerca del signo de cada determinante, pero el desarrollo del numerador nos lleva a otra expresión de sencilla interpretación, en la que  $\Sigma_{m,i}$  denota la suma de las combinaciones  $i$ -arias de los  $m$  primeros términos  $q_i$ :

$$\prod_{i=1}^m (S - 2q_i) + \sum_{j=1}^m q_j \prod_{i \neq j}^m (S - 2q_i) = S^m + \sum_{i=1}^m (i-2)(-2)^{i-1} \Sigma_{m,i} S^{m-i} \quad (3.57)$$

Los términos del sumatorio en el segundo miembro de (3.57) adquieren los siguientes valores:

a.) Para  $i=1 \Rightarrow -\Sigma_{m,1} S^{m-1}$ . Esta expresión combinada con  $S^m$  lleva a  $S^{m-1} (S - \Sigma_{m,1}) =$

$$= S^{m-1} \sum_{i=m+1}^N q_i > 0$$

b.) Para  $i=2 \Rightarrow 0$ .

c.) Para  $i$  impar,  $i > 2$ ;  $i = 2n+1 \Rightarrow (2n-1)2^{2n} \Sigma_{m,2n+1} S^{m-2n-1}$ .

d.) Para  $i$  par,  $i > 2$ ;  $i = 2(n+1) \Rightarrow -n2^{2(n+1)} \Sigma_{m,2(n+1)} S^{m-2(n+1)}$ .

Los términos impares son siempre positivos, pero los pares son negativos. Ahora bien, la combinación de dos términos consecutivos, impar y par, llevan a la expresión:

$$2^{2n} S^{m-2(n+1)} \left[ (2n-1) \Sigma_{m,2n+1} S - 4n \Sigma_{m,2(n+1)} \right] \quad (3.58)$$

Estas expresiones son siempre positivas ya que el desarrollo de  $\Sigma_{m,2n+1} S$  lleva, entre otros términos positivos, a  $2(n+1)$  términos de la forma  $\Sigma_{m,2(n+1)}$ ; si se agrupan convenientemente los términos en la forma  $\Sigma_{m,2(n+1)}$ , el coeficiente asociado será:  $2(2n^2 - n - 1)$ . Esta expresión en ningún caso será negativa, anulándose tan solo cuando  $n$  adquiriera el valor unidad.

Todos los menores principales “delanteros” son positivos, quedando demostrado el carácter de la matriz Hessiana  $\mathbf{H}_3$  (definida positiva).

La nueva función objetivo  $F_3$ , definida conforme a (3.52), aglutina las ventajas de las funciones previamente introducidas: convexidad estricta y acuerdo con la realidad física del problema a resolver.

### 3.3. Test de independencia entre relojes

En el intento por obtener una matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  de covarianza con sentido físico, los estimadores de ACOV absolutas  $(\hat{r}_{ij}, i \neq j)$  adquieren un valor que por lo general diferirá de cero. Este hecho hace pensar en la reconsideración del problema de cálculo de los estimadores de  $\omega_i$  en (3.1), pues si no se cumple la hipótesis de independencia entre relojes, la expresión (3.6) no representará la condición de máxima estabilidad en la escala conjunta.

Al margen de lo expresado en el párrafo anterior, no debe perderse de vista el modo en que ha sido estimada la matriz  $\hat{\mathbf{R}}$ : haciendo mínima la suma cuadrática de los coeficientes de correlación absolutos.  $\hat{\mathbf{R}}$  es por tanto la solución a un problema de optimización particular, de modo que su empleo íntegro en la determinación de los pesos relativos podría traducirse en una escala conjunta final con una estabilidad igual o peor a la obtenida empleando pesos basados únicamente en los valores estimados de AVAR absolutos (diagonal de  $\hat{\mathbf{R}}$ ).

Para determinar si el grado de correlación entre los  $N$  relojes es suficientemente bajo como para prescindir de las estimas de ACOV absolutas en el cálculo de los pesos relativos, se ha ideado un test de hipótesis con el fin de evidenciar la independencia entre éstos. De otro modo, la teoría general de mínimos cuadrados que se verá en el próximo apartado da respuesta al cálculo de los pesos relativos a partir de toda la información aportada por la matriz de covarianza  $\hat{\mathbf{R}}$ , incluidos los términos de covarianza.

Si el test de hipótesis se supera con éxito, la decisión final sobre el uso o no de las estimas de ACOV absolutas dependerá de la estabilidad apreciada en la escala conjunta final para el intervalo de tiempo  $\tau$  en que ha sido optimizada.

Independientemente de la decisión adoptada, el test siempre será útil para controlar el grado de correlación entre relojes, alertando en caso de que éste aumentara, pues este hecho debe ser corregido ya que cuanto menor sea la dependencia entre relojes, mayor será la estabilidad alcanzada en la escala conjunta final.

El test de independencia, apoyado en el uso de tablas  $r \times c$  (también llamadas tablas de contingencia) [47, 48], se basa en el muestreo de una población y posterior encasillado del resultado de acuerdo con dos “criterios de clasificación” en diferentes clases dentro de cada “criterio”. Las filas representan las clases de la variable 1 (1<sup>er</sup> criterio de clasificación) y las columnas representan las clases de la variable 2 (2<sup>o</sup> criterio de clasificación).

Esta técnica permite evaluar la independencia entre parejas de relojes, en tanto que la técnica del “sombbrero de  $N$  puntas” lleva al cálculo de la matriz de covarianza  $\hat{\mathbf{R}}$ , cuyos términos fuera de la diagonal son estimas de la correlación existente entre todo el conjunto de relojes. La primera técnica, no obstante, establece un criterio explícito de aceptación o rechazo de la hipótesis, a diferencia de la segunda técnica que se limita a dar una estima de las citadas correlaciones.

En el caso que nos ocupa, cada muestra constituye un vector aleatorio bidimensional asociado a determinado instante  $t$ , en el que cada componente obedece a la desviación normalizada de frecuencia – promediada en un tiempo  $\tau$  – referida a UTC, de los relojes  $i$ -simo y  $j$ -simo respectivamente.

En realidad, las muestras deberían estar constituidas por parejas de valores absolutos de desviación normalizada de frecuencia, pero esto es impracticable. Al trabajar con datos de diferencias de fase–tiempo referidos a una escala mucho más estable que la generada por cada reloj, las variaciones observadas con el transcurso del tiempo en la desviación normalizada de frecuencia referida a UTC podrán suplir a las propias de la desviación normalizada de frecuencia absoluta del reloj en cuestión sin riesgo de que por ello se cometa un error considerable.

Una vez encasillados los datos en la tabla  $r \times c$ , la hipótesis nula (independencia de ambos criterios de clasificación) puede comprobarse por comparación de cómo se distribuyen las desviaciones normalizadas de frecuencia en clases de la variable 1 para cada clase de la variable 2 (o viceversa). Si la distribución en frecuencias estadísticas de la variable 1 se mantiene similar para cada clase de la variable 2, parece lógico pensar en la independencia de ambas componentes en el vector aleatorio bidimensional (independencia de las series de desviaciones normalizadas de frecuencia generadas por los relojes  $H_i$  y  $H_j$ ). Si por el contrario, las distribuciones para cada clase de la variable 2 son suficientemente diferentes, lo razonable sería pensar que la hipótesis de independencia no se cumple (hipótesis alternativa). En cualquier caso, el test diseñado para probar la hipótesis nula debe ser capaz de evaluar cuantitativamente este hecho y establecer un criterio concreto para admitir o rechazar la hipótesis.

La hipótesis nula podría expresarse analíticamente del siguiente modo:

$$(3.59) \quad H_0: p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$$

Expresión en la que  $p_{ij}$  representa la probabilidad de que un resultado pertenezca a la fila  $i$ -sima y columna  $j$ -sima, mientras  $p_{i.}$  y  $p_{.j}$  son las probabilidades de que un resultado pertenezca a la fila  $i$ -sima y columna  $j$ -sima respectivamente.

Si se cumple la hipótesis nula, la frecuencia estadística esperada en cada casilla  $e_{ij}$  puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$(3.60) \quad e_{ij} = \frac{o_{i.} \cdot o_{.j}}{n}$$

Siendo  $o_{i.}$  y  $o_{.j}$  el número de resultados que cayeron en la fila  $i$ -sima y en la columna  $j$ -sima respectivamente, y  $n$  el número total de muestras (vectores bidimensionales).

El problema se reduce a decidir si efectivamente las frecuencias estadísticas esperadas representan a sus correspondientes observadas  $o_{ij}$ . Si existe concordancia entre estos

valores, las desviaciones  $o_{ij} - e_{ij}$  deben ser pequeñas. Si por el contrario, las desviaciones son elevadas, la hipótesis de independencia debe ser considerada incorrecta.

Un razonable estadístico del acuerdo entre las distribuciones observadas y esperadas será:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad (3.61)$$

La hipótesis nula será rechazada si el valor de este estadístico excede el de  $\chi^2_{1-\alpha}$  para  $rc - 1 - [(r-1) + (c-1)] = (r-1)(c-1)$  grados de libertad, siendo  $\alpha$  el nivel de significancia, es decir, la probabilidad de cometer un error de tipo I (probabilidad de que cumpliéndose la hipótesis nula, haya sido rechazada por no superar el test), y  $r$  y  $c$  el número de filas y columnas de la tabla de contingencia, es decir: el número de clases de las variables 1 y 2 respectivamente.

El nivel de significancia no debe ser excesivamente pequeño, pues afectaría negativamente sobre la probabilidad de que se cometiera un error tipo II: probabilidad de que se acepte la hipótesis nula cuando realmente los dos criterios de clasificación son dependientes. Los valores usualmente asignados al coeficiente  $\alpha$  son: 0.05 o 0.01.

Para que pueda aplicarse con éxito un test tipo Chi-cuadrado como el que se acaba de introducir, deben verificarse previamente las siguientes hipótesis:

- Las  $n$  muestras o vectores aleatorios bi-dimensionales implicados en el test deben ser independientes.
- Las frecuencias estadísticas esperadas deben estar próximas o ser superiores a 5.
- El número de casillas de la tabla  $r \times c$  debe ser igual o mayor de 4.

En la tabla de doble entrada que sigue (Tabla 3.1), aparecen ordenados de mayor a menor estabilidad los cinco patrones de haz de cesio del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando que contribuyeron de manera continuada en la

generación de la escala UTC durante el periodo comprendido entre los DJM's 50084 y 51724. Los dos primeros dígitos indican el tipo de reloj conforme a la codificación asignada por la Sección de Tiempo del BIPM, los restantes se refieren al número de serie dentro de cada tipo. Los patrones evaluados obedecen a los siguientes códigos y tipos.

- 14: HEWLETT – PACKARD 5061A OPT. 4
- 31: HEWLETT – PACKARD 5051B OPT. 4
- 35: HEWLETT – PACKARD 5071A *high performance*.

A partir de los datos de diferencias de fase–tiempo respecto de UTC, disponibles a intervalos de tiempo de cinco días (DJM's acabados en 4 y 9), se han deducido las desviaciones normalizadas de frecuencia promediadas en veinte días sin efectuar solapamiento entre muestras; este intervalo de tiempo es el seleccionado para optimizar la escala conjunta, por lo que el resultado de aplicar este test adquiere un significativo interés en el proceso de determinación de pesos para la media ponderada. Como por otra parte, el tipo de ruido predominante observado para este intervalo de tiempo es blanco de frecuencia en todos y cada uno de los cinco relojes, puede concluirse afirmándose que todas las realizaciones de desviación normalizada de frecuencia media se corresponden con ensayos fundamentalmente independientes.

Los valores de desviación normalizada de frecuencia media correspondientes a cada pareja de relojes  $H_i$  y  $H_j$  se han distribuido en dos y tres clases respectivamente; las referidas al primer reloj se han definido del siguiente modo:  $\{(-\infty, y_i), [y_i, +\infty)\}$ , mientras las del segundo lo han hecho como sigue:  $\{(-\infty, y_j - 0.427\sigma), [y_j - 0.427\sigma, y_j + 0.427\sigma), [y_j + 0.427\sigma, +\infty)\}$ . La elección de las fronteras entre clases ha venido condicionada por la necesidad de que las frecuencias estadísticas esperadas en todas las casillas fueran iguales o superiores a 5; este requisito es uno de los establecidos anteriormente si se desea aplicar con éxito el test. El número de grados de libertad es dos, lo que junto al nivel de significancia seleccionado ( $\alpha = 5\%$ ), lleva a que  $\chi_{95}^2$  es igual a 5.99.

Cada celda en la tabla refleja el valor  $\chi^2$  (3.61) obtenido para cada par de relojes considerados. La tabla muestra que por lo general, la hipótesis de independencia siempre es aceptada, a excepción de las combinaciones resaltadas con fondo gris para las que como consecuencia del test se deduce dependencia entre relojes.

	<b>35 718</b>	<b>14 896</b>	<b>14 1569</b>	<b>31 422</b>	
<b>35 583</b>	5.45	4.82	1.78	1.18	<b>35 583</b>
	<b>35 718</b>	0.23	0.02	5.72	<b>35 718</b>
		<b>14 896</b>	10.61	1.44	<b>14 896</b>
			<b>14 1569</b>	0.42	<b>14 1569</b>
				<b>31 422</b>	

**Tabla 3.1:** Test de independencia.  $\chi^2 > 5.99$  indica dependencia entre parejas ( $\alpha=5\%$ ).

La aparente dependencia entre los relojes 14 896 y 14 1569 puede ser debida a diferentes circunstancias: a una apreciable sensibilidad a las condiciones ambientales (fundamentalmente a la temperatura y humedad relativa) en este modelo de patrones, se le suma la proximidad con que estaban ubicados ambos equipos (estantes anexos). A ello hay que añadir el hecho de que el periodo al que corresponden las lecturas de datos empleados en este test contiene al último tercio de vida de los tubos de cesio de los patrones implicados; durante este periodo cabría esperar el progresivo deterioro en el comportamiento de estos dos patrones, en cuyo caso el valor observado en la tabla de contingencia podría ser indicativo de este hecho. En cualquier caso, el modelo HP 5061A de Hewlett Packard ha quedado obsoleto en cuanto a prestaciones, por lo que conforme alcanzaron el final de la vida del tubo, fueron sustituidos por los nuevos modelos 5071A de Agilent Technologies, que muestran mejor comportamiento que sus antecesores en todos los aspectos.

Concluiremos consecuentemente con la afirmación de que la independencia entre relojes, en los términos expresados a lo largo del apartado, es una hipótesis con fundamento matemático que justifica el empleo de la expresión (3.6) en el cálculo de la estima de los pesos que intervienen en la escala conjunta.

### 3.4. Ponderación óptima en la definición de una escala de tiempo conjunta

Aun dando por hecho la validez de la hipótesis de independencia entre relojes, la matriz de covarianza absoluta estimada  $\hat{\mathbf{R}}$  siempre será NO diagonal, pues incluso en el caso en que  $\mathbf{R}$  fuera una matriz diagonal, su estima a partir de un número limitado de muestras llevaría a valores estimados de ACOV diferentes de cero. La hipótesis de independencia entre relojes justificaría, no obstante, la hipótesis empleada en la obtención de  $\hat{\mathbf{R}}$ : mínima suma cuadrática de las correlaciones cruzadas. El hecho de que la hipótesis de independencia sea válida frente al de que la matriz de covarianza estimada  $\hat{\mathbf{R}}$  no sea diagonal, hace suscitar la siguiente cuestión: ¿Cuándo se obtiene máxima estabilidad en la escala conjunta, al emplear los valores estimados de ACOV absolutos o al prescindir de éstos en la determinación de los pesos?

La cuestión planteada en el párrafo anterior encuentra respuesta en [49]. Las incertidumbres asociadas a las estimas de ACOV son difíciles de evaluar, aunque en términos relativos suelen ser mucho mayores que las asociadas a los valores de AVAR, esto implica un notable riesgo si finalmente se opta por hacer uso de la matriz completa, tal como se ha puesto de manifiesto en [49]; en este Artículo se evalúa mediante simulación la estabilidad de una escala de tiempo conjunta constituida por relojes bajo diferentes condiciones de funcionamiento: predominio de ruido blanco de frecuencia o predominio de ruido camino aleatorio de frecuencia, y débil o fuerte correlación ( $\rho_{ij} = +0.1$  y  $+0.7$  respectivamente, con  $\rho_{ij}$  denotando los coeficientes de correlación cruzada entre relojes) entre patrones. Entre otras, las conclusiones que cabe destacar son:

1. Los mejores resultados se obtienen cuando los relojes son independientes entre sí. Es muy importante poder tener la certeza de que se verifica la hipótesis de independencia entre relojes.
2. Si la correlación entre pares de relojes es baja, la estabilidad de la escala de tiempo conjunta apenas se ve afectada al hacer uso exclusivo de los valores de AVAR absolutos (diagonal de  $\hat{\mathbf{R}}$ ).

Optaremos por hacer uso de esta última consideración, que nos lleva definitivamente al cálculo de los pesos relativos mediante (3.6), en lugar de deducirlos del sistema de ecuaciones que resulta de la condición de máxima estabilidad de la escala conjunta cuando existe correlación entre relojes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i^* (r_{ij} - r_{iN}) &= 0 \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i^* &= 1 \end{aligned} \quad (3.62)$$

que hubiera resultado de minimizar la expresión de la varianza para la escala de tiempo conjunta, esto es:

$$\min \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j r_{ij} \right) = \min \left( \sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i^2 r_{ii} + 2 \cdot \sum_{i < j} \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j r_{ij} \right) \quad (3.63)$$

con la condición de que:

$$\sum_{i=1}^N \hat{\omega}_i = 1 \quad (3.64)$$

La solución de (3.62) puede formularse de manera explícita y compacta haciendo uso de la teoría general de mínimos cuadrados aplicada al cálculo de los citados pesos:

$$\hat{\omega}^* = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{u}} \quad (3.65)$$

En la que  $\hat{\omega}^*$  y  $\mathbf{u}$  representan vectores columna de  $N$  términos; el primero constituido por las estimas de los pesos relativos en tanto el segundo se forma con elementos unidad.

Para el caso particular en que  $\hat{\mathbf{R}}$  sea una matriz diagonal constituida por los términos  $\hat{f}_{ii}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), la resolución de la ecuación (3.65) lleva de nuevo a la conocida definición de los pesos relativos en la escala de tiempo conjunta (3.6).

En efecto, el numerador de (3.65) quedará como:

$$(3.66) \quad \hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/\hat{f}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\hat{f}_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\hat{f}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\hat{f}_{11} \\ 1/\hat{f}_{22} \\ \vdots \\ 1/\hat{f}_{NN} \end{bmatrix}$$

en tanto que el denominador resulta:

$$(3.67) \quad \mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\hat{f}_{11} \\ 1/\hat{f}_{22} \\ \vdots \\ 1/\hat{f}_{NN} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\hat{f}_{jj}}$$

La composición de (3.66) y (3.67) lleva definitivamente a la expresión (3.6).

Si  $\hat{\mathbf{R}}_D$  denota la matriz que resulta de hacer cero los términos de ACOV en la matriz de covarianza absoluta  $\hat{\mathbf{R}}$ , los pesos relativos de la escala conjunta vendrán determinados por la expresión matricial:

$$(3.68) \quad \hat{\omega} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_D^{-1} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{R}}_D^{-1} \cdot \mathbf{u}}$$

Tal como se demuestra en [49], cuando la correlación entre pares de relojes es verdaderamente baja, los pequeños valores alcanzados por los términos  $\hat{f}_{ij}$  no son importantes en la definición de los pesos óptimos al interpretarse como fluctuaciones estadísticas en torno al valor cero. Esta razón, unido a la simplicidad y facilidad de programación de (3.68), ha llevado a que sea esta última expresión la definitivamente adoptada en el desarrollo de los algoritmos de realización de la escala.

### 3.5. Pruebas de evaluación del algoritmo de estimación de varianzas absolutas

El algoritmo de estimación de las varianzas absolutas, desarrollado íntegramente en lenguaje *MATLAB*, ha sido sometido a pruebas de evaluación de la robustez, exactitud y tiempo de cálculo. Para ello se han definido series de datos simulados, que permiten disponer de las correspondientes matrices de covarianza “verdaderas”  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{S}$ . El algoritmo toma la matriz  $\mathbf{S}$  como variable de entrada, generando como resultado la matriz estimada  $\hat{\mathbf{R}}$ . De la comparación de la matriz de covarianza  $\mathbf{R}$  asociada a los relojes con la estima  $\hat{\mathbf{R}}$  resultante del algoritmo pueden extraerse conclusiones sobre los diferentes aspectos que se pretenden evaluar.

Como “medida” del acuerdo existente entre estimas y valores “verdaderos”, se han definido figuras de mérito (*FOM*) para los términos de varianza ( $r_{ii}$ ) y para los coeficientes de correlación cruzada. Las primeras de ellas, que afectan a la diagonal de las matrices  $\mathbf{R}$  y  $\hat{\mathbf{R}}$ , se definen del siguiente modo:

$$DFOM_1 = 100 \times \max \left( \left| \frac{\sqrt{\hat{r}_{ii}} - \sqrt{r_{ii}}}{\sqrt{r_{ii}}} \right| \right) \quad (3.69)$$

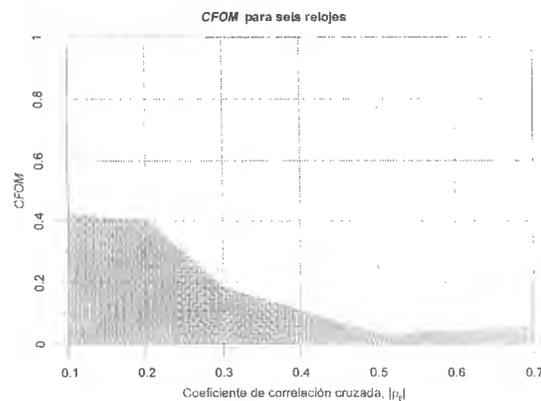
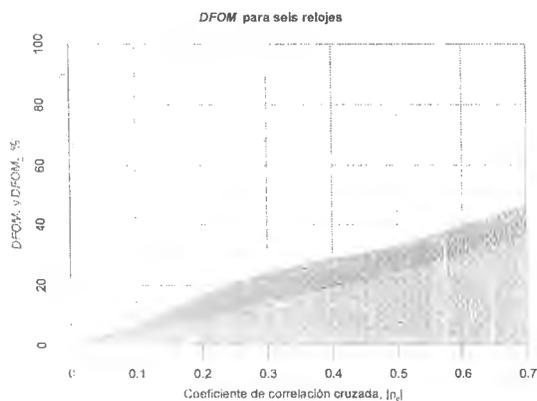
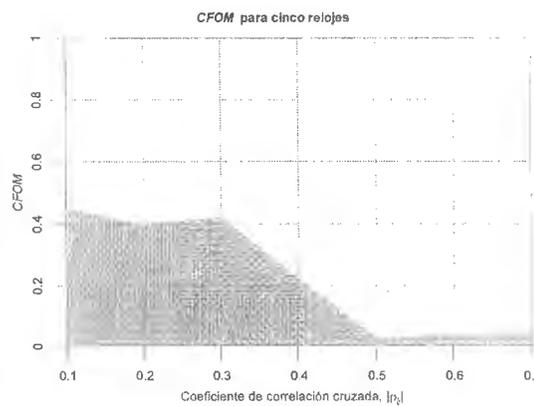
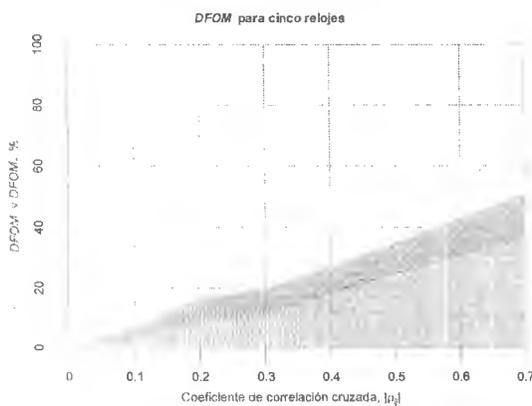
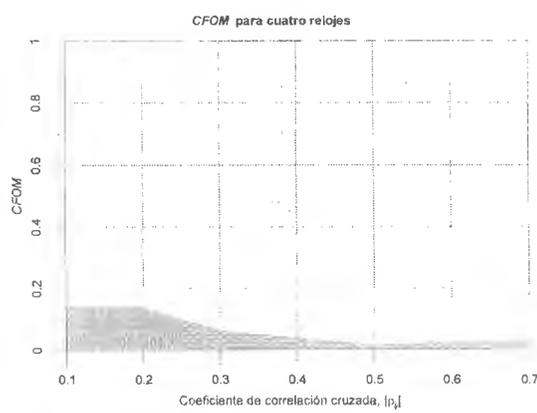
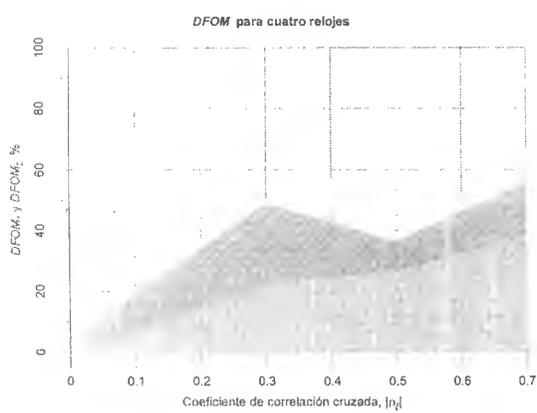
$$DFOM_2 = 100 \times \left\langle \left| \frac{\sqrt{\hat{r}_{ii}} - \sqrt{r_{ii}}}{\sqrt{r_{ii}}} \right| \right\rangle \quad (3.70)$$

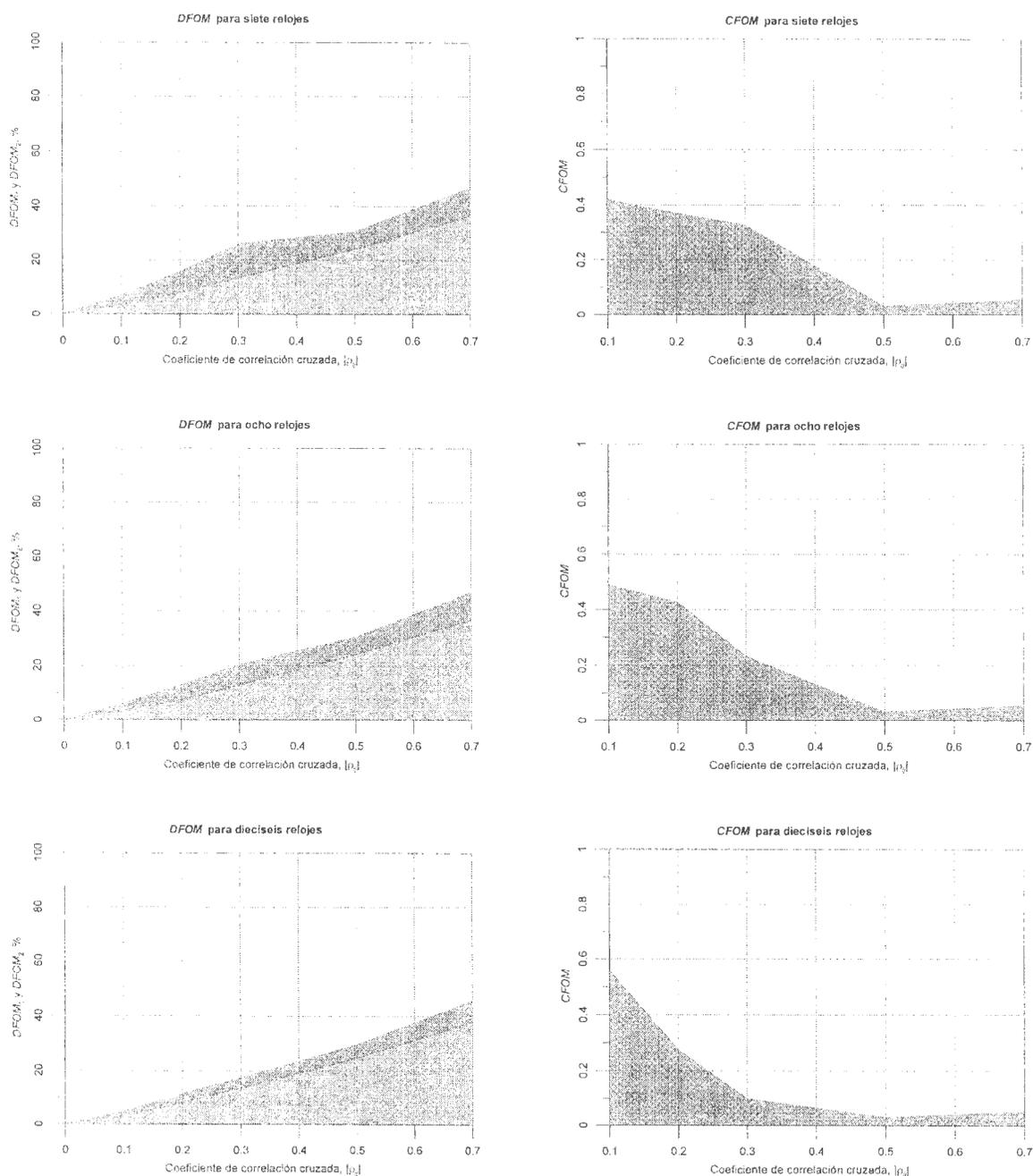
representando respectivamente el valor máximo y medio ( $\langle \rangle$ ) de las razones (en valor absoluto) entre las diferencias de desviaciones de *Allan* estimadas y “verdaderas”, y las desviaciones de *Allan* “verdaderas”, expresadas en tanto por ciento.

La figura de mérito que evalúa la estima de los términos que están fuera de la diagonal de  $\hat{\mathbf{R}}$  ha sido definida como la razón entre las sumas cuadráticas de los coeficientes de correlación estimados y “verdaderos”:

$$(3.71) \quad CFOM = \frac{\sum_{i < j} \hat{p}_{ij}^2}{\sum_{i < j} \hat{r}_{ii} \hat{r}_{jj}}$$

Si los términos de varianza hubieran sido correctamente estimados, las *DFOM* hubieran sido iguales a cero; del mismo modo que si los términos de correlación cruzada hubieran sido estimados correctamente, la *CFOM* hubiera sido igual a la unidad.

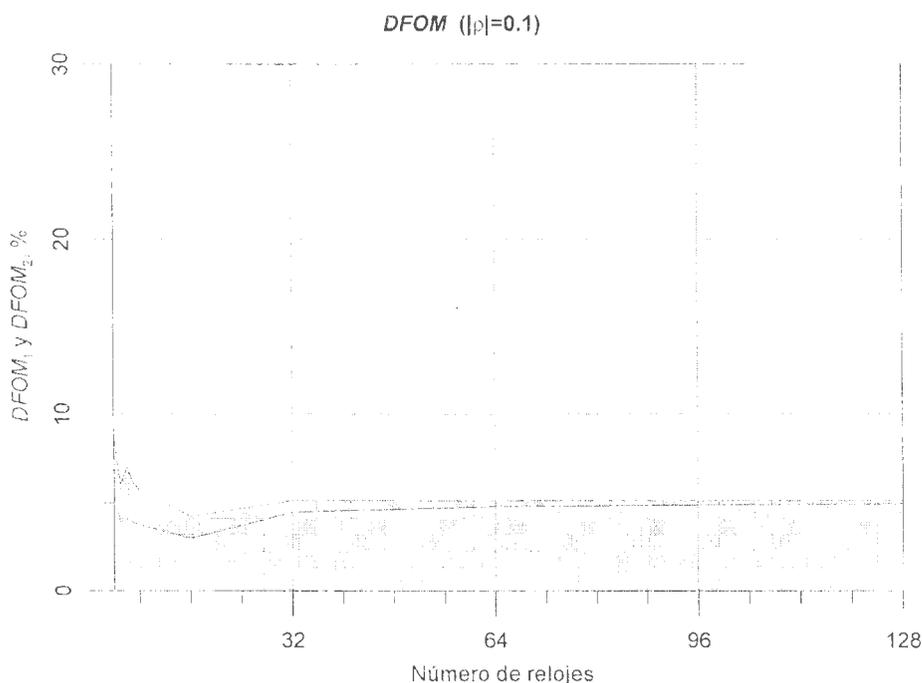




**Figura 3.2:** Evaluación de diferentes figuras de mérito en función del grado de correlación entre relojes.

Como primera prueba, se han promediado varias realizaciones aplicadas a conjuntos de 4, 5, 6, 7, 8 y 16 relojes con varianzas espaciadas regularmente entre 1 y 10 y coeficientes de correlación entre relojes comprendidos entre 0.1 y 0.7 (en valores absolutos). Los resultados han sido representados en la figura 3.2, poniendo de manifiesto lo siguiente:

- Ante la existencia de correlación débil (por debajo de 0.2, en valor absoluto), las  $DFOM$  se mantienen inferiores al 20%, mejorando drásticamente en el paso de 4 a 5 relojes.
- Conforme aumenta el grado de correlación entre relojes, crecen las  $DFOM$  indicativas del error cometido en las estimas de las varianzas. Esto es normal, ya que ha dejado de cumplirse la hipótesis de partida en el algoritmo de cálculo: mínima suma cuadrática de correlaciones cruzadas.
- En todos los casos, la  $CFOM$  es inferior a la unidad, dando idea de que efectivamente el algoritmo a llevado a una solución para la que al menos la suma cuadrática de las estimas de correlaciones cruzadas es menor que la suma cuadrática de sus correspondientes términos de correlación “verdaderos”.

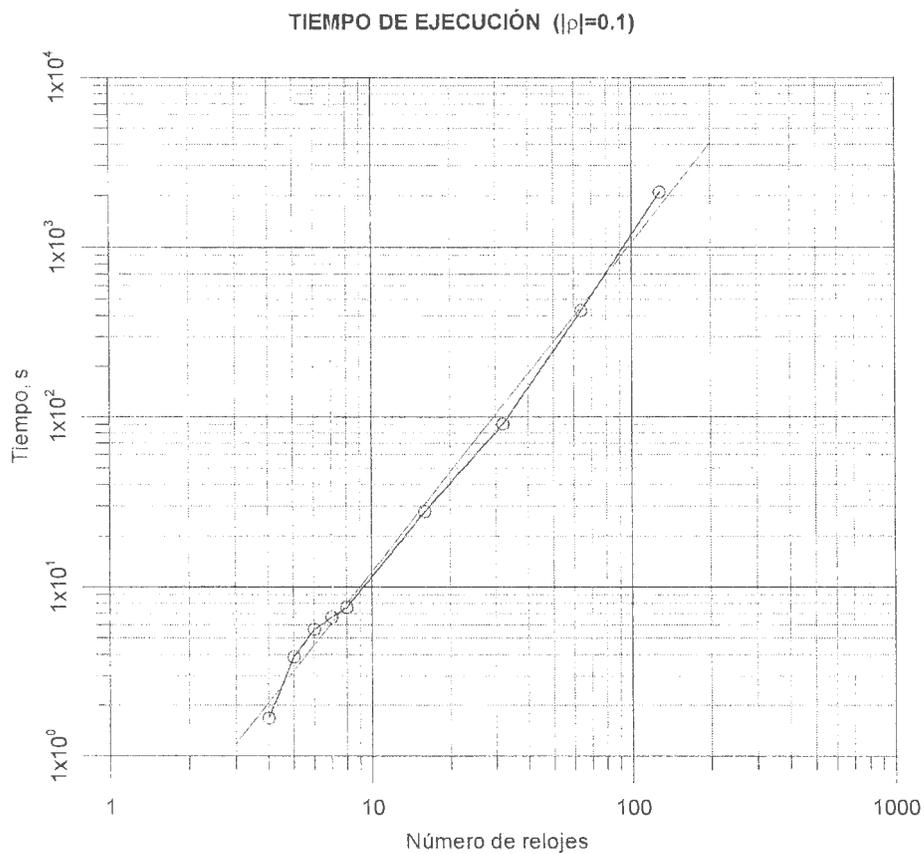


**Figura 3.3:** Evaluación de figuras de mérito asociadas a las estimas de las desviaciones de *Allan*, en función del número de relojes.

La segunda prueba ha consistido en determinar, en promedio, el comportamiento de las  $DFOM$  para diferente número de relojes, con varianzas espaciadas regularmente entre 1 y 10 y coeficientes de correlación entre relojes con valor absoluto  $|\rho_{ij}| = 0.1$ . La figura 3.3 muestra el resultado obtenido para esta particular prueba, en la que se pone de manifiesto como el error máximo ( $DFOM_1$ ) siempre se mantiene por debajo del 10%,

en tanto que el error medio ( $DFOM_2$ ) se estabiliza en torno al 5, independientemente del número de relojes, lo cual implica que las estimas de las desviaciones de *Allan* se mantienen muy próximas a los valores “verdaderos” incluso cuando se dispone de un número reducido de relojes.

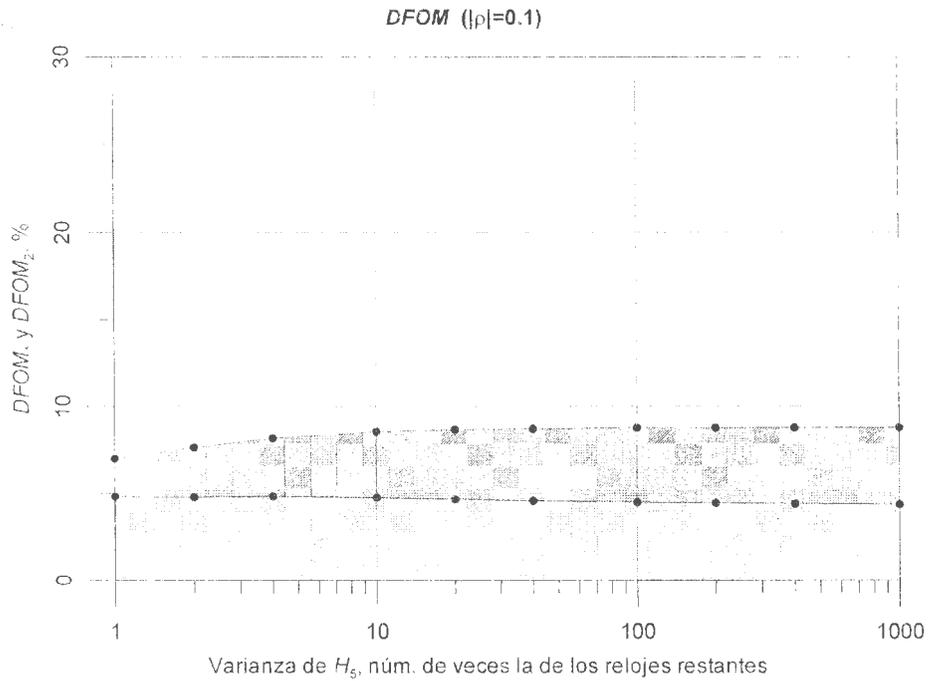
La tercera prueba realizada ha consistido en determinar, en promedio, los tiempos invertidos en la ejecución del algoritmo para un número de relojes variable, resultando que para el caso extremo de 128 relojes, el tiempo de ejecución ha sido inferior a 15 minutos aun habiendo sido ejecutado en lenguaje interpretado. Para ello se empleó un PC Pentium II a 500 MHz. con 192 MB de memoria RAM. La figura 3.4 muestra esos tiempos invertidos en la ejecución en función del número de relojes empleado.



**Figura 3.4:** Tiempos de ejecución, en promedio, en función del número de relojes.

Para poner de manifiesto la mejora alcanzada al incluir un nuevo reloj en el conjunto, se ha efectuado una cuarta prueba en la que partiendo de la existencia de cuatro buenos relojes, se efectúa la incorporación de un quinto reloj cuya varianza asociada varía

desde un valor similar al de los cuatro restantes relojes hasta tres órdenes por encima de éstos. El resultado, expuesto en 3.5, supone una mejoría respecto de la situación anterior siempre y cuando la varianza del nuevo reloj no sea superior a diez veces la varianza de los relojes restantes.



**Figura 3.5:** Evaluación de figuras de mérito asociadas a las estimas de las desviaciones de *Allan*, para un conjunto de 5 relojes, con 4 relojes similares y un quinto reloj de estabilidad variable.

La realización de todas estas pruebas, además de incidir sobre aquellos aspectos considerados de interés poniendo de relieve la bondad del algoritmo en cada caso, han valido asimismo para testimoniar la robustez del citado algoritmo al haber salido airoso ante un gran número de situaciones a las que ha sido sometido.

“Predecir es muy difícil, y sobre todo el futuro”

*BOHR, Niels*



# LA PREDICCIÓN COMO GARANTÍA DE CONTINUIDAD EN LA ESCALA CONJUNTA.

### 4.1. La escala conjunta y la predicción

Una de las propiedades más importantes que debe caracterizar a una escala de tiempo es su insensibilidad a la variación de los pesos relativos con que participan los relojes en el conjunto. La introducción o extracción de relojes en el conjunto que integra la escala puede interpretarse asimismo como una variación del peso con que cada reloj participa en la media ponderada. Si la ecuación para el cálculo de la escala de tiempo en cada instante  $t$  se mantiene tal cual fue expresado en el capítulo anterior (ecuación (3.1)), cualquier redistribución de pesos producirá sin duda discontinuidades en la escala y en su primera derivada, es decir, se producirá “saltos de tiempo y de frecuencia”. Por lo general, los relojes empleados en la generación de escalas conjuntas suelen ser patrones de frecuencia de haz de cesio comerciales, para los que la componente determinística de la diferencia de fase-tiempo respecto de un reloj ideal viene dada por un polinomio de primer grado, por lo que ante la inclusión o extracción de un reloj no cabe esperar discontinuidad en la segunda derivada de la escala (“salto en la variación de frecuencia”).

El método para compensar el efecto producido por las variaciones de los pesos relativos en la escala se basa en la introducción de términos correctores a añadir a las lecturas  $X^i(t)$  en cada instante:

$$TA(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) [X^i(t) + \tilde{X}^i(t)] \quad (4.1)$$

Estos términos deben caracterizarse, entre otras cosas, por no introducir alteración alguna sobre la escala cuando los pesos relativos permanecen constantes.

Definida la variable  $x^i(t)$  como la diferencia de lectura entre la escala media ponderada y el reloj  $i$ -simo en el instante  $t$ :  $x^i(t) = TA(t) - X^i(t)$ , y sustituyendo en (4.1), se alcanza la siguiente relación:

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i(t) x^i(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) \tilde{X}^i(t)$$

Si no hay redistribución de pesos relativos, el primer miembro de la expresión anterior es idénticamente nulo, debiendo ser nulo el segundo miembro de la ecuación.

Se supondrá que cada elemento  $\tilde{X}^i(t)$  es un polinomio de primer grado, cuyos términos corrigen la discontinuidad en tiempo y en frecuencia respectivamente.

Considérese el intervalo  $[t_0 - T, t_0]$  a lo largo del cual no ha habido ninguna redistribución de pesos  $\omega_i$ ; para cualquier instante  $t$  perteneciente a dicho intervalo debe verificarse que:

$$(4.3) \quad \sum_i \omega_i x^i(t) = 0$$

La expresión (4.3) pone de manifiesto que la media ponderada de la “distancia” de cada reloj a la escala  $TA$  es igual a cero, lo que constituye la propia definición de la media ponderada.

Definida la frecuencia instantánea del reloj  $i$ -simo en el instante  $t$ , relativa a la escala  $TA$ , como la razón de incrementos entre las diferencias de fase-tiempo relativas a  $TA$  y la variable temporal  $t$  en el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$(4.4) \quad y^i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^i(t + \Delta t) - x^i(t)}{\Delta t}$$

La frecuencia media del reloj  $i$ -simo, relativa a la escala  $TA$ , en el intervalo  $[t_0 - T, t]$ , vendrá expresada como la variación promediada de fase-tiempo  $x'(t)$  durante dicho intervalo:

$$\bar{y}^i(t_0 - T, t) = \frac{x^i(t) - x^i(t_0 - T)}{t - (t_0 - T)} \quad (4.5)$$

A partir de (4.3) resulta sencillo deducir la siguiente expresión para cualquier  $t$  perteneciente al intervalo abierto  $(t_0 - T, t)$ :

$$\sum_i \omega_i \bar{y}^i(t_0 - T, t) = \sum_i \omega_i \left[ \frac{x^i(t) - x^i(t_0 - T)}{t - (t_0 - T)} \right] = 0 \quad (4.6)$$

La expresión (4.6) viene a significar que la media ponderada de las frecuencias relativas de cada reloj respecto de la escala media es igual a cero, lo que equivale a decir que la frecuencia de la escala media es igual a la media ponderada de las frecuencias de cada reloj.

Algo similar podría deducirse para la media ponderada de las frecuencias instantáneas de cada reloj respecto de la escala media, idénticamente nula.

Considérese a continuación el siguiente intervalo de tiempo  $[t_0, t_0 + T]$ , para el cual los pesos relativos han sufrido modificación, pasando a denotarse como  $\omega'_i$ . La elección de los coeficientes en cada polinomio  $\bar{X}^i(t)$  deberá ser tal que garantice la continuidad en tiempo y en frecuencia en la escala media. Esta condición se expresa analíticamente del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^-} TA(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} TA(t) = TA(t_0); \\ \left. \frac{d}{dt} TA(t) \right|_{t_0^-} &= \left. \frac{d}{dt} TA(t) \right|_{t_0^+} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Expresando  $\tilde{X}^i(t)$  como:

$$(4.8) \quad \tilde{X}^i(t) = a_i + b_i(t - t_0), t \in [t_0, t_0 + T]$$

Se tendrá que la escala  $TA$  es continua en  $t = t_0$  si se satisface la primera condición de (4.7). es decir, si:

$$(4.9) \quad \sum_i \omega_i X^i(t_0) = \sum_i \omega'_i [X^i(t_0) + a_i]$$

Una de cuyas soluciones es:

$$(4.10) \quad a_i = x^i(t_0), i = 1, \dots, N$$

Es decir, la corrección que debe aportar cada término  $\tilde{X}^i(t)$  para asegurar la continuidad de la escala en el instante  $t_0$  coincide con la diferencia de fase-tiempo entre la escala y el reloj  $i$ -simo en dicho instante.

En cuanto a la continuidad en frecuencia expresada mediante la segunda condición de (4.7). se tiene:

$$(4.11) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \omega_i \frac{X^i(t_0) - X^i(t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \omega'_i \frac{(X^i(t_0 + \Delta t) + b_i \Delta t) - X^i(t_0)}{\Delta t}$$

Que lleva, entre otras, a la siguiente solución:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} b_i &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^i(t_0 + \Delta t) - x^i(t_0)}{\Delta t}, i = 1, \dots, N \\ &= y^i(t_0, t_0 + \Delta t) \end{aligned}$$

Lo que significa que el término  $b_i$  en  $\tilde{X}^i(t)$  se identifica con la frecuencia del reloj  $i$ -simo referida a la escala  $TA$ , promediada entre los instantes  $t_0$  y  $t_0 + \Delta t$ .

El término corrector  $b_i$  puede interpretarse como la corrección en frecuencia necesaria para compensar la variación de marcha de la escala a causa de la inclusión de un nuevo reloj  $H_i$  en el conjunto.

Resta comprobar si efectivamente los términos correctores no introducen cambios cuando los pesos relativos permanecen invariables durante un intervalo. Para ello, supongamos que los pesos relativos en el intervalo  $[t_0, t_0 + T]$  siguen siendo  $\omega_i, i = 1, \dots, N$ . En dicho caso, para  $t = t_0$ , al ser  $a_i = x^i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , resulta que  $\sum_i \omega_i a_i = \sum_i \omega_i x^i(t_0) = 0$  y el efecto conjunto de los términos correctores  $\bar{X}^i(t_0)$  es nulo.

En cuanto a la primera derivada de la escala en  $t = t_0^+$ , como  $b_i = y_i(t_0)$ , se tendrá que  $\sum_i \omega_i b_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \omega_i \{ [x^i(t_0 + \Delta t) - x^i(t_0)] / \Delta t \} = 0$ , por lo que de nuevo derivada a la izquierda y a la derecha de  $t_0$  coinciden.

Cuando se pretende calcular el valor de la escala conjunta para un instante  $t > t_0$  respetando la continuidad en tiempo y frecuencia de la escala en  $t_0$ , cada término corrector viene dado por:

$$\bar{X}^i(t) = x^i(t_0) + \hat{y}^i(t | t_0)[t - t_0] \quad (4.13)$$

El término  $\hat{y}^i(t | t_0)$  representa la frecuencia media estimada del reloj  $H_i$ , relativa a la escala  $TA$ , en el intervalo  $[t_0, t]$ , es decir:  $b_i$ . Esta frecuencia debe ser estimada a partir de la información disponible hasta el instante  $t_0$ , pues de acuerdo con la definición de  $y^i(t)$ , este valor permanecerá siendo una incógnita en tanto no se alcance el instante  $t$ . La predicción de  $\hat{y}^i(t)$ : ( $\hat{y}^i(t | t_0)$ ) será objeto de estudio en los próximos apartados.

#### 4.2. La predicción en procesos aleatorios.

Por lo general, se denomina “proceso aleatorio (o estocástico)” a toda función  $y(t)$  dependiente del tiempo (o del espacio), cuyo valor para cada instante  $t$  no puede ser determinado con exactitud, aunque puede asociársele un rango de valores posibles con una distribución de probabilidad asociada que describe la probabilidad relativa de cada posible valor. Para cada valor individual de  $t$ ,  $y(t)$  es una “variable aleatoria”, e intuitivamente puede pensarse que todo el proceso no es más que una “función aleatoria”.

La frecuencia media de cada reloj  $H_i$ , relativa a la escala  $TA$  e integrada durante un tiempo  $T$ , se comporta como un proceso aleatorio y como tal debe ser tratado cuando se desea predecir su valor en cierto instante.

Cada uno de los registros de valores observados del proceso  $y$  se denomina “realización”, y a la colección de todas las posibles realizaciones se le conoce como “conjunto”.

En el análisis de series temporales, se parte de un número finito de observaciones correspondientes a una realización del proceso aleatorio  $y(t)$ , que denominaremos  $\{y_{l-i}\} = \{y(t-lT)\}$  con  $l = 0, 1, \dots, k$ . A partir de estos datos, se intenta deducir tanto como se pueda las propiedades de todo el proceso. Una de las herramientas más potentes del análisis de series temporales es el análisis espectral, empleado entre otras cosas en el ajuste de un modelo estadístico y en el problema de predicción.

Básicamente, el problema de la predicción puede plantearse de la siguiente manera: conocidos los valores observados de un proceso aleatorio hasta el instante  $t_0$ :  $\{y_s; s \leq t_0\}$ , se desea predecir el valor de  $y_t$  en un instante posterior  $t$  ( $t - t_0 > 0$ ). La predicción de  $y(t)$  viene dada en función de las observaciones previas, bajo el criterio de que el error cuadrático medio del predictor sea mínimo. Esta condición se expresa de la siguiente manera:

$$(4.14) \quad E = E \left[ \{y(t) - \hat{y}(t | t_0)\}^2 \right] = \text{mínimo}$$

donde el operador  $E$  representa el promedio infinito de todas las realizaciones del proceso.

El problema consistirá en encontrar la expresión para la función de las observaciones conocidas, de tal manera que  $E$  sea tan pequeño como fuera posible. Su solución es prácticamente trivial, y lleva a la media condicional de  $y_t$ , dados los valores de  $\{y_s; s \leq t_0\}$ , como mejor estima del predictor. Pero este resultado no es práctico debido a la falta de conocimiento detallado de la estructura probabilística del proceso, por lo que descartada esta función, se ha optado por recurrir a funciones simples de las observaciones. En particular, la teoría clásica desarrollada por Wiener y Kolmogorov [50, 51] se refiere exclusivamente a funciones de tipo lineal. La opción de tomar una función lineal no es descabellada, pues si el proceso tiene carácter *gaussiano*, la media condicional de  $y_t$  es una función lineal de  $\{y_s; s \leq t_0\}$ , por lo que en este caso no hay pérdida de generalidad al restringir la atención a las funciones lineales.

El predictor lineal de  $y_t$  vendrá dado por una expresión de la forma:

$$\hat{y}(t | t_0) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \bar{y}(t_0 - s) \quad (4.15)$$

siendo  $\{a_s\}$  una secuencia de constantes que representan la ponderación relativa aplicada a cada valor  $\bar{y}_{t_0-s}$ . La elección de los coeficientes  $a_i$  se deduce de la condición de minimización del error cuadrático medio  $E$ , y sus valores se determinan a partir de la función densidad espectral de potencia de  $\{\bar{y}_t\}$ .

#### 4.2.1. Breve apunte sobre el modelo *ARIMA*

La teoría clásica de predicción se refiere a una familia específica de procesos aleatorios: la constituida por aquellos en “equilibrio estadístico”, o cuyas propiedades estadísticas no varían en el tiempo. Estos procesos suelen originarse en sistemas físicos estables que han alcanzado una situación sostenida.

El modelo más general que ofrece la teoría clásica de la predicción está constituido por la combinación de los modelos Autoregresivo (*AR*) y Media móvil (*MA*), de órdenes  $k$  y  $l$  respectivamente. Cualquier proceso aleatorio  $X_t$  será  $ARMA(k,l)$  (*Autoregressive Moving-Average Process*) si satisface una ecuación de la forma:

$$(4.16) \quad X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_k X_{t-k} = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_l \varepsilon_{t-l}$$

siendo  $\{\varepsilon_t\}$  un proceso puramente aleatorio y  $(a_1, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l)$  constantes.

El proceso aleatorio  $y_t$  que describe la desviación en frecuencia media de un reloj no es siempre estacionario, pero sus primeras diferencias sí lo son, lo que permite aplicar un particular modelo conocido como *ARIMA* (*Autoregressive Integrated Moving-Average Process*), abordado por primera vez por Box y Jenkins [52] en la década de los setenta.

El modelo  $ARIMA(k,d,l)$  se aplica a aquellos procesos cuyas  $d$ -simas diferencias siguen un modelo  $ARMA(k,l)$ .

De manera aún más general: cuando se desea predecir la diferencia de fase-tiempo de cada reloj  $H_t$  respecto de la escala  $TA$  en el instante  $t$ , el modelo a emplear es un *ARIMA* de parámetros  $k$ ,  $d$  y  $l$ ; con  $d=2$  (segundas diferencias). La determinación de los parámetros  $k$  y  $l$ , así como la técnica de estimación de los parámetros  $(a_1, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l)$ , no son objeto de este trabajo de tesis, pero pueden encontrarse explicados con suficiente profundidad en [53]. Los valores para  $k$  y  $l$  empleados usualmente en la predicción de frecuencias son  $k=0$  y  $l=1$  ( $ARIMA(0,2,1)$ ) [54].

#### 4.2.2. El Filtro *KALMAN*.

De entre las dos técnicas de predicción más comúnmente empleadas: la basada en el modelo *ARIMA* y la que lo hace en el modelo *KALMAN*, la segunda es la más extendida y de mayor interés de uso al superar en muchos aspectos a la primera.

El filtro *KALMAN* fue diseñado originalmente como un estimador (filtro), para el que el criterio adoptado en el proceso de estima era la minimización del error cuadrático medio (es una versión dinámica de los mínimos cuadrados). De este modo, el filtro *KALMAN* forma parte de la familia de “mejores” u óptimos estimadores al estar basado en la minimización del citado error [55–57].

Este filtro es una herramienta de procesado ideal (óptima), tanto en predicción como en estima, en todos aquellos sistemas físicos que admiten modelado como procesos aleatorios estacionarios, es decir, como procesos en los que el mecanismo de generación de la señal aleatoria no varíe con el tiempo. El filtro requiere un modelo lineal de la evolución temporal del sistema, alguna información previa (tal como la estima precedente u otra medida) y el conocimiento de la magnitud del ruido superpuesto tanto al modelo dinámico como al proceso de medida [58]. El algoritmo *KALMAN* actúa como un filtro recursivo en el dominio del tiempo.

Cada reloj constituye uno de esos sistemas modelables mediante el filtro *KALMAN*, por lo que resulta factible la estima o predicción óptima de cualquiera de los parámetros de interés: diferencias de fase–tiempo, frecuencias o derivas de frecuencia.

El sistema físico a caracterizar se representa mediante el vector de estado  $\mathbf{X}(t)$  en el instante  $t$ , y obedece a la ecuación vectorial, dinámica, de primer orden siguiente:

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t - \tau) \cdot \mathbf{X}(t - \tau) + \mathbf{W}(t) \quad (4.17)$$

en la que  $\Phi(t, t - \tau)$  y  $\mathbf{W}(t)$  representan respectivamente la matriz de transición de estado del instante  $(t - \tau)$  al  $t$  y el vector de ruido del sistema. El vector  $\mathbf{W}(t)$  que gobierna el proceso recursivo está constituido por ruido blanco, *gaussiano*, de media nula.

El vector de estado debe ser extraído del vector de medida afectado de ruido  $\mathbf{Z}(t)$ :

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{V}(t) \quad (4.18)$$

En esta ecuación,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{V}(t)$  representan respectivamente la matriz de observación, enlace entre los vectores de observación y estado del sistema, y el vector de incertidumbre en la medida, que se representa como un ruido aditivo blanco, *gaussiano*, de media nula y completamente incorrelado con el ruido  $\mathbf{W}(t)$ .

### Deducción del modelo de reloj discreto

En el supuesto de que los relojes no muestren deriva de frecuencia, lo cual encuentra fundamento en patrones como los de haz de cesio (deriva inapreciable) [59], el modelo de señal queda reducido a solo dos estados representados mediante  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , que denotan respectivamente las diferencias de fase-tiempo y de frecuencia referidas a la escala  $TA$ .  $z(t)$ , por otra parte, constituye la medida de  $x_1(t)$ .

Supondremos que las cantidades anteriores que caracterizan el modelo satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(4.19) \quad \left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + v(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \\ z(t) &= x_1(t) + \rho(t) \end{aligned} \right\}$$

en las que  $v(t)$  y  $\rho(t)$  denotan respectivamente procesos de ruido del reloj considerado y de la medida, referidos a la escala  $TA$ , y que se caracterizan por ser blancos, *gaussianos* e independientes entre sí, de varianzas dadas por  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_0^2$ .

La resolución del sistema de ecuaciones (4.19) lleva a la expresión siguiente para la medida  $z(t)$ :

$$(4.20) \quad z(t) = a + bt + \rho(t) + \alpha(t)$$

cuya naturaleza nos resulta familiar, y en la que  $a = x_1(0)$  y  $b = x_2(0)$ ; siendo  $\rho(t)$  el ruido blanco de fase de la medida  $z(t)$  y  $\alpha(t)$  el proceso Wiener obtenido de la integración del ruido blanco de frecuencia (Wiener de fase)  $v(t)$ :

$$\alpha(t) = \int_0^t \nu(x) dx \quad (4.21)$$

El modelo asume que la diferencia de frecuencia es constante e igual a  $b = x_2(0)$ , con la diferencia de fase-tiempo obtenida de la suma de la integral de  $x_2(0)$  y un proceso Wiener de fase-tiempo (blanco de frecuencia). Este modelo es muy simple, pero a su vez muy adecuado para los patrones de haz de cesio en el rango de tiempo comprendido entre un segundo y un día. El modelo de reloj así definido asume la posible existencia de ruidos aditivos no blancos o con memoria; es más, parte del ruido en el modelo de  $x(t)$  ( $\alpha(t)$ ) obedece a un proceso no estacionario.

La forma integral de las ecuaciones del sistema en (4.19) es:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= a + bt + \int_0^t \nu(x) dx \\ x_2(t) &= b \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Y la forma discreta de estas ecuaciones y de la ecuación de observación para el instante  $k$ , considerado como intervalo de muestreo  $\tau$ , será:

$$\begin{aligned} x_1[k] &= a + b k \tau + \int_0^{k\tau} \nu(x) dx \\ x_2[k] &= b \\ z[k] &= x_1[k] + \rho[k] \end{aligned} \quad (4.23)$$

De las ecuaciones de estado en formato discreto puede deducirse finalmente la matriz de transición de estados, para ello observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_2[k+1] &= b = x_2[k] \\ x_1[k+1] &= x_1[k] + x_2[k]\tau + \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \nu(x) dx \\ &= x_1[k] + x_2[k]\tau + w[k] \end{aligned} \quad (4.24)$$

en la que se ha efectuado la siguiente sustitución:

$$(4.25) \quad w[k] = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} v(x) dx$$

que representa el incremento del proceso Wiener  $\alpha(t)$  entre los instantes  $k\tau$  y  $(k+1)\tau$ , y que por la propia definición del proceso Wiener constituye un ruido blanco de varianza  $\sigma_1^2 \tau$ , siendo  $\sigma_1^2$  el coeficiente de difusión del proceso  $\alpha(t)$ .

Por lo que la expresión para la citada matriz  $\Phi$  quedará:

$$(4.26) \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los restantes vectores y matrices pendientes de definir en (4.17) y (4.18) quedarán como sigue:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \mathbf{C} &= [1 \quad 0] \\ \mathbf{X}[k] &= [x_1[k] \quad x_2[k]]^T \\ \mathbf{W}[k] &= [w[k] \quad 0]^T \end{aligned}$$

Es fácil redimensionar todos estos vectores y matrices cuando se trata a la vez un conjunto de  $N$  relojes; así, y recuperando la idea básica de predecir los estados de cada reloj en el próximo instante de medida, si se representan las versiones discretas de  $x_1'(t)$  y  $x_2'(t)$  mediante  $x_1'[k]$  y  $x_2'[k]$ , el vector de estado del sistema en ese instante vendrá dado por:

$$(4.28) \quad \mathbf{X}_{2,N \times 1}[k] = [x_1'[k] x_2'[k] \cdots x_1'[k] x_2'[k] \cdots x_1^N[k] x_2^N[k]]^T$$

El filtro *KALMAN* proporcionará tanto la mejor estima del vector  $\mathbf{X}_{2,N \times 1}[k]$  en el instante  $k$ , que se denotarán mediante  $\hat{\mathbf{X}}[k|k]$ , calculada a partir de las medidas en ese preciso instante y de la estima en el instante anterior  $\hat{\mathbf{X}}[k-1|k-1]$ , como la mejor predicción

para el instante  $(k+1)$ , que se designarán mediante  $\hat{\mathbf{X}}[k+1|k]$ , a partir de las medidas actuales y de la última predicción efectuada  $\hat{\mathbf{X}}[k|k-1]$ .

En la práctica, los términos impares constituyen la mejor estima de  $\tilde{X}^i(t)$  en (4.1). Estos términos, que representan las predicciones de las diferencias de fase-tiempo respecto de la escala media, involucran la última estima de  $x^i$  y la predicción de  $\bar{y}^i$  en el instante siguiente.

La matriz de transición  $\Phi$  completa, del estado  $k-1$  al  $k$  será:

$$\Phi_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} 1 & \tau & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & \tau & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & & 1 & \tau \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

El vector ruido del sistema  $\mathbf{W}[k]$ , y su matriz de covarianza  $\mathbf{Q}[k]$ , se denotarán respectivamente mediante:

$$\mathbf{W}_{2N \times 1}[k] = [w^1[k] \ 0 \ \dots \ w^i[k] \ 0 \ \dots \ w^N[k] \ 0]^T \quad (4.30)$$

$$\mathbf{Q}_{2N \times 2N}[k] = \begin{bmatrix} \tau(\sigma_1^1)^2 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & \tau(\sigma_i^i)^2 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & & \tau(\sigma_1^N)^2 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo  $w^i[k] = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} v^i(x) dx$  el incremento del proceso Wiener con varianza  $\tau[\sigma_i^i]^2$ , cuya función integrando  $v^i(t)$  representa el ruido blanco de frecuencia del reloj  $i$ -simo referido a la escala  $TA$ .

Se ha supuesto que la pareja de estados  $\{x_1^i[k], x_2^i[k]\}$  correspondientes a cada reloj  $i$ -simo es independiente de las correspondientes a los relojes restantes. Esto no es del todo cierto, ya que se está empleando la escala conjunta  $TA$  como referencia para todos los relojes, si bien cuando se dispone de un número suficientemente elevado de relojes el grado de correlación entre ellos será bajo, pudiendo obviarse en primera aproximación.

La matriz de observación  $\mathbf{C}$  que vincula los vectores de observación y de estado del sistema será:

$$(4.31) \quad \mathbf{C}_{N \times 2N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y el vector ruido en la medida  $\mathbf{V}[k]$ , y su matriz de covarianza  $\mathbf{R}[k]$ , vendrán dados por:

$$(4.32) \quad \mathbf{V}_{N \times 1}[k] = [\rho^1[k] \cdots \rho^i[k] \cdots \rho^N[k]]^T$$

$$\mathbf{R}_{N \times N} = \begin{bmatrix} [\sigma_0^1]^2 & 0 & & 0 \\ 0 & [\sigma_0^2]^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & [\sigma_0^N]^2 \end{bmatrix}$$

### **Ecuaciones del filtro *KALMAN***

El conjunto de ecuaciones matriciales y vectoriales que representa el predictor *KALMAN* vectorial para el modelo introducido mediante (4.17) y (4.18), una vez sometido al proceso de discretización temporal, es el siguiente:

*Ecuación del predictor:*

$$\tilde{\mathbf{X}}[k+1|k] = \Phi \cdot \tilde{\mathbf{X}}[k|k-1] + \mathbf{G}[k] \cdot (\mathbf{Z}[k] - \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{X}}[k|k-1]) \quad (4.33)$$

En esta ecuación, el primer término  $\Phi \cdot \tilde{\mathbf{X}}[k|k-1]$  representa la mejor predicción de  $\tilde{\mathbf{X}}[k+1|k]$  sin información adicional, que resulta estar basada exclusivamente en las estimas previas. El segundo término es un término correctivo que depende de la diferencia entre la última medida y la última predicción de la medida:  $\tilde{\mathbf{Z}}[k|k-1] = \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{X}}[k|k-1]$ , con un factor de ganancia  $\mathbf{G}[k]$  variable:

*Ganancia del predictor:*

$$\mathbf{G}[k] = \Phi \cdot \mathbf{P}[k|k-1] \cdot \mathbf{C}^T \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{P}[k|k-1] \cdot \mathbf{C}^T + \mathbf{R}[k])^{-1} \quad (4.34)$$

con  $\mathbf{P}[k|k-1]$  denotando al error de predicción cuadrático medio minimizado mediante el presente algoritmo.

*Error cuadrático medio del predictor:*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[k+1|k] &= E[\mathbf{X}[k+1] - \tilde{\mathbf{X}}[k+1|k]]^2 \\ &= (\Phi - \mathbf{G}[k] \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{P}[k|k-1] \cdot \Phi^T + \mathbf{Q}[k] \end{aligned} \quad (4.35)$$

El algoritmo presentado no requiere el almacenamiento de los datos medidos. Basta con el almacenamiento de la última predicción  $\tilde{\mathbf{X}}[k|k-1]$  y el conocimiento del modelo físico ( $\Phi$  y  $\mathbf{C}$ ) y de la estadística de los procesos aleatorios ( $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$ ).

Este algoritmo, por otra parte, solo necesita una estima de  $\tilde{\mathbf{X}}[0|0]$  y de su matriz de covarianza  $\mathbf{P}[0|0]$  como condiciones iniciales.

### **Ciclo básico de cálculo**

Supóngase que se ha estimado  $\tilde{\mathbf{X}}[k|k]$  para algún instante  $k$ , y que se desea predecir el valor  $\tilde{\mathbf{X}}[k+1|k]$  conocida la medida  $\mathbf{Z}[k]$ . Ambos vectores están relacionados de la siguiente manera:

$$(4.36) \quad \tilde{\mathbf{X}}[k+1|k] = \Phi \cdot \tilde{\mathbf{X}}[k|k]$$

Estimado el vector  $\tilde{\mathbf{X}}[k+1|k]$ , el ciclo básico de cálculo a seguir para predecir  $\tilde{\mathbf{X}}[k+2|k+1]$  es el siguiente:

- i) La estima  $\tilde{\mathbf{X}}[k+1|k]$  se premultiplica por  $\mathbf{C}$ , sustrayéndose a continuación del último vector de medida obtenido ( $\mathbf{Z}[k+1]$ ). De este modo se obtiene el residuo (o error) medido  $\mathbf{E}[k+1]$ .
- ii) El residuo se premultiplica por la ganancia del predictor ( $\mathbf{G}[k+1]$ ), sumándose a continuación a la estima  $\tilde{\mathbf{X}}[k+1|k]$  premultiplicada por la matriz de transición  $\Phi$ , lo que lleva a la predicción de  $\tilde{\mathbf{X}}[k+2]$ :  $\tilde{\mathbf{X}}[k+2|k+1]$ .
- iii) El valor  $\tilde{\mathbf{X}}[k+2|k+1]$  queda almacenado hasta la realización de la siguiente medida, en cuyo momento puede iniciarse un nuevo ciclo.

Para iniciar el algoritmo de predicción, puede asumirse que el valor inicial del vector de estado es  $\tilde{\mathbf{X}}[0] = \mathbf{0}_{2N \times 1}$ , en cuyo caso es  $\tilde{\mathbf{X}}[1|0] = \Phi \cdot \tilde{\mathbf{X}}[0] = \mathbf{0}_{2N \times 1}$ . Conocido  $\mathbf{Z}[1]$  se comenzarán a aplicar los diferentes pasos del ciclo básico anteriormente introducido.

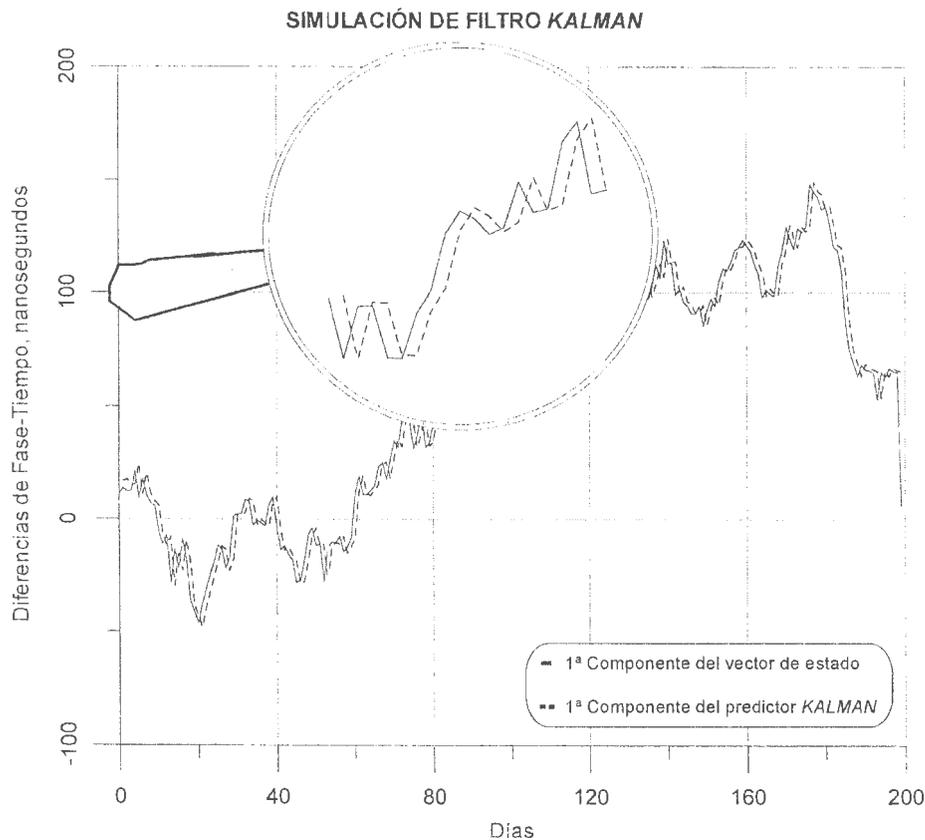
El filtro, en definitiva, actúa a modo de “predictor–corrector”, es decir: la mejor estima de la señal para el instante futuro se deduce al sumar a la primera aproximación de la predicción ( $\Phi \cdot \tilde{\mathbf{X}}[k|k-1]$ ) el término correctivo  $\mathbf{G}[k] \cdot \mathbf{E}[k]$ .

### Ejemplo sobre datos simulados

A modo de ejemplo de cómo funciona el filtro, se ha simulado la serie de lecturas de diferencias de fase–tiempo entre dos relojes (expresada en nanosegundos), tomadas a intervalos de un día, afectada de un ruido blanco de frecuencia, *gaussiano*, de media nula y caracterizada por tener una desviación de Allan de  $\sigma_y(\tau = 1 \text{ d}) = 1 \cdot 10^{-13} = 8.64 \text{ ns/d}$ . A la serie resultante se le ha añadido un ruido blanco de fase, *gaussiano*, de media nula y de desviación en el tiempo  $\sigma_x(\tau = 1 \text{ d}) = \sigma_x = 0.2 \text{ ns}$ , que simula el ruido aditivo

introducido por el sistema de medida. La serie final representa la medida en cada instante  $k$ .

Conforme a lo explicado en el apartado anterior, si se asume que el valor inicial del vector de estado es  $\hat{\mathbf{X}}[0] = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ , el vector predictor en el instante inicial será:  $\hat{\mathbf{X}}[1|0] = \Phi \cdot \hat{\mathbf{X}}[0] = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ . Este vector, junto a la primera lectura de la serie simulada, permite “lanzar” el filtro haciendo uso de las ecuaciones (4.33) a (4.35), resultando de ello el gráfico siguiente, en el que se han representado las primeras componentes (diferencias de fase-tiempo) del vector de estado (no afectado del ruido del sistema de medida) y del vector predictor *KALMAN*.



**Figura 4.1:** Predictor *KALMAN* aplicado a datos simulados, afectados de ruido blanco de frecuencia y de ruido aditivo blanco de fase introducido por el sistema de medida.

En la tabla 4.1 se exponen los primeros valores que han alcanzado las variables de mayor interés en el proceso. Cabe destacar la rapidez con que se estabiliza la ganancia, pues si tenemos en cuenta su valor asintótico para una serie simulada de 10000 lecturas

de diferencias de fase-tiempo:  $G_1 = 0.9996$  y  $G_2 = 0.0001 \text{d}^{-1}$ , transcurridas las diez primeras iteraciones se han alcanzado valores bastante próximos a éstos. Otra cuestión a resaltar es el error cuadrático medio obtenido en la predicción, en particular el correspondiente a la fase-tiempo, cuyo valor asintótico extraído de la raíz cuadrada de  $p_{11}$  es 8.674 ns., y que en las primeras diez iteraciones ha alcanzado un valor de 9.060 ns. Todas las referencias a fases-tiempo, a excepción de la ganancia del predictor, están expresadas en nanosegundos; en tanto las referencias a frecuencias, con la misma excepción, lo hacen en nanosegundos·día<sup>-1</sup>.

	Valores verdaderos			Predicciones		Errores en la predicción		Ganancia de la predicción	
	Fase	Frecuencia	Observación	Fase	Frecuencia	Fase	Frecuencia	Fase	Frecuencia
$t = k \tau$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$z(t)$	$\hat{x}_1(t t-1)$	$\hat{x}_2(t t-1)$	$p_{11}(t)$	$p_{22}(t)$	$G_1(t)$	$G_2(t)$
0	11.237	0	11.150	0	0	150.427	75.193	1.499	0.500
1	13.562	2.325	13.229	16.719	5.572	112.890	37.617	1.333	0.333
2	12.222	-1.340	12.247	17.639	4.409	100.333	25.073	1.249	0.250
3	12.518	0.295	12.575	15.311	3.061	94.057	18.803	1.199	0.200
4	21.082	8.565	20.853	15.091	2.514	90.291	15.042	1.166	0.167
5	9.317	-11.766	9.555	24.325	3.474	87.781	12.534	1.142	0.143
6	17.777	8.460	18.015	10.927	1.365	85.988	10.744	1.124	0.125
7	10.119	-7.658	10.112	20.262	2.251	84.644	9.400	1.111	0.111
8	7.042	-3.077	7.107	11.240	1.124	83.598	8.356	1.099	0.100
9	5.808	-1.234	5.843	7.820	0.710	82.762	7.520	1.090	0.091
10	-5.567	-11.375	-5.604	6.374	0.531	82.077	6.836	1.083	0.083

**Tabla 4.1:** Predictor *KALMAN* aplicado a datos simulados, afectados de ruido blanco de frecuencia y de ruido aditivo blanco de fase introducido por el sistema de medida.

#### 4.2.3. Reflexiones a tener presentes en la elección del predictor.

El trasfondo físico del modelo dinámico introducido con el filtro *KALMAN* es perfectamente consistente con el modelo universalmente aceptado de ley de potencias [60]. Uno es en el dominio del tiempo lo que el otro en el dominio de la frecuencia.

Mientras el modelo *ARIMA* busca la extrapolación a partir de un punto inicial fijo, provocando el constante aumento del error conforme transcurre el tiempo, el filtro *KALMAN* mantiene controlado el error de extrapolación al actualizar el punto de partida en cada ciclo básico.

El filtro *KALMAN* es, en definitiva, mejor elección que el modelo *ARIMA* ya que mientras las ecuaciones de estado del primero se deducen del propio modelo dinámico

que caracteriza el sistema, el segundo obedece meramente a un modelo de función aproximante, que prescinde de las características físicas de los datos procesados, teniendo mayor campo de aplicación aunque en ocasiones pueda provocar resultados poco adecuados.

De los párrafos precedentes podría desprenderse algo más que la idoneidad del filtro *KALMAN*. La realidad es que este filtro es extremadamente útil, pero incompleto, ya que el modelo de señal no ha considerado la inclusión del ruido *flicker* (de fase –F PM– y de frecuencia –F FM–). Estas modulaciones de ruido han sido tradicionalmente las más difíciles de caracterizar; hoy día existen modelos para ambos tipos de ruidos, aunque ninguno definitivo.



“Tan a destiempo llega el que va demasiado deprisa como el que se retrasa demasiado”



### DISCIPLINADO DE UNA ESCALA DE TIEMPO.

#### 5.1. Necesidad de predecir $UTC(ROA)$ en el algoritmo de disciplinado

Una vez obtenida una escala de tiempo conjunta fiable y de estabilidad óptima, se está en condiciones de afrontar la tarea final de gobernar la escala para dotar a la resultante ( $UTC(k)$ ) del suficiente grado de conformidad o concordancia con el Tiempo Universal Coordinado. Esto no es tarea fácil, puesto que el particular modo de realizarse UTC, esencialmente para alcanzar una estabilidad óptima a largo plazo y gran fiabilidad, ha supuesto que el acceso a ésta sea diferido.

Periódicamente, la Sección de Tiempo del BIPM publica en su Circular T los valores calculados de diferencias de fase-tiempo entre UTC y  $UTC(k)$ . Estos datos se refieren a las 0 h de los días julianos modificados acabados en 4 ó 9 y comprendidos en el mes anterior al de la publicación. La fecha de publicación suele oscilar entre el día 15 y 25 de cada mes.

El retardo de acceso a la escala UTC supone un nuevo inconveniente, solo franqueable con la adecuada predicción de lo que está por ocurrir en cada periodo entre modificaciones intencionadas en la marcha de la escala.

#### 5.2. Predicción de $UTC(ROA)$ entre instantes de disciplinado

Bastará con retomar al apartado 4.2, referente a la predicción de procesos aleatorios “estacionarios”, para recordar el significado y definición del predictor lineal. Precisamente se hará uso de un predictor de este tipo como paso previo al disciplinado de la escala, para poder garantizar la cancelación de la diferencia o “error” de fase-tiempo entre ambas escalas en el instante de aplicación del próximo disciplinado.

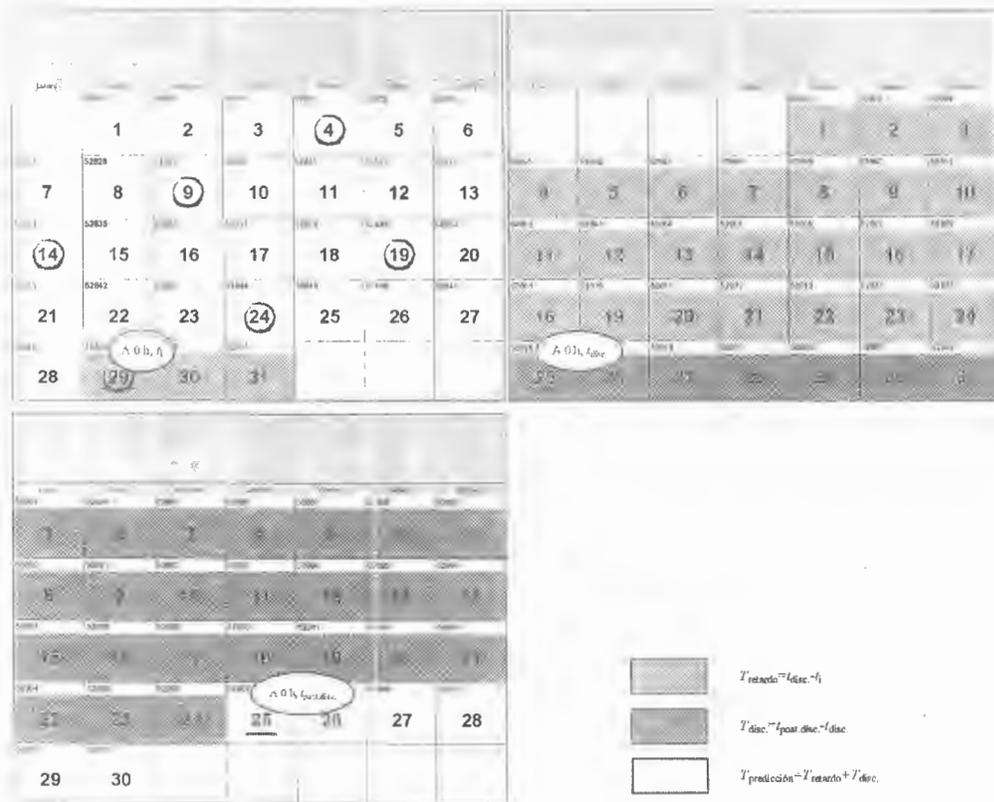


Figura 5.1: Ejemplo de cronograma, disciplinado del 25 de agosto a 0 h UTC.

Conocidos los valores  $UTC-UTC(ROA)$  publicados en la Circular T, si se asigna a la fecha correspondiente al último dato publicado, que designaremos como  $t_i$ , la frecuencia media observada de  $UTC(ROA)$  durante determinado tiempo de integración (relativa a UTC), definiendo el intervalo de tiempo de disciplinado  $T_{disc}$  como el tiempo transcurrido entre las fechas  $t_{disc}$  y  $t_{post.disc}$  de disciplinado de la escala (siempre posteriores a las de publicación de las correspondientes circulares T), y el intervalo de tiempo de retardo  $T_{retardo}$  como el tiempo transcurrido entre la última fecha con valor conocido de  $UTC-UTC(ROA)$  y una fecha prefijada de gobierno de la escala (una vez publicada la Circular T), para la que se adoptará el día 25 de cada mes a 0 h UTC. Se tendrá que el intervalo de tiempo de predicción  $T_{predicción}$ , o tiempo transcurrido entre la fecha de disponibilidad de la información de la “señal de error” y la de entrada en efecto de la “señal de corrección”, puede expresarse como:

$$(5.1) \quad T_{predicción}^{UTC(ROA)} = T_{retardo} + T_{disc}$$

Todos estos tiempos e intervalos de tiempo se expresan en días.

Si se tiene en cuenta que la información relativa a UTC se conoce a intervalos regulares de  $\tau = 5$  días, será práctico denotar cada etiqueta de datado de las lecturas UTC-UTC(ROA) mediante  $t_k = k \tau$ , con  $t_k$  expresado en días (a 0 h) y  $k$  representando un número entero positivo.

El resultado de la predicción de  $x_{UTC(ROA)} = UTC - UTC(ROA)$  en el instante  $t_{\text{post.disc.}}$  dependerá de la elección de la constante de tiempo  $T = \kappa \tau$  en el predictor de tipo media móvil de dos puntos que se va a emplear. El valor  $T$  (ó  $\kappa$ ) debe ser elegido de modo que el predictor lineal resulte óptimo.

Fijado el intervalo de tiempo para la media móvil  $T$ , aún debe mantenerse la precaución de aplicar el predictor sobre las lecturas  $x_{UTC(ROA)}$  una vez deshecho el efecto del disciplinado; de este modo, los nuevos datos designados como  $u_{UTC(ROA)}$  recuperarán las características de la serie TAI-TA(ROA): estacionariedad en las segundas diferencias y error en la predicción de carácter estacionario al aplicar un predictor lineal. El proceso  $x_{UTC(ROA)}$  es de carácter fuertemente evolucionista debido al continuo cambio de los parámetros de gobierno de mes en mes.

Conocidos los datos  $x_{UTC(ROA)}$ , editados en la Circular T hasta el instante  $t_i$  (en unidades de nanosegundos) y denotando las fechas de los últimos disciplinados efectuados mediante  $t_{\text{disc.-1}}, t_{\text{disc.-2}}, \dots$ , si se expresa la corrección introducida en cada fecha mediante  $g_{UTC(ROA)}(t_{\text{disc.-1}}), g_{UTC(ROA)}(t_{\text{disc.-2}}), \dots$  (en unidades de ns/d), se tendrá que:

$$\begin{aligned}
 u_{UTC(ROA)}[m] &= x_{UTC(ROA)}[m], t_m \geq t_{\text{disc.-1}} \\
 u_{UTC(ROA)}[m] &= x_{UTC(ROA)}[m] - g_{UTC(ROA)}(t_{\text{disc.-1}}) \cdot (t_{\text{disc.-1}} - t_m), t_{\text{disc.-2}} \leq t_m < t_{\text{disc.-1}} \\
 u_{UTC(ROA)}[m] &= x_{UTC(ROA)}[m] - g_{UTC(ROA)}(t_{\text{disc.-1}}) \cdot (t_{\text{disc.-1}} - t_m) - \\
 &\quad - g_{UTC(ROA)}(t_{\text{disc.-2}}) \cdot (t_{\text{disc.-2}} - t_m), t_{\text{disc.-3}} \leq t_m < t_{\text{disc.-2}} \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Estas correcciones en sentido regresivo deben deshacer el efecto de disciplinado que se ha ido acumulando si se desea recuperar el proceso  $u_{UTC(ROA)}$  hasta el instante  $t_0$ .

El predictor lineal aplicado a este nuevo proceso se hace óptimo para un intervalo de tiempo de la media móvil  $T$  en el que el ruido predominante de las lecturas de diferencias de fase-tiempo entre las escalas TAI y  $TA(ROA)$ , o entre UTC y  $UTC(ROA)$  sin disciplinar, sea *flicker* de fondo (máxima estabilidad en frecuencia). El valor de  $T$  se determinará experimentalmente en el próximo apartado, a partir de las lecturas reales de diferencias entre las escalas TAI y  $TA(ROA)$ .

Una vez establecido  $T$ , la predicción de  $x_{UTC(ROA)}$  en el instante  $t_{\text{post.disc.}}$  vendrá dada por:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \hat{x}_{UTC(ROA)}(t_{\text{post.disc.}}) &= x_{UTC(ROA)}(t_i) + \frac{T_{\text{predicción}}^{UTC(ROA)}}{T} \left( u_{UTC(ROA)}(t_i) - u_{UTC(ROA)}(t_{i-\kappa}) \right) \\ &= x_{UTC(ROA)}(t_i) + T_{\text{predicción}}^{UTC(ROA)} \cdot y(t_i, T) \end{aligned}$$

Y partiendo de esta expresión, la estima de la corrección a aplicar a la marcha de  $x_{UTC(ROA)}$  en el instante  $t_{\text{disc.}}$  para que alcance un valor nulo en el instante  $t_{\text{post.disc.}}$  se expresará mediante:

$$(5.4) \quad g_{UTC(ROA)}(t_{\text{disc.}}) = - \frac{1}{T_{\text{disc.}}} \left( x_{UTC(ROA)}(t_i) + T_{\text{predicción}}^{UTC(ROA)} \cdot y(t_i, T) \right)$$

### 5.3. Estima del error cometido en la predicción

En el supuesto de que los intervalos de tiempo de la media móvil y de la predicción fueran coincidentes ( $T = T_{\text{predicción}}$ ), la teoría de la predicción óptima y la estadística asociada a procesos aleatorios en el dominio del tiempo permiten definir el error cuadrático medio cometido en la predicción en cierto instante  $t+T$  a partir del concepto de varianza de *Allan* introducido en 2.3.2.

Si  $x(t+T)$  se expresa en función del valor del proceso en el instante previo  $x(t)$ , y del parámetro media móvil (o cociente incremental) de  $x$  entre los instantes  $t-T$  y  $t$ :  $y(t,T)$ , se tendrá que:

$$x(t+T) = x(t) + T \cdot y(t,T) + \delta(t,T) \quad (5.5)$$

Ante procesos cuyas segundas diferencias tienen carácter estacionario, la varianza de *Allan* converge, erigiéndose en la herramienta de mayor interés en la caracterización de procesos aleatorios en el dominio del tiempo. Si se cumple la hipótesis de estacionariedad antes citada, se tendrá que  $\delta(t,T) = x(t+T) - \hat{x}(t+T)$ , con valor esperado igual a cero y valor rms (raíz cuadrada de la media cuadrática) dado por:

$$\varepsilon(t,T) \equiv \varepsilon(T) = \sqrt{E[\{\delta(t,T)\}^2]} = \sqrt{2} CT \sigma_y(T) \quad (5.6)$$

Expresión en la que  $C$  denota la constante de conversión de días a nanosegundos, de valor  $8.64 \times 10^{13}$  ns/día.

El predictor lineal así definido depende únicamente del intervalo de tiempo de la media móvil  $T$ , y a pesar de su simplicidad se ha demostrado que es un buen predictor en aquellos procesos afectados de ruidos de tipo blanco, *flicker* y camino aleatorio de frecuencia. En concreto, la razón de errores rms entre este modelo y el predictor óptimo [61] en procesos con predominio de ruido blanco o camino aleatorio de frecuencia es de  $\sqrt{2} \approx 1.41$ ; esta relación disminuye significativamente cuando el tipo de ruido predominante es *flicker* de frecuencia ( $\sqrt{2 \ln 2} \approx 1.18$ ), en cuyo caso el predictor lineal es cuasi óptimo [62].

El predictor lineal será mejorable si se va más allá del caso simple introducido en los párrafos anteriores, en el que  $T = T_{\text{predicción}}$ . En un caso más general en el que  $T$  y  $T_{\text{predicción}}$  pueden ser diferentes,  $x(t+T_{\text{predicción}})$  puede expresarse en función del valor del proceso en el instante previo  $x(t)$ , y del parámetro media móvil (o cociente incremental) de  $x$  entre los instantes  $t-T$  y  $t$ :  $y(t,T)$ :

$$(5.7) \quad x(t + T_{\text{predicción}}) = x(t) + T_{\text{predicción}} \cdot y(t, T) + \delta(t, T_{\text{predicción}}, T)$$

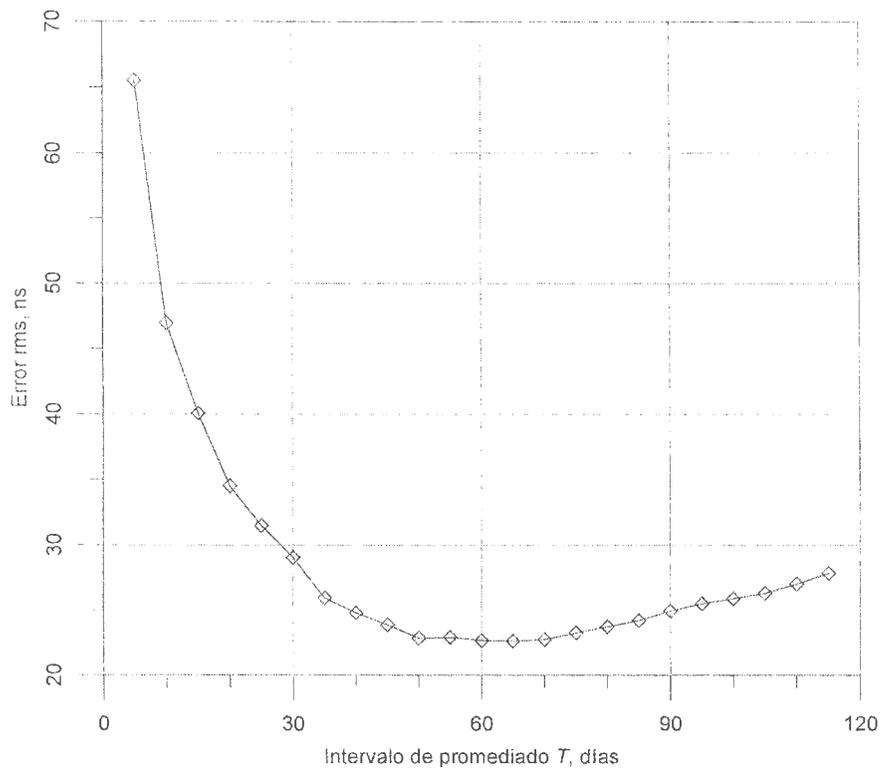
siendo  $\delta(t, T_{\text{predicción}}, T)$  el error cometido en la predicción:

$$(5.8) \quad \delta(t, T_{\text{predicción}}, T) = \left\{ x(t + T_{\text{predicción}}) - x(t) \right\} - \frac{T_{\text{predicción}}}{T} \left\{ x(t) - x(t - T) \right\}$$

cuyo valor rms no puede ser expresado en función de la varianza de *Allan*, lo cual no impide que se haga uso de la generalización así definida para determinar el valor  $T$  que hace óptimo el predictor lineal generalizado (mínimo el error cuadrático medio  $\varepsilon(t, T_{\text{predicción}}, T) \equiv \varepsilon(T_{\text{predicción}}, T)$ ).

Hay que significar, llegado este momento, que: 1) cualquier mejora respecto del predictor lineal simple implica una mayor aproximación al predictor óptimo, y que: 2) se ha prescindido del empleo directo del predictor óptimo [61] ya que presupone el conocimiento de las componentes determinísticas o sistemáticas que pudieran estar presentes en el proceso (frecuencia constante diferente de la nominal y, en menor medida, deriva lineal de frecuencia), de modo que el error rms en la predicción debe ser interpretado como la incertidumbre rms asociada al valor que resulta de extrapolar el proceso  $x(t)$ , conforme al modelo determinístico, hasta el instante  $t + T_{\text{predicción}}$ . La generalización del predictor lineal, en cambio, actúa sobre el proceso “completo”  $x(t)$ .

Para determinar el valor de  $T$ , se ha hecho uso de las lecturas de diferencias de fase-tiempo entre el TAI y la nueva escala *TA(ROA)* disponibles hasta la fecha. Con estos valores reales, se han promediado los errores  $\delta(t, T_{\text{predicción}}, T)$  para diferentes valores de  $T$ , tomando como intervalo de tiempo de predicción  $T_{\text{predicción}} = T_{\text{retardo}} + T_{\text{disc.}} = 25 + 30 = 55$  días. El resultado se muestra en la figura 5.2:



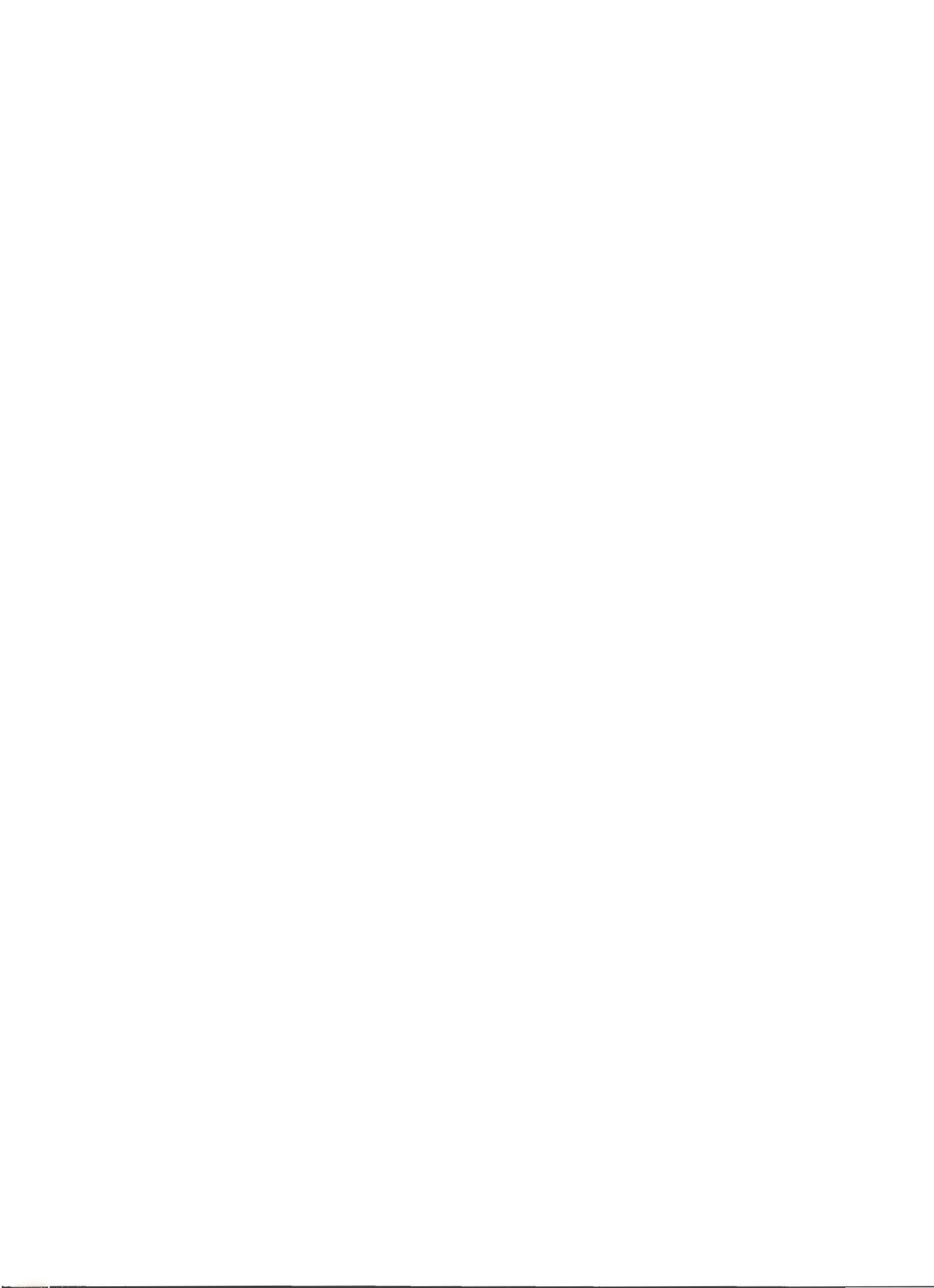
**Figura 5.2:** Estima del valor rms del error obtenido en la predicción de TAI-TA(ROA), en función del intervalo de tiempo de la media móvil  $T$ , para un intervalo de tiempo de predicción  $T_{\text{predicción}}$  de 55 días.

Aunque este parámetro se ha basado en un número limitado de muestras de TAI-TA(ROA), se adoptará provisionalmente hasta que se disponga de un número suficiente de datos que permitan fijar el valor definitivo. No obstante parece claro que el valor final a adoptar se localizará en el rango comprendido entre 50 y 65 días. Por lo pronto, se ha adoptado como valor provisional  $T = 55$  días, lo que lleva a retomar el caso más simple de predictor lineal tipo media móvil de dos puntos, en el que  $T = T_{\text{predicción}} = 55$ .



“Lo único que realmente nos pertenece es el tiempo,  
incluso aquél que no tiene otra cosa cuenta con eso”

*GRACIÁN, Baltasar*



# REALIZACIONES DE ESCALAS DE TIEMPO DE INTERÉS EN EL ÁMBITO INTERNACIONAL.

El desarrollo de los primeros algoritmos encaminados a la realización de escalas de tiempo datan aproximadamente de la misma época en que se construyeron los primeros patrones atómicos: mediados del siglo XX. Ambos aspectos continúan en evolución paralela, pues se complementan a la perfección cuando participan en la generación de una escala. Así, cuando la ingeniería encuentra limitaciones para mejorar la característica de fiabilidad, estabilidad, exactitud, etc. de los relojes, un adecuado tratamiento *software* de los datos suministrados por el reloj (o relojes) puede permitir mejorar cualquier característica o calidad de la escala de tiempo a realizar.

En la actualidad existen alrededor de una veintena de realizaciones de escala de tiempo atómico independientes, denominadas  $TA(k)$ , siendo  $k$  el acrónimo del laboratorio que la realiza. Cada una de estas realizaciones emplean algoritmos que atienden a las necesidades del propio laboratorio y a la disponibilidad de relojes.

En muchas ocasiones resulta complicado identificar las diferentes características de determinada realización, y ello se debe a que la publicación de información acerca de estos algoritmos suele ser escasa o nula.

Todas estas realizaciones pueden parecer más o menos diferentes, pero gran parte de ellas se basan en idénticas hipótesis y mantienen muchos elementos estructurales en común. Veamos a continuación los aspectos fundamentales de algunas de estas escalas.

### 6.1. El algoritmo del *TAI* (BIPM)

La escala de tiempo *TAI* es una referencia internacional para el datado de eventos, cuyas principales cualidades son la estabilidad a largo plazo y la fiabilidad. Para ello, el

TAI se basa en la contribución de alrededor de 220 patrones de haz de cesio comerciales, unos 50 máseres de hidrógeno y algunos patrones primarios de laboratorio de haz de cesio y de “fuente” de cesio, todos ellos distribuidos entre unos cincuenta laboratorios situados en diferentes partes del mundo y enlazados mediante una red que permite el intercambio preciso de datos de tiempo.

Aunque la realización del TAI se basa en medidas tomadas cada cinco días (días julianos modificados acabados en 4 ó 9), la estabilidad a largo plazo se alcanza mediante un algoritmo iterativo denominado ALGOS, que actúa sobre el conjunto de datos correspondientes a un mes. El TAI es por tanto una escala diferida o de acceso retardado.

Este algoritmo fue originalmente concebido y puesto en práctica por el Buró Internacional de la Hora en el año 1973 [63], siendo empleado hoy día con algunas modificaciones por la Sección de Tiempo del Buró Internacional de Pesas y Medidas.

La generación del TAI tiene lugar en dos etapas. Inicialmente se calcula lo que se conoce como Escala Atómica Libre (*EAL*): escala constituida por la media ponderada de todas las lecturas de los relojes, y cuyos pesos son tales que se optimiza la estabilidad a largo plazo [64, 65]. Posteriormente se obtiene el TAI como resultado de corregir la frecuencia de la *EAL* de manera que exista concordancia con la de los patrones primarios de laboratorio, previamente corregida por los efectos conocidos (relatividad general, radiación del cuerpo negro, etc.), garantizando con ello la exactitud de la escala. Las correcciones en frecuencia, de magnitud similar a la de la inestabilidad de la *EAL*, se han mantenido en los últimos años en torno a  $1 \cdot 10^{-15}$  en valor relativo.

El cálculo definitivo de la *EAL* se publica doce veces al año. Promediando los valores de frecuencia cada 30 días se consigue suavizar el ruido propio de los enlaces remotos para transferencia de tiempo, así como la modulación blanca de frecuencia de los propios relojes.

Los datos necesarios en la *EAL* son las diferencias de lecturas  $x_{ij}(t)$  entre relojes, tomadas cada 5 días. Estos observables se definen como las diferencias de fase-tiempo, para el instante  $t$ , entre el reloj  $j$ -simo y el  $i$ -simo:

$$x_{ij}(t) = h_j(t) - h_i(t) \quad (6.1)$$

El algoritmo se ejecuta todos los meses, proporcionando como resultado las diferencias de fase-tiempo  $x_i(t)$  entre la escala *EAL* y el reloj  $i$ -simo, para cada uno de los instantes  $t$  incluidos en el mes que está siendo sometido al cálculo:

$$t = t_0 + n \frac{T}{6}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (6.2)$$

expresión en la que  $T$  son 30 días, siendo  $t_0$  el último día del intervalo mensual anterior. Para mantenerse en fase con el calendario, a veces se establece el valor  $T = 35$ , en cuyo caso  $n$  varía entre 0 y 7.

Las diferencias de fase-tiempo  $x_i(t)$  se expresan del siguiente modo:

$$x_i(t) = EAL(t) - h_i(t) \quad (6.3)$$

siendo  $h_i(t)$  la lectura del reloj  $i$ -simo.

La definición de la *EAL* es análoga a la introducida en (4.1), y suele representarse como:

$$EAL(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i(t) [h_i(t) + h_i'(t)] \quad (6.4)$$

donde  $\omega_i(t)$  denota el peso relativo atribuido al reloj  $i$ -simo,  $h_i'(t)$  es la corrección a aplicar para asegurar la continuidad en tiempo y frecuencia de la escala cuando hay redistribución de pesos, y  $N$  es el número de relojes.

A partir de las definiciones previas, se obtiene el sistema:

$$(6.5) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^N \omega_i x_i(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i h_i'(t) \\ x_{ij}(t) = x_i(t) - x_j(t) \end{cases}$$

Las medidas de diferencias de fase-tiempo  $x_{ij}(t)$  se toman de manera que no sean redundantes, de modo que  $N$  relojes producen  $N - 1$  ecuaciones en diferencias. De este modo (6.5) representa un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas: las diferencias de fase-tiempo  $x_i(t)$ .

A la pendiente de la recta de regresión sobre los valores  $x_i(t_0 + nT/6)$ , con  $n = 0, \dots, 6$ , se le denomina frecuencia  $B_i(t_0 + T)$  del reloj  $i$ -simo, relativa a la *EAL*, para el intervalo  $[t_0, t_0 + T]$ .

El término correctivo  $h_i'(t)$  para el reloj  $i$ -simo se compone de dos términos:

$$(6.6) \quad h_i'(t) = a_i(t_0) + B_{ip} \cdot (t - t_0)$$

siendo  $a_i(t_0)$  la diferencia de fase-tiempo entre la *EAL* y el reloj  $i$ -simo en el instante  $t_0$ , es decir:

$$(6.7) \quad a_i(t_0) = EAL(t_0) - h_i(t_0) = x_i(t_0)$$

$B_{ip}(t)$  la frecuencia del reloj  $i$ -simo, relativa a la *EAL*, predicha para el periodo  $[t_0, t]$ , y  $(t - t_0) = nT/6$  con  $n = 0, \dots, 6$ .

La predicción de frecuencia  $B_{ip}(t)$  se mantiene constante durante todo el mes  $[t_0, t_0 + T]$ , y es igual a la frecuencia  $B_i(t_0)$  calculada en el mes precedente  $[t_0 - T, t_0]$ :

$$B_{ip}(t) = B_i(t_0) \quad \text{para } t = t_0 + n \frac{T}{6}, \quad n = 0, \dots, 6 \quad (6.8)$$

ello se deriva de la hipótesis razonadamente asumida que el ruido predominante para intervalos de observación de  $T = 30$  días es camino aleatorio de frecuencia, siendo la mejor predicción de frecuencia la precedente.

Los pesos  $\omega_i(t)$  vienen dados por la condición de optimizar la estabilidad a largo plazo de la *EAL*, en particular, de minimizar las fluctuaciones de carácter determinista tales como la deriva lineal de frecuencia o el ruido estacional. Con tal fin, se observan las frecuencias de cada reloj durante un año, de modo que la determinación del peso toma en cuenta el comportamiento del reloj durante el mes actual, según un proceso iterativo con cuatro iteraciones, conforme a los siguientes pasos:

- i) El sistema (6.5) se resuelve empleando para la primera iteración los pesos del mes anterior. En sucesivas iteraciones se emplean los pesos obtenidos en la anterior iteración.
- ii) A partir de los resultados  $x_i(t)$  se estiman las frecuencias  $B_i(t_0 + T)$  relativas al mes en consideración.
- iii) Con la frecuencia  $B_i(t_0 + T)$  y la de los once meses precedentes se calcula la varianza muestral  $\sigma_i^2(12, T)$  asociada a cada reloj.
- iv) Se calcula el peso relativo del reloj  $i$ -simo con carácter provisional, según la siguiente expresión:

$$\omega_i' = \frac{1/\sigma_i^2(12, T)}{\sum_{i=1}^N 1/\sigma_i^2(12, T)} \quad (6.9)$$

- v) El nuevo peso  $\omega_i$  será igual al valor  $\omega_i'$  excepto en dos casos:
  - a) Cuando el reloj  $i$ -simo satisfaga el conjunto de requisitos para la limitación de peso de modo que no pueda contribuir plenamente como corresponde por su estabilidad. Esta primera condición establece el límite superior de peso estadísticamente necesario para hacer que la escala de tiempo se confíe a los

mejores relojes del conjunto, evitando dar un papel predominante a uno de ellos. El concepto de peso límite está ligado al de fiabilidad de la escala.

- b) Si el reloj  $i$ -simo mostró comportamiento anómalo, en cuyo caso el peso  $\omega_i$  se hace igual a cero. Esta segunda condición protege la escala frente a cambios bruscos de frecuencia en algún reloj, lo que originaría una predicción errónea de frecuencia. Este concepto enlaza con el requisito de estabilidad.

El límite superior de pesos en el cálculo de la  $EAL$  es un valor relativo  $\omega_{MAX} = A/N$ , en el que  $A$  es una constante empírica establecida en 2.5 desde enero de 2002, y  $N$  es el número total de relojes que contribuyen en la realización del TAI. Tanto la imposición de la condición de peso límite, como la detección de comportamientos anómalos, se llevan a cabo en sendos conjuntos de sub-iteraciones que forman parte de cada una de las iteraciones del proceso general de cálculo previamente descrito.

El primer conjunto de sub-iteraciones se inicia con los pesos temporales  $\omega_i'$  calculados en (6.9), y finaliza cuando tras un ciclo de recorte de peso y normalización, ningún otro reloj alcance o supere el peso límite.

Habrà un determinado reloj que sea el último en alcanzar el peso límite  $\omega_{MAX}$ . Este reloj es el menos estable de entre aquellos que alcanzaron  $\omega_{MAX}$ , y la varianza que caracteriza su estabilidad,  $\sigma_i^2(12, T)$ , se erigirá en el límite establecido para los relojes que alcanzaron el peso máximo:  $\sigma_{MIN}^2$ . Este valor juega un papel fundamental en la detección de comportamientos anómalos en relojes, pues calculada la media  $\bar{B}_i$  y varianza  $s_i^2(11, T)$  de las frecuencias del reloj  $i$ -simo durante los once meses anteriores, en el supuesto de que el ruido predominante sea camino aleatorio de frecuencia, la varianza de doce muestras  $s_i^2(12, T)$  puede estimarse con

$$(6.10) \quad s_i^2(12, T) = (12 \cdot 11) s_i^2(11, T)$$

con la condición:

$$\text{si } s_i^2(12, T) \leq \sigma_{\text{MIN}}^2, \text{ entonces } s_i^2(12, T) = \sigma_{\text{MIN}}^2 \quad (6.11)$$

Se considera superado el límite de exclusión del reloj  $i$ -simo cuando, sobre el intervalo de cálculo  $[t_0, t_0 + T]$ , es

$$\frac{B_i(t_0 + T) - B_i}{s_i(12, T)} > 3 \quad (6.12)$$

Si la variación de frecuencia  $B_i(t_0 + T)$  supera el límite el reloj  $i$ -simo adquiere el peso cero, volviendo a formar parte de la escala conjunta en el próximo mes pero con un peso bajo. El propio proceso de ponderación mantiene memoria del salto de frecuencia detectado durante el periodo de un año.

Este procedimiento iterativo sobre un conjunto de siete datos consecutivos separados en intervalos de cinco días produce una escala de tiempo retardada y calculada *a posteriori*, que opera en pasos de un mes de duración, con estimación adaptiva de los pesos de los relojes que contribuyen a la escala.

Una vez optimizada la estabilidad, la exactitud del TAI se caracteriza mediante dos números que indican la diferencia  $d$  entre la duración de la unidad de TAI y el segundo del Sistema Internacional de unidades, tal cual resulta de un patrón de frecuencia primario sobre el geoide en rotación, y su incertidumbre relativa  $\sigma$ . Estos números pueden estimarse individualmente, por comparación con un patrón de frecuencia primario, o de manera global para todos los intervalos de cálculo del TAI, conforme al método descrito en [66], empleando todas las medidas disponibles de los patrones de frecuencia más exactos una vez corregidos por el desplazamiento de frecuencia de radiación del cuerpo negro.

## 6.2. El algoritmo del AT1 (NIST)

La escala AT1, mantenida por el *National Institute of Standards and Technology* (Boulder, CO, EE.UU), está generada en tiempo cuasi real, inmediatamente después de cada proceso de medida (actualmente  $T = \tau = 2$  horas), a partir de un conjunto de patrones de cesio y de máseres de hidrógeno. AT1 es una escala libre cuya frecuencia se

mantiene tan constante como resulta posible mediante la elección óptima de los pesos con que cada reloj contribuye al cálculo, sin procesado *a posteriori* [67, 68]. Esta escala es posteriormente corregida para conseguir exactitud, para lo cual emplea como referencia un patrón de frecuencia primario de “fuente” de cesio (NIST-F1).

La estima  $x_i(t)$  de las diferencias de fase-tiempo del reloj  $i$ -simo respecto de la escala  $ATI$  para el instante  $t$  se define mediante una ecuación similar a (6.3):

$$(6.13) \quad x_i(t) = ATI(t) - h_i(t)$$

Las ecuaciones para el cálculo de la escala de tiempo en el instante  $(t + \tau)$  se basan en las predicciones de las diferencias de fase-tiempo  $\hat{x}_i$  y de las frecuencias normalizadas relativas a la escala  $ATI$   $\hat{y}_i$ , según las siguientes expresiones:

$$(6.14) \quad \hat{x}_i(t + \tau) = x_i(t) + \hat{y}_i(t)\tau$$

y

$$(6.15) \quad x_i(t + \tau) = \sum_{j=1}^N p_j [\hat{x}_j(t + \tau) - x_{ji}(t + \tau)]$$

Al igual que en el apartado 6.1,  $p_i$  es el peso estadístico relativo del reloj  $i$ -simo,  $N$  es el número total de relojes y  $x_{ji}(t + \tau)$  es la diferencia de fase-tiempo, medido en el instante  $(t + \tau)$ , entre los relojes  $i$ -simo y  $j$ -simo. El conjunto de medidas es no-redundante, es decir, se compone de  $(N - 1)$  comparaciones entre un reloj, tomado como referencia, y todos los restantes.

De (6.15) se desprende que la actualización de la diferencia de fase-tiempo  $x_i$  para el instante  $(t + \tau)$  es una media ponderada de las predicciones  $\hat{x}_j(t + \tau)$  corregidas previamente por las medidas  $x_{ji}(t + \tau)$ .

La frecuencia del reloj  $i$ -simo para el instante  $(t + \tau)$  se define mediante:

$$y_i(t + \tau) = \frac{x_i(t + \tau) - x_i(t)}{\tau} \quad (6.16)$$

La predicción de la frecuencia  $\hat{y}_i(t + \tau)$  a emplear en el cálculo de  $\hat{x}_i$  en el instante  $(t + 2\tau)$  se determina a partir de una media ponderada exponencial de las frecuencias medias actual y precedentes  $y_i$ , tal como se deduce de las ecuaciones (6.16) y (6.17):

$$\hat{y}_i(t + \tau) = \frac{1}{m_i + 1} [y_i(t + \tau) + m_i \hat{y}_i(t)] \quad (6.17)$$

Considerando que el ruido predominante en los relojes es blanco y camino aleatorio de frecuencia, la constante de tiempo  $m_i$  del filtro exponencial (6.17) que permite alcanzar la estimación óptima de  $\hat{y}_i(t + \tau)$  viene dada por:

$$m_i = \frac{1}{2} \left[ -1 + \left( \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{\tau_{\min,i}^2}{\tau^2} \right)^{1/2} \right] \quad (6.18)$$

en la que  $\tau_{\min,i}$  representa el intervalo de observación para el que el  $i$ -simo reloj muestra la mínima inestabilidad.

Los pesos a emplear en (6.15) se calculan previamente mediante otro filtro exponencial aplicado a las desviaciones entre las diferencias de fase-tiempo predichas y las estimadas en los últimos  $N_\tau$  periodos. Para el instante  $(t + \tau)$ , los pesos se definen a partir del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$|\varepsilon_i(\tau)| = |\hat{x}_i(t + \tau) - x_i(t + \tau)| + K_i \quad (6.19)$$

$$\langle \varepsilon_i^2(\tau) \rangle_{t+\tau} = \frac{1}{N_\tau + 1} \left[ \varepsilon_i^2(\tau) + N_\tau \langle \varepsilon_i^2(\tau) \rangle_t \right] \quad (6.20)$$

$$(6.21) \quad p_i = \frac{1}{\langle \varepsilon_i^2(\tau) \rangle} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\langle \varepsilon_i^2(\tau) \rangle} \right]^{-1}$$

La constante de tiempo  $N_\tau$  que aparece en (6.20) suele establecerse en 20 o 30 días. El uso del filtro exponencial se justifica ante el supuesto de que el ruido presente en los relojes no tenga carácter estacionario, en cuyo caso debe ir diluyéndose la influencia de la información conforme se aleja del instante presente. El término  $K_i$  añadido en (6.19) corrige el efecto de correlación entre la escala conjunta y el reloj  $i$ -simo, según el cual los relojes con mayor peso tienden a tomar el control de la escala. Suponiendo que el ruido de los relojes tenga carácter *gaussiano*, el término  $K_i$  viene estimado por [69]:

$$(6.22) \quad K_i = \frac{1}{(1 - p_i)}$$

Para concluir diremos que la escala *ATI* se produce en tiempo real, tras cada secuencia de medida, y sin procesado posterior. La predicción de frecuencia y la determinación de pesos se deducen de la aplicación de filtros exponenciales sobre los datos disponibles; de este modo, se mantiene en todo momento y de manera dinámica una estima del comportamiento de cada reloj.

### 6.3. El algoritmo del *TA(F)*

La escala *TA(F)* está generada por el *Bureau National de Métrologie, Systèmes de Référence Temps Espace* (BNM-SYRTE) a partir de las lecturas de relojes distribuidos entre once laboratorios franceses. Esta escala se produce con un mes de retardo, y emplea un algoritmo denominado TAC [54], que trata de optimizar la estabilidad a largo plazo.

Durante cada intervalo de tiempo  $[t_1, t_1 + \Delta t]$ , la escala de tiempo  $E$  se somete al algoritmo que asegura la continuidad de la escala en tiempo y frecuencia entre dos intervalos consecutivos y que calcula la media ponderada de las lecturas correspondientes a los  $N'$  relojes. Para el instante  $t$ , la escala de tiempo  $E$  se expresa como:

$$\forall t \in [t_1, t_1 + \Delta t]: E_t = \sum_{i=1}^{N'} \omega(i) H_t(i) + f(t) \quad (6.23)$$

$$\text{con } \sum_{i=1}^{N'} \omega(i) = 1,$$

donde  $t_1$  representa el último instante del mes anterior,  $t_1 + \Delta t$  es el último instante del mes actual,  $N'$  es el número total de relojes,  $\omega(i)$  es el peso relativo atribuido al reloj  $i$ -simo durante el intervalo de tiempo considerado,  $H_t(i)$  es la lectura del reloj  $i$ -simo en el instante  $t$  y  $f(t)$  es la corrección de tiempo aplicada en el instante  $t$  para asegurar la continuidad en tiempo y frecuencia ante una eventual redistribución de pesos.

La diferencia de fase-tiempo entre el reloj  $i$ -simo y la escala  $E$  en el instante  $t$  se expresa mediante  $X_t(i) = H_t(i) - E_t$ . Si  $\hat{X}_t(i)$  denota la predicción de  $X_t(i)$ , la ecuación básica de la escala de tiempo se convierte en:

$$\forall t \in [t_1, t_1 + \Delta t]: E_t = \sum_{i=1}^{N'} \omega(i) [H_t(i) - \hat{X}_t(i)] \quad (6.24)$$

Partiendo de la hipótesis de que las diferencias de fase-tiempo entre cada reloj y la escala conjunta pueden ser consideradas como la realización de un proceso  $X$  ARIMA (0, 2, 1), se define el proceso  $Y$  como:  $Y_n = X_n - 2X_{n-1} + X_{n-2}$ .

El proceso  $Z = Y - m$ , con  $m = E[Y]$  será un proceso ARMA (0, 1), de ecuación canónica  $Z_n = U_n + bU_{n-1}$ , en la que  $U$  representa un ruido blanco de varianza  $\sigma^2$ .

Una vez estimados los diferentes parámetros del modelo:  $m$ ,  $b$  y  $\sigma^2$ , se efectúan dos tipos de predicciones, con doble finalidad en la elaboración de la escala de tiempo. La primera se emplea en el cálculo, para cada reloj  $i$ -simo, de las predicciones a lo largo del presente mes:

$$p_{H_N^i}(X_{N+1}) = m + 2X_N - X_{N-1} + bU_N \quad (6.25)$$

$$(6.26) \quad p_{H_N^x}(X_{N+2}) = m + 2 p_{H_N^x}(X_{N+1}) - X_N$$

y

$$(6.27) \quad \forall k > 2 \quad p_{H_N^x}(X_{N+k}) = m + 2 p_{H_N^x}(X_{N+k-1}) - p_{H_N^x}(X_{N+k-2})$$

Estas predicciones, debidamente aplicadas a la ecuación (6.24), producen una primera aproximación de la escala de tiempo.

La segunda se emplea en el proceso de cálculo diario de la escala y supone la predicción con un solo intervalo unitario de tiempo de antelación. Las ecuaciones utilizadas son (6.25) y (6.28):

$$(6.28) \quad \forall k > 0 \quad p_{H_{N+k}^x}(X_{N+k+1}) = m + 2 X_{N+k} - X_{N+k-1} + b(X_{N+k} - p_{H_{N+k-1}^x}(X_{N+k}))$$

Para cada reloj  $i$ -simo, (6.25) permite calcular  $\hat{X}_{t_1+1}(i)$ , en tanto que las restantes predicciones del mes ( $\hat{X}_{t_1+2}(i)$  a  $\hat{X}_{t_1+\Delta t+1}(i)$ ) se calculan con (6.28) y  $k$  desde 1 a  $\Delta t$ .

La asignación de pesos a los relojes que contribuyen en la escala se compone del producto de dos factores. El primer factor  $\omega_1(i)$  es directamente proporcional al tiempo transcurrido, al entender que la calidad de los parámetros estimados en el modelo será tanto mejor cuanto mayor sea el número de datos de las series en que se basan las estimas. Este factor se encarga asimismo de controlar el acceso de un nuevo reloj en la escala.

Establecidos los parámetros de longitud mínima y máxima de las series ( $S_{\min} = 215$  d y  $S_{\max} = 365$  d) y denominando  $N''(i)$  al número de datos disponibles  $X_t(i)$  de cada reloj  $i$ -simo en el instante  $t_1$ , los pesos  $\omega_1(i)$  vienen dados por:

$$\omega_1(i) = \begin{cases} \frac{N''(i) - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} N''(i) & S_{\min} \leq t \leq S_{\max} \\ N''(i) & S_{\max} < t < \infty \end{cases} \quad (6.29)$$

Como para cada reloj  $i$ -simo se ha estimado la varianza  $\sigma^2(i)$  del ruido blanco asociado al modelo *ARIMA*, establecido el límite  $S = 4.6 \text{ ns}^2/\text{d}^4$  para evitar el predominio de un reloj y denominando  $\tilde{\sigma}^2(i)$  a la estima de  $\sigma^2(i)$ , el peso  $\omega_2(i)$  asignado al reloj es:

$$\omega_2(i) = \begin{cases} 100 & \tilde{\sigma}^2(i) \leq S \\ 100 S / \tilde{\sigma}^2(i) & \tilde{\sigma}^2(i) > S \end{cases} \quad (6.30)$$

El peso final del reloj  $i$ -simo es  $\omega_r(i) = \omega_1(i) \times \omega_2(i)$ .

La detección de cambios indeseables de frecuencia durante el mes en curso se lleva a cabo a partir de la predicción *ARIMA* previamente introducida. Inicialmente se consideran validados los pesos de todos los relojes que intervienen en la escala ( $v(i) = 1$ ); mediante un algoritmo de validación de pesos se determina si cierto reloj continúa contribuyendo o si por el contrario debe ser excluido ( $v(i) = 0$ ).

El algoritmo de validación de pesos comienza calculando la escala de tiempo preliminar a partir de los pesos normalizados para cada reloj, definidos como:

$$\omega(i) = \frac{\omega_r(i)v(i)}{\sum_{j=1}^{N'} \omega_r(j)v(j)} \quad (6.31)$$

Determinada la escala preliminar, se obtiene una medida  $D_i$  del cambio de frecuencia de cada reloj respecto de dicha escala. Este valor  $D_i$  vale cero si, en términos absolutos, la diferencia entre las frecuencias estimadas mediante ajuste lineal por mínimos cuadrados sobre los intervalos de tiempo  $[t_1 - \text{long} + 1, t_1]$  y  $[t_1 + 1, t_1 + \Delta t]$  es menor que el parámetro  $M_{\max}$  (establecido en  $0.432 \text{ ns}/\text{d}$ ). Si esta diferencia es mayor que  $M_{\max}$ ,  $D_i$  toma el valor de la diferencia entre dichas frecuencias.

Si el máximo valor de  $|D_i|$  corresponde al reloj  $k$ -simo,  $v(k)$  pasa a tomar el valor cero, mientras el resto de los valores  $v(i)$  permanecen invariables en la iteración.

El proceso iterativo se repite hasta que todos los valores  $D_i$  sean igual a cero, si bien podría detenerse en caso de que el número de relojes descartados fuera demasiado elevado, o si la suma de los pesos normalizados asociados a éstos superara el valor  $1/2$ .

El algoritmo TAC permite calcular la escala atómica libre francesa (*FEAL*). Esta escala, debidamente corregida mediante la adición de una función lineal  $g(t)$  que le confiere las características de continuidad y exactitud, llevan a la escala *TA(F)*.

#### 6.4. El algoritmo del UTC(USNO)

*UTC(USNO)* es la escala de tiempo del *United States Naval Observatory* (Washington, DC, EE.UU). Esta escala, obtenida a partir de una media ponderada de alrededor de cincuenta patrones de haz de cesio y una docena de máseres de hidrógeno, es el resultado de gobernar la escala libre de referencia en el laboratorio, conocida como *A.1*, hacia la predicción de *UTC(BIPM)*.

La escala media *UTC(USNO)* se materializa a partir de un máser de hidrógeno (en la actualidad *master clock 2 (MC #2)*) adecuadamente gobernado mediante un dispositivo auxiliar.

Esta escala está generada mediante la siguiente ecuación [70]:

$$(6.32) \quad z_i = z_{i-T} + \sum_i \omega_i(i) \left[ x_i(i) - x_{i-T}(i) + T r_i(i) - \frac{1}{2} T^2 d_{i-T}(i) \right]$$

en la que  $z_i$  representa la diferencia de fase-tiempo entre el *master clock* y la escala media,  $x_i(i)$  es la diferencia de fase-tiempo entre el *master clock* y el reloj  $i$ -simo,  $\omega_i(i)$  es el peso del reloj  $i$ -simo, y  $r_i(i)$  y  $d_i(i)$  respectivamente la frecuencia y la

deriva de frecuencia del reloj  $i$ -simo relativas a la escala media. Todas estas variables referidas al instante  $t$ .

El hecho de que a la escala contribuyan patrones de características dispares ha llevado al establecimiento de pesos variables con el tiempo  $t$ , expresado en segundos, transcurrido entre cierto instante de medidas y la medida realizada más recientemente. De este modo se potencia la contribución de los máseres en el pasado más reciente (o a corto plazo; rango en el que son significativamente más estables que los patrones de haz de cesio) y la de los patrones de haz de cesio a largo plazo (rango en el que se erigen como más estables). Estos pesos son inversamente proporcionales a las varianzas de *Allan* deducidas mediante ajustes de polinomios de segundo grado sobre las curvas típicas en diagramas sigma-tau:

$$\begin{aligned} \omega_{5071}(t) &= \frac{1}{\left[\text{antilog}(0.130 y_{Cs}^2 - 0.137 y_{Cs} - 13.959)\right]^2} \\ \omega_{Cs}(t) &= 0.657 \omega_{5071}(t) \\ \omega_{HM}(t) &= \frac{1}{\left[\text{antilog}(0.309 y_{HM}^2 - 0.037 y_{HM} - 14.239)\right]^2} \end{aligned} \quad (6.33)$$

donde  $\omega_{5071}$ ,  $\omega_{Cs}$  y  $\omega_{HM}$  representan los pesos de los patrones de haz de cesio 5071 (de *Agilent Technologies*), otros patrones de cesio y máseres de hidrógeno respectivamente, con  $y_{Cs} = \log t - 5.9$  e  $y_{HM} = \log t - 5.2$ . Para el caso particular en que  $t = 0$ , se asignan arbitrariamente pesos iguales a los correspondientes para  $t = 3600$ .

Debido al cambio de los pesos con el transcurso del tiempo, los últimos 75 días de datos se someten a un nuevo proceso de cálculo cada hora. Adicionalmente, al menos dos veces por semana se vuelve a procesar manualmente la escala tras evaluarse la marcha y la estabilidad de cada reloj. Estas marchas y estabilidades se controlan con especial atención, de modo que cualquier cambio significativo en uno de estos parámetros supone la pérdida total de peso en la contribución del reloj afectado a la escala media. El peso permanece igual a cero hasta que resulta posible calcular una nueva marcha y/o estabilidad, generalmente después de transcurridos 25 días.

Transcurridos los 75 días, los máseres dejan de contribuir significativamente a la escala, con lo que se evita cualquier deriva residual que pudiera afectar negativamente a la estabilidad.

La escala media de papel, *UTC(USNO)*, se gobierna eventualmente hacia el TAI mediante correcciones inferiores a 1 ns/día cada 10 días.

La señal de tiempo USNO, generada por el *master clock #2*, resulta del disciplinado mediante un sintetizador de frecuencia hasta alcanzar la más estrecha sincronización posible con la escala *UTC(USNO)*. Las correcciones en frecuencia son siempre inferiores a 150 ps/día, con una constante de tiempo establecida en 50 días en la actualidad.

#### **6.5. Otras escalas de tiempo descritas en la literatura científica internacional.**

Tal como se indicaba en la introducción del capítulo, este tipo de información se difunde en contadas ocasiones, resultando complicado conocer y entender al detalle el modo en que cada escala ha sido implementada.

No obstante, se han localizado descripciones relativas a las escalas italiana, israelí, y belga en las referencias bibliográficas [71] a [73].

*D.O.M. Rationi temporum syderum scrutatoribus navium rectoribus speculam hunc erigendam decrevit, Carolus IV D.G. Hispaniar. et Indiar. Rex P.A. P.P. An. Reg. V Pontif. S.S.P.N. Pii VI XVIII. Favente Antonio Valdesio regis ad rem navalem administro, petente Josepho Mazarredo classium vice praefecto generali, gaditana classis sumo imperatore Francisco Marchione de Tilly, studia curante Cipriano Vimercati ichonographiam descripsit. Hunc lapidem possuit Gaspar de Molina Marchio de Ureña A.S.H. M.D.CC.XCIII. Die III mens. Octob.*

(En el nombre de Dios Óptimo Máximo. Para el estudio del tiempo, para astrónomos y navegantes, Carlos IV, por la gracia de Dios rey de España y de las Indias, Padre de la Patria, con piadoso ánimo, ordenó que fuese construido este observatorio en el quinto año de su reinado y en el décimo octavo del Pontificado de Su Santidad Nuestro Padre Pío VI. Bajo los auspicios de Antonio Valdés ministro real de Marina. A petición de José de Mazarredo, vicealmirante general de la Armada. Siendo capitán general de la flota gaditana Francisco marqués de Tilly. Cipriano Vimercati, director de estudios, describió la iconografía. Gaspar de Molina, marqués de Ureña, colocó esta lápida el 3 de octubre del año de la salvación del hombre de 1793)



# REALIZACIÓN DE LA ESCALA DE TIEMPO ESPAÑOLA.

Aunque desde sus inicios, la labor desarrollada en el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando ha tenido que ver con el transcurrir del tiempo y muchas de sus implicaciones, no es hasta enero de 1972 cuando se establece por primera vez una realización propia de una escala atómica. Ello coincide con la adquisición de los dos primeros patrones de haz de cesio del Centro, que se simultanea con la creación de la Sección de Hora del Observatorio.

El origen del Real Observatorio de la Armada, como el de tantos otros observatorios navales de los siglos XVII y XVIII, tuvo que ver con los problemas relacionados con la obtención, conservación y distribución de la hora del primer meridiano, tarea fundamental de éstos y gran parte de su razón de ser, hasta el punto de que en la primera piedra de su edificio principal, colocada en 1793, reza la siguiente frase (en latín):

*... proporcionarle el tiempo a los pilotos de los buques que observan las estrellas.*

En la actualidad, el laboratorio del Real Observatorio de la Armada es depositario del Patrón Nacional de Tiempo, realizando su propia escala de Tiempo Universal Coordinado (*UTC(ROA)*) que se emplea como base de la hora legal en todo el territorio nacional [74].

### 7.1. Situación de partida

La escala *UTC(ROA)* viene manteniéndose como tal desde enero de 1972, y constituye la base de la hora legal en España desde octubre de 1976 [75] conforme a la recomendación emanada de la XV Conferencia General de Pesas y Medidas, según la cual se sugiere el empleo del Tiempo Universal Coordinado como base de la hora legal.

Hasta la fecha, la conservación de la escala *UTC(ROA)* ha supuesto el mantenimiento de un número comprendido entre dos y siete patrones atómicos comerciales de haz de cesio –cinco en la actualidad–, localizados en un mismo habitáculo (originariamente en una sala situada en el ala de poniente del edificio principal, y desde verano–otoño de 1991 en su ubicación actual: la Sala de Patrones del edificio de la Sección de Hora) y sometidos al control de las condiciones ambientales:  $(23 \pm 1)^\circ\text{C}$  desde abril de 1997 ( $(21 \pm 1)^\circ\text{C}$  hasta esa fecha), y  $(60 \pm 10)\%$  de humedad relativa. La alimentación de los patrones se efectúa mediante un sistema redundante con etapa final a través de un transformador separador que proporciona la tensión de 220 voltios c.a. y otro compuesto de baterías que proporcionan 24 voltios c.c., que en conjunto preservan al equipo en caso de producirse un fallo en la red eléctrica. Además de ello, cada patrón dispone de baterías internas con capacidad para mantener el funcionamiento un tiempo mínimo añadido de 30 minutos en caso de necesidad.

Tradicionalmente, el control de los patrones se ha venido efectuando a partir de las lecturas directas de diferencias de fase–tiempo entre el patrón MC (*master clock*) seleccionado como referencia y cada uno de los patrones restantes. El procedimiento seguido en la realización de las lecturas, inicialmente “manual”, fue sustituido en poco tiempo por un nuevo procedimiento totalmente automático que en la actualidad se ejecuta en intervalos regulares de 15 minutos, además de realizar otras muchas funciones como la generación de “alertas” o la configuración de ficheros conforme a formatos preestablecidos para intercambio con otros laboratorios. Asimismo, periódicamente se efectúan las pruebas de verificación recomendadas por el fabricante como mantenimiento preventivo y para anticipar un eventual problema de funcionamiento.

A partir de las lecturas directas de diferencias de fase–tiempo, siempre empleando como referencia el MC, se efectuaba la evaluación de la estabilidad de cada patrón para un intervalo de tiempo de integración relativamente corto (cinco días), y una vez identificado el patrón de mayor estabilidad se le asignaba el estatus de MC, tomándose como base en la generación de *UTC(ROA)*.

La estabilidad de la escala *UTC(ROA)* ha venido siendo en buena medida la del *master clock*, viéndose perjudicada tan solo por los esporádicos desplazamientos de frecuencia aplicados con el fin de mantener un grado adecuado de conformidad entre la escala *UTC* y su realización en el Real Observatorio de la Armada. La escala *UTC(ROA)* puede considerarse como el resultado de aplicar una media ponderada (véase el apartado 3.1.) en la que los pesos relativos  $\omega_i$  son todos igual a cero, salvo el correspondiente al *MC* que toma como valor la unidad.

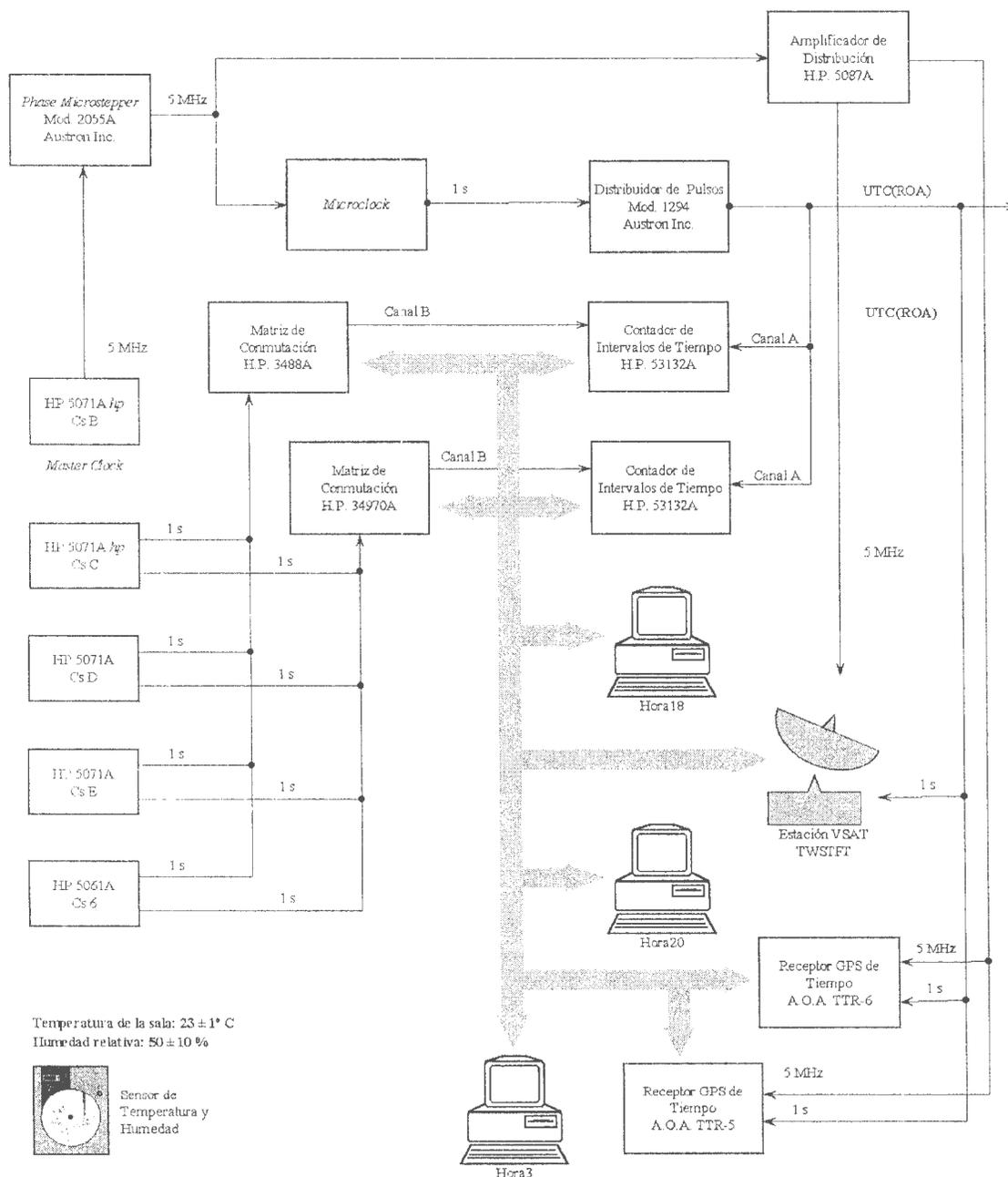


Figura 7.1: Disposición de equipos implicados en la generación de *UTC(ROA)* hasta fechas recientes.

La señal generada por el MC era posteriormente encaminada hacia un desplazador de fase y frecuencia (*phase microstepper*), dispositivo desde el que se gobierna la señal y que permite introducir tanto saltos de tiempo como separaciones sistemáticas de frecuencia respecto de la de entrada (única opción empleada). El desplazamiento intencionado en frecuencia se aplica para compensar cierta divergencia de la escala (respecto de UTC) detectada a partir de los diferentes sistemas de comparación a distancia disponibles en laboratorio, a saber: Transferencia de Tiempo y Frecuencia mediante Satélite y Doble Encaminamiento (TWSTFT) y GPS en modo Vista Común (GPS-CV).

La figura 7.1 muestra la disposición más reciente de los diferentes equipos implicados en la generación de la escala *UTC(ROA)*.

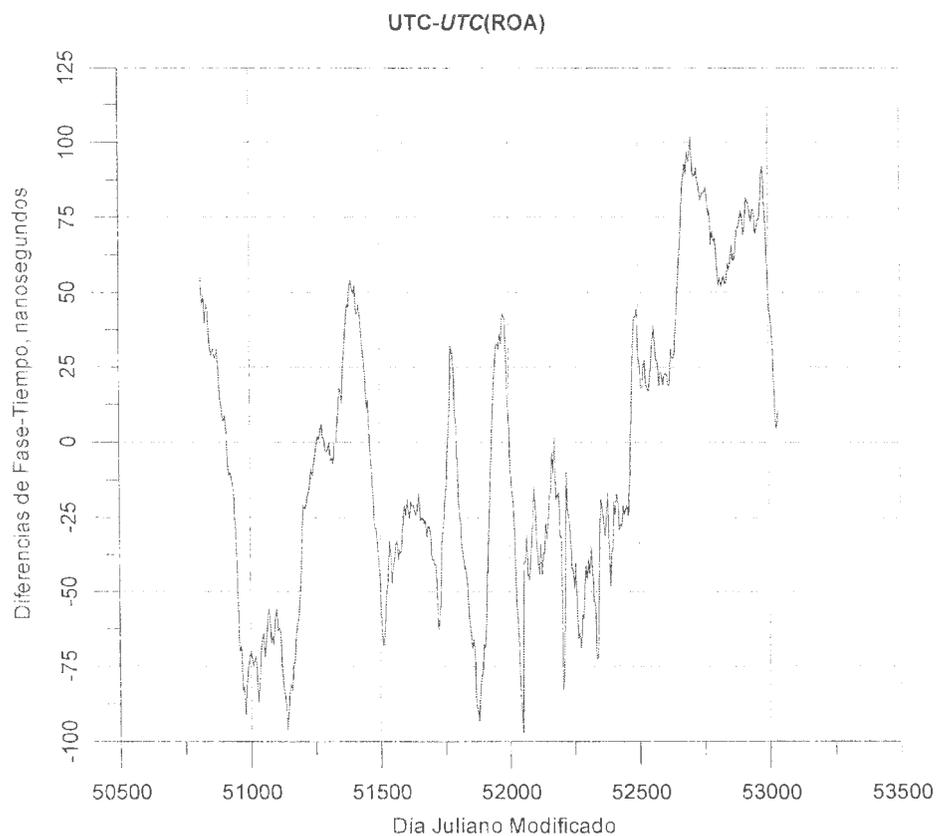
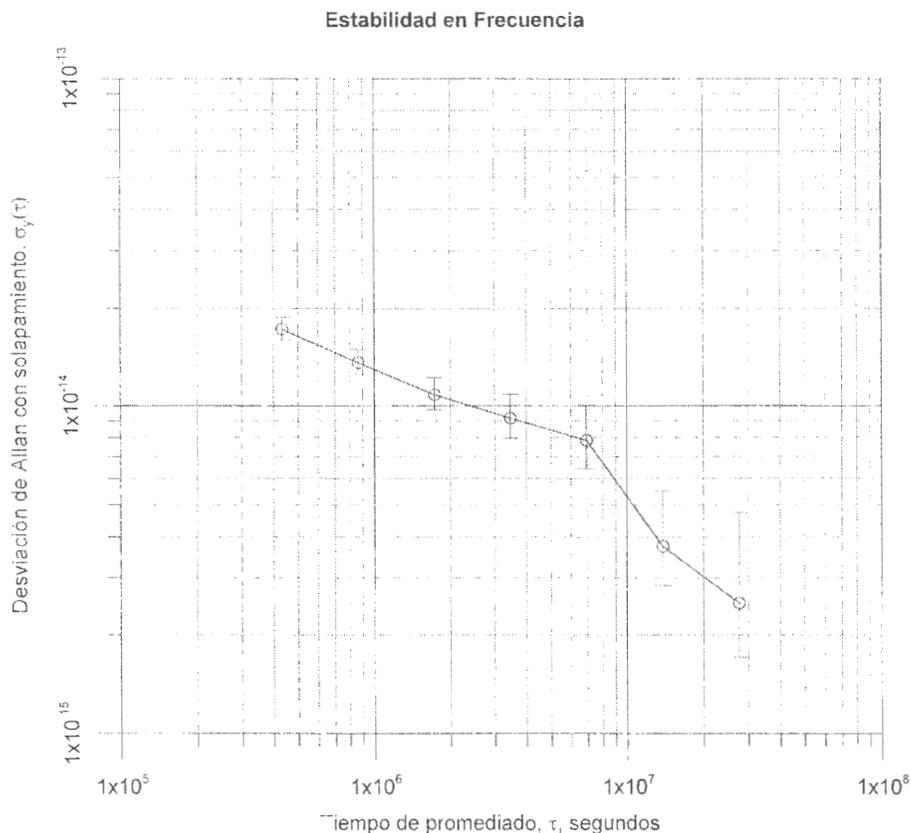


Figura 7.2: Diferencia entre las escalas UTC y *UTC(ROA)*, desde enero de 1998 hasta enero de 2004.

La figura 7.2 muestra la diferencia entre las escalas de tiempo UTC y *UTC*(ROA) durante los últimos años. En abscisas se recogen los días julianos modificados, en tanto que las ordenadas vienen expresadas en nanosegundos.



**Figura 7.3:** Estabilidad en frecuencia de *UTC*(ROA), relativa a UTC. Resultados basados en datos relativos al periodo comprendido entre enero de 1998 y enero de 2004.

La figura 7.3 muestra sobre un diagrama sigma-tau la inestabilidad en frecuencia de *UTC*(ROA) y su incertidumbre asociada ( $2\sigma$ ), relativa a UTC, para diferentes intervalos de tiempo de integración sobre la misma base de tiempos empleada en la figura 7.2.

En estos dos últimos gráficos se pone de manifiesto la dificultad que entraña mantener la exactitud de la escala *UTC*(ROA) conforme a la recomendación efectuada por el CCDS (duodécima asamblea, marzo de 1993) de encaminar los esfuerzos hacia la conservación de las realizaciones nacionales de la escala UTC con diferencias de fase-tiempo inferiores (en valor absoluto) a 100 nanosegundos respecto de la escala UTC, manteniendo a su vez un alto grado de estabilidad en la escala.

## 7.2. Consideraciones efectuadas en la realización de la nueva escala

Cuando se planteó acometer el presente trabajo de tesis, había un gran número de cuestiones cuya resolución se antojaba prioritaria dado que podría condicionar los sucesivos pasos a dar. Finalmente han habido aspectos, de antemano pasados por alto, pero que con el transcurso del tiempo han ido tomando una posición de interés en el desarrollo de los trabajos. Del mismo modo, se ha dado el caso de que habiéndose dado cierto énfasis a determinada materia, ha resultado ser intrascendente en el desarrollo final de la escala de tiempo.

Independientemente de los estudios realizados encaminados a la caracterización de patrones e instrumentación disponibles con el fin de justificar el uso y obtener el máximo rendimiento en futuras disposiciones, todo el esfuerzo se ha dirigido hacia el desarrollo de la herramienta matemática apropiada capaz de optimizar las características consideradas de mayor interés en una escala: estabilidad, exactitud y fiabilidad. Para ello se han identificado las variables que permiten optimizar las características anteriores, se ha caracterizado la escala como media ponderada de lecturas de fase-tiempo, se ha establecido el procedimiento de cálculo de los pesos relativos “óptimos”, se ha diseñado el modelo de señal y se han caracterizado los ruidos de la señal y del sistema de medida con el exclusivo fin de efectuar una predicción óptima de la marcha de cada reloj evitando con ello las discontinuidades en la escala propias de la redistribución de pesos, se han establecido criterios de validación de datos, y todo ello se ha dispuesto mediante procedimientos *software* que se ejecutan con regularidad.

La idea a la hora de implementar la nueva escala suponía la optimización de recursos con un mínimo gasto adicional en instrumentación. No obstante, finalmente se pudieron realizar determinadas inversiones en algún instrumento y equipo auxiliar cuya necesidad era indiscutible: un desplazador de fase y frecuencia controlable vía RS-232 (modelo HROG – 5, de Spectra Dynamics), dos nuevos sistemas de aire acondicionado para la Sala y Antesala de Patrones y sensores de temperatura y humedad con registro digital.

Una de las principales preocupaciones que suscitaba la posible correlación entre los valores de frecuencia media de cada reloj y la temperatura y humedad relativa de la sala [19, 24-32], debido principalmente a dos motivos: detección en estudios previos de cierta sensibilidad a las condiciones ambientales en determinados modelos de patrones

de haz de cesio (hoy obsoletos y en extinción) y presencia de componentes de carácter estacional en las marchas de modelos tales como los HP 5061 (modelo ampliamente extendido durante las décadas de los ochenta y noventa), ha quedado solventado al mejorar la característica de control de la temperatura y humedad relativa de la sala en la que se ubican los patrones; además de ello, en los últimos años se han ido sustituyendo los antiguos patrones HP 5061 de Hewlett Packard por los nuevos modelos 5071A de Agilent Technologies, que muestran mejor comportamiento que sus antecesores en todos los aspectos, en particular en cuanto a la sensibilidad a las condiciones ambientales. En la actualidad tan solo queda un patrón del modelo antiguo (HP 5061A) frente a cuatro patrones modernos.

Otros posibles estudios destinados a detectar de manera directa posibles correlaciones entre las marchas (frecuencias medias) de los relojes y la temperatura y humedad relativa ambientales no se llevaron a cabo dado que las conclusiones que resultaron del estudio de independencia entre relojes (apartado 3.3.) eran concluyentes, poniendo de manifiesto la escasa sensibilidad a estos parámetros.

### **7.3. El nuevo algoritmo para la realización de $TA(ROA)$**

El algoritmo propuesto consta de una serie de funciones diseñadas fundamentalmente en lenguaje *MATLAB* y en menor medida en lenguaje *C*, posteriormente trasladadas a formato *ejecutable*. Estas funciones se ejecutan con regularidad en un ordenador bajo sistema operativo *linux*, y en conjunto generan una “escala de papel” con información de diferencia de fase–tiempo respecto del *master clock* a intervalos de dos horas.

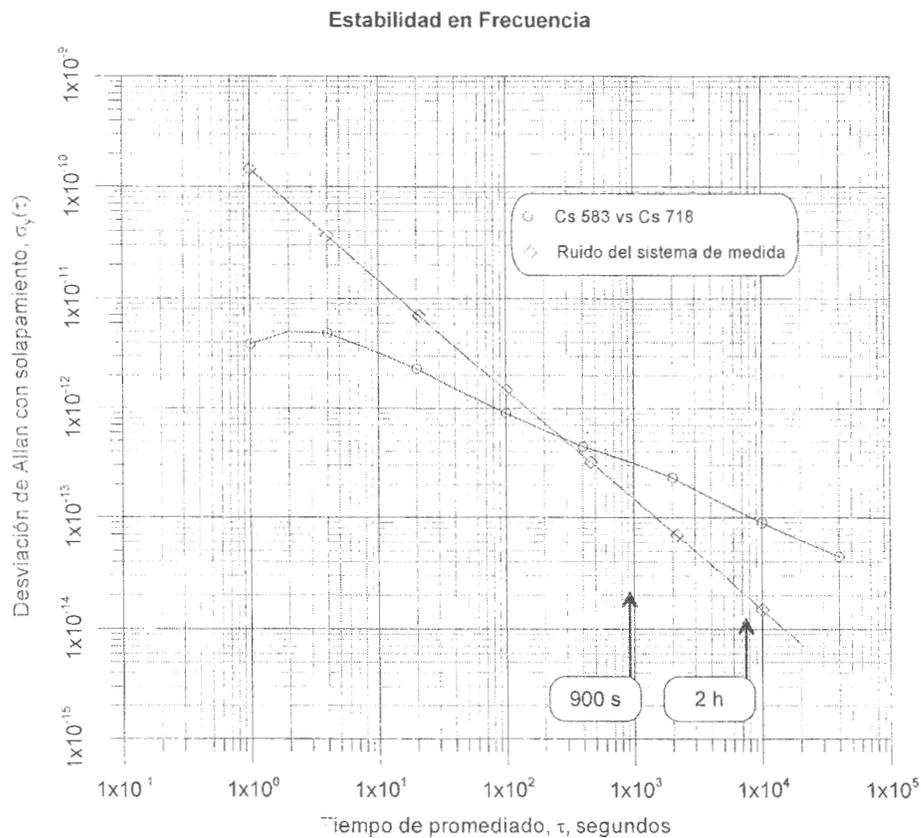
Las diferentes funciones empleadas se describen en los apartados siguientes.

#### **7.3.1 Adquisición de datos**

La adquisición propiamente dicha continúa efectuándose de la misma manera que se venía haciendo: dos ordenadores personales actúan como servidores de sendos sistemas de medida, tomando datos de diferencia de fase–tiempo entre el MC y cada uno de los restantes relojes; para ello, cada quince minutos (partiendo del minuto cero) gobiernan vía GPIB una matriz de conmutación que permite encaminar la señal apropiada a un canal de entrada del contador de intervalos de tiempo encargado de efectuar la medida. En el otro canal del contador está continuamente presente la señal procedente del MC.

El ruido introducido por el sistema de medida durante el proceso de la medición en intervalos de quince minutos no es lo suficientemente bajo, en comparación con la inestabilidad de cada pareja de relojes sometidos a la medida, y aunque este aspecto sería mejorable con otro tipo de contadores de mayor resolución, o empleando una técnica de medida más potente, lo cierto es que es solventable con tal de tomar un intervalo de tiempo mayor entre medida y medida. Este intervalo ha sido fijado en dos horas tal como se explica más adelante.

La figura 7.4 muestra la inestabilidad en frecuencia asociada a la pareja de patrones más estables disponibles en el laboratorio del Real Observatorio de la Armada (5071A *high performance* núms.: 583 y 718), ceducida a partir de una técnica de medida de muy bajo ruido (medida de diferencias de tiempo mediante doble batido –DMTDM–), en contraste con la inestabilidad apreciada en el sistema de medida. En este gráfico se pone de manifiesto el aspecto expresado en el párrafo anterior:



**Figura 7.4:** Comparativa entre la inestabilidad asociada a la pareja de patrones más estables en laboratorio y el ruido del sistema empleado.

El resultado de la medida queda almacenado en un fichero contenido en el propio servidor. La organización del conjunto de ficheros y el diseño de la estructura de éstos han sido cometidos efectuados para que la manipulación resulte racional y adecuada. Las lecturas efectuadas se realizan de manera redundante y permiten preservar la medida ante un eventual fallo en la ejecución del proceso de medida desde uno de los dos sistemas.

A intervalos regulares de dos horas (comenzando a las 0 h 1 min *UTC*(ROA) del día), un programa *ejecutable* se encarga de efectuar los accesos a los servidores de medidas automáticas, abriendo los ficheros correspondientes, identificando y capturando los datos aún no incluidos en el fichero de trabajo para el cálculo de *TA*(ROA): lecturas de diferencia de fase–tiempo entre el MC y cada reloj restante e información del MC en cada momento, y completando el fichero de trabajo antes de emprenderse nuevas acciones. Los datos incluidos en este fichero se refieren a instantes coincidentes con horas pares.

En principio, uno de los sistemas de medida es considerado a todos los efectos como de referencia o principal (Hora18), de modo que tan solo se accede al sistema suplente o auxiliar (Hora20) cuando se detecta un fallo en alguna de las medidas efectuadas desde Hora18.

### **7.3.2 Estima de varianzas absolutas**

Como continuación al proceso de adquisición, un programa *ejecutable* se encarga de comprobar si corresponde efectuar la estima de las varianzas (de *Allan*) absolutas. El cálculo se efectúa el último día del mes después de las doce horas *UTC*(ROA), a partir de las lecturas de diferencias de fase–tiempo almacenadas, previa selección de aquellas correspondientes a los últimos 365 días a cero y doce horas (730 datos como máximo por pareja de relojes incluyendo al MC).

El proceso de cálculo numérico ha sido explicado con suficiente detalle en el apartado 3.2., y se aplica para estimar los valores de varianza absoluta para un periodo de tiempo de integración  $\tau$  de veinte días.

Este intervalo de tiempo para el que finalmente quedará optimizada la escala conjunta ha sido seleccionado fundamentalmente por dos razones:

- Se trata de un múltiplo del intervalo de tiempo para el que regularmente el BIPM publica en su Circular T la información correspondiente a la diferencia entre las escalas UTC y cada una de sus realizaciones  $UTC(k)$  en laboratorios de tiempo nacionales. Esta información se refiere en la actualidad a las cero horas UTC de los DJM's acabados en 4 y 9.
- La Circular T se hace pública a mediados del mes siguiente al del periodo de tiempo a que afecta su contenido. Este retardo de acceso puede suponer que hayan transcurrido entre quince y cuarenta y cinco días sin que se disponga de información relativa a la diferencia existente entre UTC y su realización  $UTC(k)$ . La realización de un  $UTC(k)$  suficientemente próximo a la referencia, a pesar del acceso diferido, se verá facilitado si se sigue algún criterio de optimización de la estabilidad para un intervalo de tiempo comprendido entre los límites antes citados.

A las dos razones anteriores hay que añadir el hecho de que el aumento del intervalo de tiempo de integración seleccionado puede resultar poco práctico ya que requeriría bases de tiempo muy largas si se quieren estimar las varianzas absolutas con un orden de incertidumbre moderado.

El empleo de la varianza de *Allan* se justifica si se tiene en cuenta que, tal como fue expuesto en el apartado 2.3.5., ante la potencial presencia de fluctuaciones de carácter *flicker* de frecuencia para el intervalo de tiempo de integración seleccionado, la varianza clásica diverge, es decir, varía dependiendo del número de muestras empleado en la estima.

Del cálculo anterior se derivan las estimas de varianza absoluta, así como información indicativa de la longitud de la lista asociada a cada reloj sobre la que se han basado los cálculos. El número mínimo de datos permitidos asociados a determinado reloj se ha fijado en 420, correspondientes a los últimos siete meses; en tanto la serie se mantenga por debajo de este límite, el reloj no contribuirá a la escala media. En el apartado 7.3.3 se justificará esta elección.

Los nuevos valores de varianzas absolutas y de longitud de registros permanecen en vigor durante el mes siguiente al periodo en el que se basaron los cálculos, y se mantienen almacenados en sendos archivos históricos con identificación del año y mes en vigencia.

La figura 7.5 muestra el diagrama de flujo asociado al proceso de estima de las varianzas (de *Allan*) absolutas, que tiene lugar el último día del mes después de las doce horas.

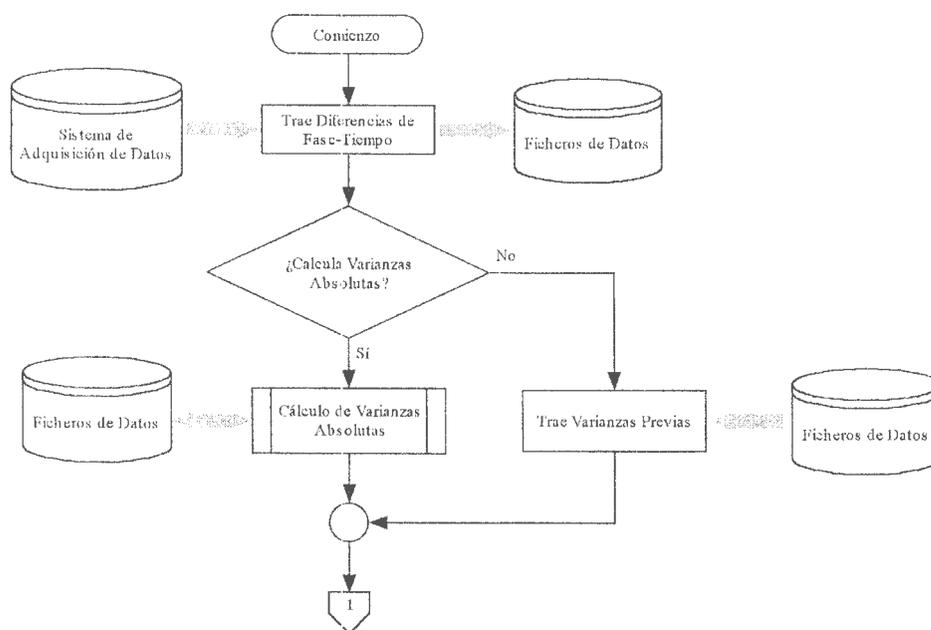


Figura 7.5: Diagrama de flujo asociado a los procesos de adquisición de datos y estima de varianzas (de *Allan*) absolutas.

### 7.3.3 Varianzas absolutas y ponderación óptima

Los valores de varianza absoluta están ligados matemáticamente a los pesos relativos de acuerdo con la expresión (3.68). No obstante, esta relación no es definitiva por diferentes razones que se expondrán a continuación y que tienen que ver, por una parte, con la bondad en la estima de las varianzas, y por otra, con la conveniencia de crear una escala sin excesiva dependencia de un solo reloj.

### Bondad en la estima de la varianza asociada a cada reloj

Una de las cuestiones pendientes de este trabajo de tesis, por ir más allá de los objetivos perseguidos, es la evaluación de la incertidumbre asociada a la estima de cada varianza absoluta. No obstante, se ha procurado precisar la manera en que la longitud de lecturas de diferencia de fase-tiempo entre parejas de relojes podría influir en la calidad de la estima de la varianza absoluta asociada a cada reloj.

Para ello, se ha acudido a la teoría expuesta en el apartado 2.3.2, determinándose el error relativo cometido en cada varianza ante la presencia de ruidos de carácter blanco y *flicker* de frecuencia (los presumidos en intervalos de tiempo de integración de 20 días), en el supuesto de que las incertidumbres relativas asociadas a las estimas de las varianzas absolutas sean idénticas a las correspondientes de las varianzas relativas.

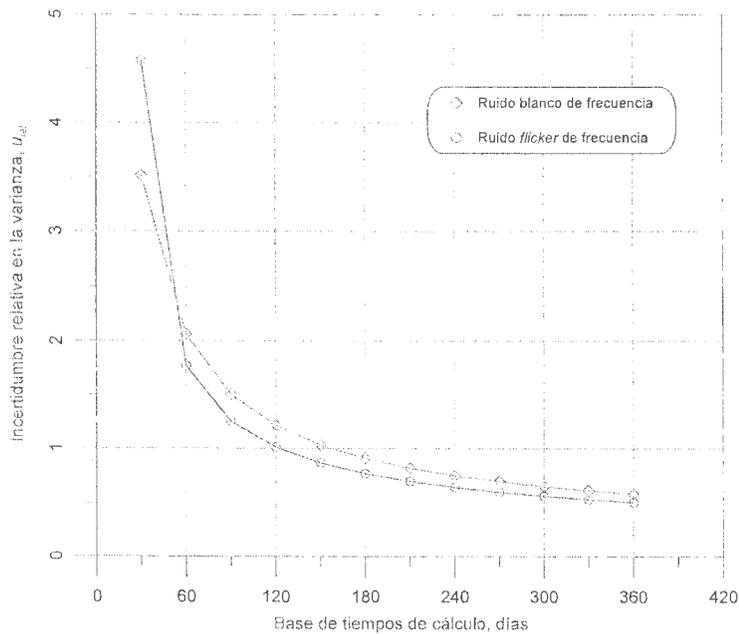
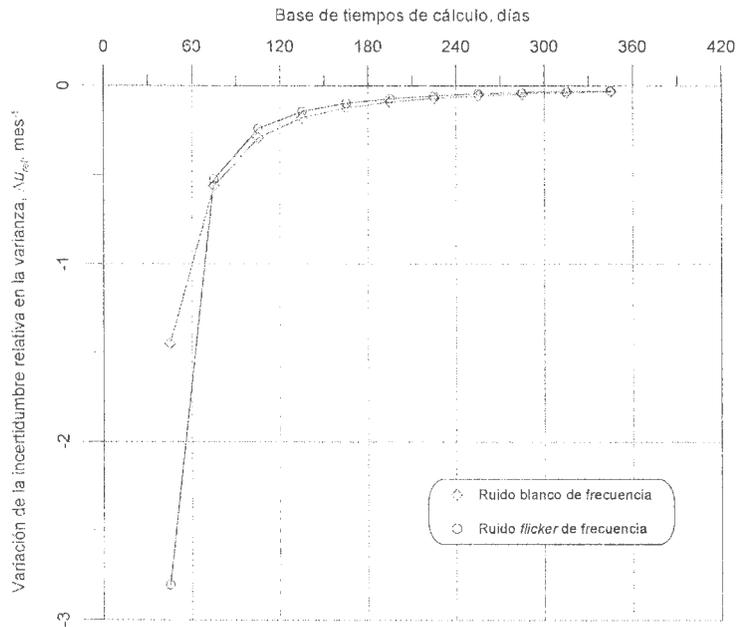


Figura 7.6: Incertidumbre relativa asociada a la estima de la varianza absoluta, en función de la base de tiempos en que se ha basado el cálculo.

De la expresión (2.24) se deduce para el caso más pesimista (intervalo de confianza inferior) la siguiente desigualdad:

$$(7.1) \quad u_{rel} = \frac{\delta \sigma_y^2}{\sigma_y^2} = \frac{s_y^2 - \sigma_y^2}{\sigma_y^2} < \frac{\chi^2(0.95) - \nu}{\nu}$$

Esta expresión nos permite identificar en qué medida se deteriora la bondad de la estima al disminuir el número de muestras; así, en las figuras 7.6 y 7.7 se han representado respectivamente los valores de  $u_{rel}$  y sus primeras diferencias ( $\Delta u_{rel}$ ), frente a los periodos de tiempo en los que se han basado los cálculos de las estimas.



**Figura 7.7:** Variación de la incertidumbre relativa asociada a la estima de la varianza absoluta, en función de la base de tiempos en que se ha basado el cálculo.

La elección de 420 como mínimo número de lecturas relativas a pares de relojes, correspondientes a 210 días (7 meses), se debe a que para tal valor la magnitud de la incertidumbre relativa se mantiene moderada incluso para el caso de predominancia de ruido *flicker* de frecuencia. Además de ello, la variación de la incertidumbre relativa en el rango comprendido entre 210 y 365 días es bastante lineal e incluso podría asumirse constante a efectos prácticos.

La compensación aplicada a los pesos absolutos  $W_i$  (inversas de las varianzas) viene dada por el coeficiente  $\kappa_i$ , deducido a partir de los gráficos anteriores, y cuya expresión empírica es:

$$\kappa_i = \frac{[0.5 + (L_i - 420)0.2]}{0.7(730 - 420)} \quad i = 1, \dots, N \quad (7.2)$$

en la que  $L_i$  representa la longitud de lista asociada a cada reloj sobre la que se han basado los cálculos.

Y los pesos absolutos empleados quedan por el momento del siguiente modo:

$$(7.3) \quad v_i = \kappa_i W_i \quad i = 1, \dots, N$$

### ***Ponderación óptima***

Tal como se dedujo en los apartados 3.1. y 3.4., asumida la hipótesis de independencia entre relojes, los pesos relativos en la realización de una escala conjunta se expresan en función de los valores de varianzas absolutas según (3.5). Asimismo, las estimas de estos pesos pueden calcularse indistintamente mediante (3.6) o (3.68).

Si se define un vector de validación de pesos  $\mathbf{v}$  como aquél cuyas componentes  $v_i$  valen la unidad cuando el reloj  $i$ -simo ha sido incluido en la escala, o cero si éste ha sido excluido intencionadamente o como consecuencia del proceso de validación que se verá mas adelante, los pesos relativos vendrán determinados por la expresión matricial:

$$(7.4) \quad \hat{\omega} = \frac{\mathbf{\Pi}_D \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{\Pi}_D \cdot \mathbf{u}}$$

En la que  $\mathbf{u}$  es un vector columna de  $N$  términos iguales a la unidad, y  $\mathbf{\Pi}_D$ , una matriz diagonal de orden  $N$  cuyos elementos se deducen de:

$$(7.5) \quad \Pi_i = v_i v_i = v_i \kappa_i W_i \quad i = 1, \dots, N_i$$

### ***Ponderación óptima y peso límite***

Frente a las conclusiones extraídas de la aplicación de la teoría de máximos y mínimos, está la conveniencia de recurrir a consideraciones de carácter práctico, que preserven alguna otra cualidad característica de la escala además de la estabilidad previamente

optimizada. El hecho de que determinado reloj sea muy estable, en comparación con los restantes, implicaría una contribución muy importante a la escala media. La excesiva influencia de determinado reloj en la definición de la escala media podría traer consigo consecuencias nefastas, pues cualquier trastorno imprevisto en su funcionamiento llevaría a la degradación de su calidad y la de la escala, especialmente sensible a la marcha de ese reloj.

El establecimiento de un límite en la aportación de cada reloj a la escala media debe entenderse como un artificio empleado para garantizar la fiabilidad, así como la estabilidad y exactitud, en caso de avería.

Cabe comentar que los conceptos de estabilidad óptima y de peso límite pueden llegar a ser incompatibles, pues la imposición del límite máximo sobre los pesos puede llevar a la realización de una escala más inestable que algunos de los relojes del conjunto.

El peso relativo límite en la escala  $TA(ROA)$  ha sido establecido en 0.65.

#### **7.3.4 Predictor *KALMAN***

La necesidad de estimar la frecuencia media de cada reloj  $H_i$ , relativa a la escala  $TA$ , tiene que ver con la exigencia de preservar la continuidad de la escala, tanto en tiempo como en frecuencia, cuando se produce una redistribución de pesos (Véase el apartado 4.1.). La técnica empleada para efectuar la predicción se ha basado en el modelo *KALMAN*, desarrollado en el apartado 4.2.2., e implementado una vez establecidas las magnitudes de los diferentes parámetros que toman parte en el modelo.

En cada iteración, una vez prefijados los pesos relativos con que contribuirán los relojes a la escala conjunta, se calculan sucesivamente la ganancia del predictor (4.34), el predictor óptimo (4.33), y su error cuadrático medio (4.35). Estos parámetros servirán a su vez de base en el cálculo de la predicción para instantes posteriores.

Los parámetros integrantes del filtro están sometidos a ajustes al margen de la transformación dinámica propia del proceso recursivo. Estos ajustes tienen lugar en los siguientes casos:

- Todos los primeros días de cada mes a 0 h UTC(ROA), tras estimarse la estabilidad en frecuencia de cada reloj, relativa a la escala TA(ROA), para tiempos de integración de dos horas sobre la base de datos del mes anterior. Estas estimas son parte integrante de la matriz de covarianza asociada al ruido del sistema (4.30).
- Ante un cambio en la instrumentación empleada en la medida, que implique una variación en la magnitud del ruido asociado al proceso de medida (4.32).
- Cuando existe redistribución de pesos respecto de aquellos que resultaron en el cálculo previo; pues como se verá en breve, el cambio afecta a la matriz de covarianza asociada al ruido del sistema.

En cuanto al establecimiento de las condiciones iniciales, cabe subrayar como ha sido determinada la matriz de covarianza del error en la predicción: esta matriz, indicativa del error cuadrático medio en el predictor *KALMAN*, y la matriz de covarianza del error en el filtro *KALMAN* -  $\mathbf{P}[k]$ -, están relacionadas de la siguiente manera:

$$(7.6) \quad \mathbf{P}[k|k-1] = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{P}[k-1] \cdot \mathbf{\Phi}^T + \mathbf{Q}[k-1]$$

Así, la matriz  $\mathbf{P}[1|0]$  de error cuadrático medio del predictor queda determinada mediante (7.6), una vez fijadas las matrices de transición y de covarianza asociada al ruido del sistema, y tomando como valor de  $\mathbf{P}[0]$  el expuesto en (7.7), en la que  $\sigma_{0i}^2$  y  $\sigma_i^2$  representan respectivamente las varianzas asociadas al ruido blanco de fase introducido por el sistema de medida (nanosegundo<sup>2</sup>) y al blanco de frecuencia propio del sistema (nanosegundo<sup>2</sup>·día<sup>-2</sup>).

$$(7.7) \quad \mathbf{P}_{2N \times 2N}[0] = \begin{bmatrix} \sigma_{01}^2 & 0 & & & & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & & & & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & \\ & & & \sigma_{0i}^2 & 0 & & \\ & & & 0 & \sigma_i^2 & & \\ & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & & & & & \sigma_{0N}^2 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & 0 & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

La distribución de pesos es pieza clave en el proceso de la predicción, pues dado que el vector de observación, al igual que los términos impares del vector de estado, están constituidos por las lecturas de diferencia de fase–tiempo entre la escala media y cada reloj:  $x^i = TA - X^i$ , y que las medidas reales han sido realizadas entre el *master clock* y cada uno de los relojes restantes:  $\xi^i = MC - X^i$ , el modo en que el ruido en la medida real (constituido fundamentalmente por la resolución del contador de intervalos y cuya varianza se designará como  $\sigma_0^2$ ) afecta al vector ruido en la medida y su matriz de covarianza puede deducirse a partir de la teoría de propagación de errores. Definidos  $x^i$  y  $\xi^i$  como se mostró previamente en este párrafo, la relación entre cada valor  $x^i$  y el conjunto de valores  $\xi^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se deduce fácilmente con la ayuda de (3.1):

$$x^i = \xi^i - \sum_{j=1}^N \omega_j \xi^j \quad i = 1, \dots, N \quad (7.8)$$

Y a partir de (7.8) se alcanzan los diferentes coeficientes de sensibilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^i} &= 1 - \omega_i \\ \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} &= -\omega_j, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (7.9)$$

de donde resulta la siguiente expresión para las varianzas combinadas  $\sigma_{0i}^2$ :

$$\sigma_{0i}^2 = \zeta_i \sigma_0^2 = \left(1 + \sum_j \omega_j^2 - 2\omega_i\right) \sigma_0^2 \quad i = 1, \dots, N \quad (7.10)$$

### 7.3.5 Validación de pesos

La manera en que el algoritmo evalúa la bondad en el comportamiento de cada reloj durante la ejecución se basa en el control y actualización de un vector designado como “de validación”. Este vector se compone de valores unidad o nulos, dependiendo de que el reloj que tiene asignada esa componente esté o no contribuyendo a la escala conjunta en determinado instante. Los vectores guardan a su vez información del instante al que

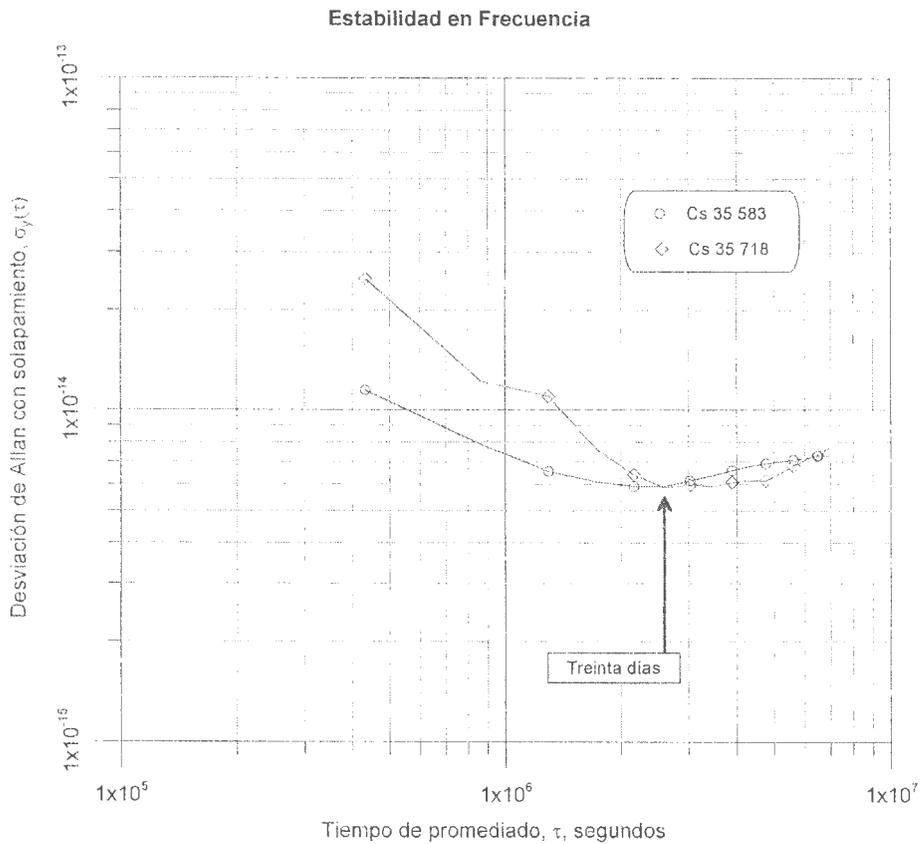
hacen referencia, y forman parte de un fichero histórico para constancia y evaluación de cualquier comportamiento extraño acaecido.

El vector de validación toma inicialmente los valores que resultaron en la iteración anterior, y tan solo sufre modificaciones si se da una de las siguientes condiciones:

- Se ha habilitado el alta de un reloj a través de una “bandera” de alta, que proporciona esta información al algoritmo, y existe solución para la estima de varianza absoluta asociada al mencionado reloj. En dicho caso, la componente correspondiente del vector de validación toma el valor unidad.
- La diferencia entre la frecuencia media del reloj  $i$ -ésimo, relativa a la escala  $TA$ , en los últimos treinta días ( $y_{30d}^i$ ), y la de dicho reloj, relativa a la escala  $TA$ , en las últimas dos horas ( $y_{02h}^i$ ), se mantiene superior en valor absoluto a  $3\sigma_{lim i}$ .

La primera condición parece obvia, y obliga a que una vez que se ha privado a un reloj de participar en la elaboración de la escala, solo pueda volver a integrarse por decisión ajena al algoritmo, una vez subsanadas las causas que provocaron su salida.

Respecto a la segunda condición, es bastante conservadora, y ello se justifica porque el número de relojes que constituyen la batería de patrones del laboratorio del Real Observatorio de la Armada es reducido, por lo que se ha optado por extraer un reloj solo cuando realmente se deduzca de su comportamiento que algo serio marcha mal. La elección de  $y_{30d}^i$  como parámetro de referencia en la comparación se debe a la predominancia de ruido *flicker* de fondo en torno a este intervalo de tiempo de integración; ello supone que cualquier medida de frecuencia media sobre la base de tiempos de treinta días será mucho más estable que cualquier otra medida en otro rango. A modo de muestra, se acompaña la figura 7.8 en la que se han representado las inestabilidades en frecuencia de los dos patrones más estables del Real Observatorio de la Armada, referidas al UTC:



**Figura 7.8:** Estabilidad en frecuencia de patrones referidos al UTC.

Los parámetros  $\sigma_{\text{lim}i}$ ,  $i=1, \dots, N$ , se deducen una vez conocida la distribución de pesos, pues al igual que en la deducción del ruido en la medida, la inestabilidad en los valores de frecuencia relativos a la escala media puede derivarse de la inestabilidad que el fabricante da, en términos absolutos, aplicando nuevamente la teoría de propagación de errores. A partir de las relaciones (3.1) y  $x^i = TA - X^i$ , se deduce la siguiente expresión:

$$x^i = \sum_{j=1}^N \omega_j X^j - X^i \quad i=1, \dots, N \quad (7.11)$$

De esta expresión se deducen los distintos coeficientes de sensibilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial X^i} &= \omega_i - 1 \\ \frac{\partial x^i}{\partial X^j} &= \omega_j, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (7.12)$$

y las inestabilidades en frecuencia relativas a la escala media quedan expresadas finalmente del siguiente modo:

$$(7.13) \quad \sigma_{\text{lim } i} = \sqrt{\sum_j \omega_j^2 \sigma_{\text{fab } j}^2 + (1 - 2\omega_i) \sigma_{\text{fab } i}^2} \quad i = 1, \dots, N$$

Cada parámetro  $\sigma_{\text{fab } i}$  se refiere al valor de desviación de *Allan* especificado por el fabricante para ese modelo de patrón en un tiempo de integración de dos horas.

La elección de un “factor de cobertura” igual a 3, cuando la inestabilidad en los relojes muestra un carácter *gaussiano*, supone que el rechazo se produce cuando el valor de frecuencia media relativa al *TA*, observado en las dos últimas horas, se encuentra fuera del intervalo de confianza para el que en condiciones normales hubiera existido una probabilidad del 99.73% de caer dentro de él.

La figura 7.9 muestra el diagrama de flujo asociado a los procesos de ponderación, predicción y validación (apartados 7.3.3. a 7.3.5):

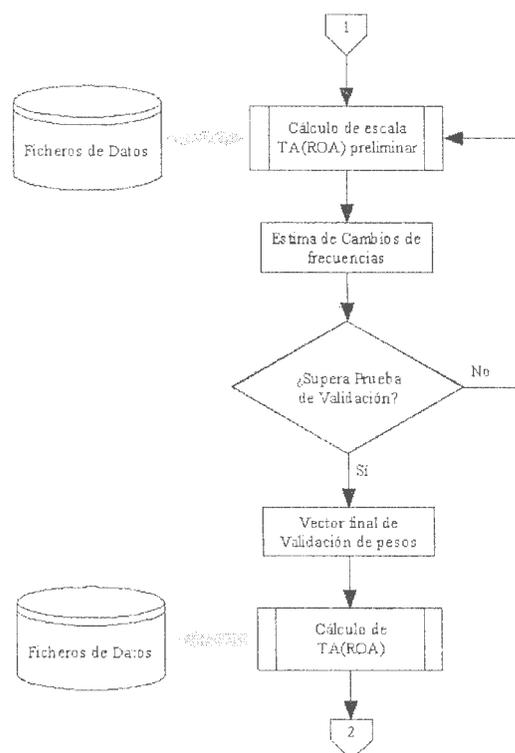


Figura 7.9: Diagrama de flujo asociado a los procesos de ponderación, predicción y validación.

### 7.3.6 Proceso de cálculo de la escala

Transcurrido un periodo transitorio de 30 días, en el que los pesos relativos asociados a los relojes se mantuvieron constantes, y durante el cual se determinaron las diferencias de fase–tiempo entre la escala media y cada reloj a intervalos de dos horas, el vector de estado de partida para el predictor *KALMAN* y la estabilidad en frecuencia de cada reloj (relativa a la escala  $TA(ROA)$ ) para tiempos de integración de dos horas; todos los días, a intervalos regulares de dos horas (comenzando a las 0 h 1 min  $UTC(ROA)$  del día), se realizan secuencialmente las siguientes tareas:

1. A partir de los registros efectuados por los sistemas de medida, se actualiza el fichero de trabajo para el cálculo de  $TA(ROA)$ .
2. Se corrigen los saltos intencionados de fase que pudieran acarrear discontinuidad en la escala.
3. El día 1 de cada mes a 0 h  $UTC(ROA)$ , se vuelve a estimar la estabilidad en frecuencia de cada reloj, relativa a la escala  $TA(ROA)$ , para tiempos de integración de dos horas.
4. Se crea el vector de validación actual a partir de la unión lógica del vector de altas y el vector de validación en el instante previo.
5. Partiendo del vector de validación actual, y de los valores de varianza (de *Allan*) absoluta en vigor, se efectúa un cálculo preliminar de los pesos.
6. Se determina la matriz de covarianza asociada al ruido del sistema.
7. Si ha habido variación en el ruido del sistema de medida, se actualizan las matrices de covarianza asociada al ruido en la medida y de error cuadrático medio del predictor.
8. Si ha variado la distribución de pesos, se actualizan las matrices de covarianza asociada al ruido en la medida y de error cuadrático medio del predictor.
9. Se efectúa la media ponderada, y se determinan las diferencias de fase entre la escala  $TA$  y cada reloj  $H_i$ .
10. Se aplica la condición de validación y, siempre que se efectúe el descarte de un reloj y una vez actualizado el vector de validación, se reiteran las acciones establecidas por los puntos 5, 6, 8, 9 y 10.
11. Se calculan la ganancia del predictor, el predictor óptimo y su error cuadrático medio.

Previamente, otro programa ejecutable determina si corresponde efectuar la estima de las varianzas (de *Allan*) absolutas que estarán en vigor durante un mes, y calcula estas estimas una vez confirmado que dispone de los datos necesarios para ello.

La escala atómica así definida es una escala libre en la que se ha optimizado la estabilidad para un tiempo de integración de veinte días; la marcha de la escala es ahora más estable, pero nada puede decirse hasta este momento de la exactitud.

Dado que se ha establecido un punto de partida para este nuevo algoritmo en el DJM 52499 (13 de agosto de 2002) a 12 h, fecha en que determinados problemas relacionados con la alimentación de equipos y el control de las condiciones ambientales en el laboratorio pusieron en peligro la integridad de la batería de patrones, se han hecho coincidir las diferencias de fase-tiempo y de frecuencia entre las escalas TAI y TA(ROA) en el instante de partida con sus correspondientes entre UTC y UTC(ROA) extrapolados desde los instantes previos hasta ese justo momento. El desplazamiento de fase introducido es de 7604.1 nanosegundos, en tanto el de frecuencia es de  $18.6752 \text{ nanosegundos}\cdot\text{día}^{-1}$ .

Como resultado final, este algoritmo devuelve información del DJM, la hora del día, y la diferencia de fase-tiempo entre la escala atómica TA(ROA) y el *master clock* (en nanosegundos).

Las figuras 7.10 y 7.11 permiten apreciar la mejora alcanzada desde el punto de vista de la estabilidad. La primera de ellas muestra la inestabilidad en frecuencia de TA(ROA), relativa al TAI, y de UTC(ROA), relativa a UTC, para diferentes intervalos de tiempo de integración sobre la misma base de tiempos empleada en la figura 7.11. Cabe significar que las barras de error representan una incertidumbre expandida correspondiente a un nivel de confianza del 95% ( $2\sigma$ ); y que presentan un tamaño considerable por el momento, ya que se dispone de un número de muestras limitado por el tiempo transcurrido desde la fecha establecida como punto de partida del algoritmo.

Observe la razón existente entre las estimas de las desviaciones de *Allan* para diferentes intervalos de tiempo de integración: aunque para intervalos de tiempo

comprendidos entre 5 y 10 días, la razón  $\rho(\tau) = \sigma_y^{\text{TAI-TA(ROA)}}(\tau) / \sigma_y^{\text{UTC-UTC(ROA)}}(\tau)$  es ligeramente superior a la unidad, para el intervalo de tiempo elegido de optimización de la estabilidad se alcanza un valor  $\rho(\tau = 20 \text{ días})$  algo inferior a la unidad, que por otra parte es consistente con los resultados teóricamente esperados, pues ante la hipótesis de independencia entre patrones, la estima de la matriz de covarianza de los relojes  $\hat{\mathbf{R}}_D$ , y el teorema de *Gauss-Markov* llevan a estimar la covarianza (en el caso que nos ocupa: varianza) de la escala conjunta *TA*, mediante la siguiente expresión:

$$\text{Cov}[TA] = \sigma_{TA}^2 = (\mathbf{u}^T \cdot \hat{\mathbf{R}}_D^{-1} \cdot \mathbf{u})^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \hat{r}_{ii}} \quad (7.14)$$

con  $\mathbf{u}$  representando a un vector columna de  $N$  términos.

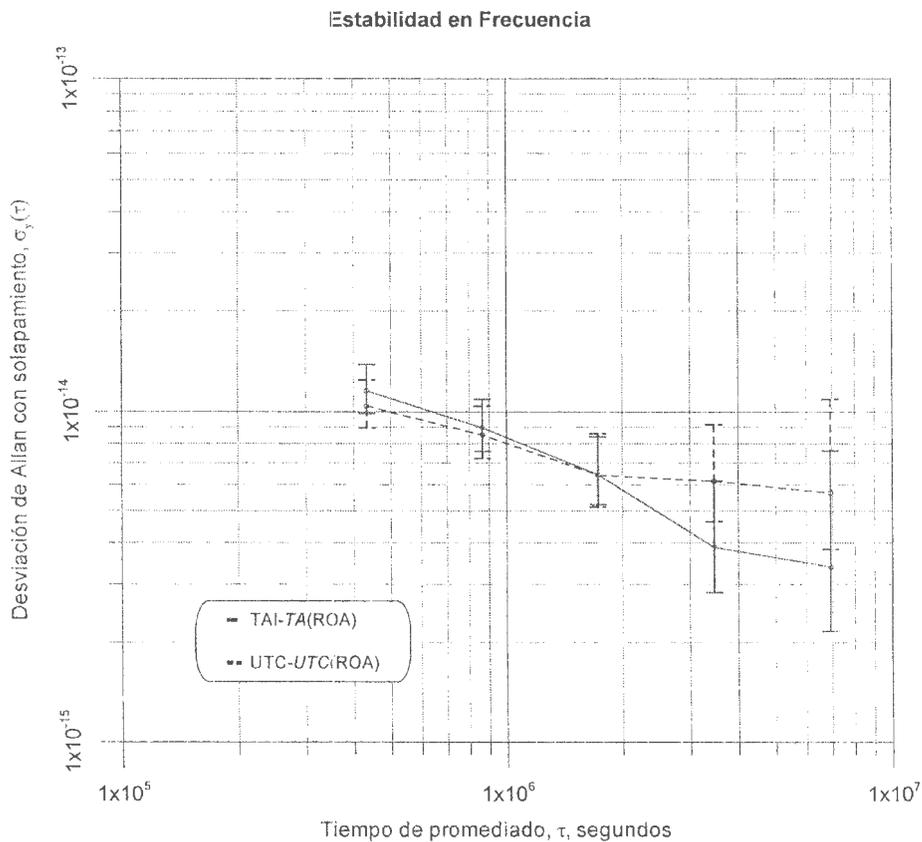


Figura 7.10: Comparativa entre las inestabilidades asociadas a las escalas *TA(ROA)* y *UTC(ROA)*, referidas al TAI (UTC).

Empleando como estimas de las desviaciones de *Allan* de cada uno de los cinco relojes, para un intervalo de tiempo de integración de 20 días, las que resultan del cálculo de inestabilidad de cada reloj, relativo al TAI:  $6.51 \times 10^{-15}$ ,  $7.83 \times 10^{-15}$ ,  $1.68 \times 10^{-14}$ ,  $1.41 \times 10^{-14}$  y  $4.64 \times 10^{-14}$ ; la desviación de *Allan* de *TA* una vez aplicado (7.14) resulta ser  $4.52 \times 10^{-15}$ , lo cual es algo inferior al valor obtenido a partir de las diferencias de fase-tiempo TAI-*TA*(ROA):  $6.46 \times 10^{-15}$ , si bien son datos consistentes si se tienen en cuenta las incertidumbres asociadas, aun significativa, en ambos casos.

La mayor estabilidad en *TA*(ROA) para tiempos de integración medios-largos se pone de manifiesto en la figura 7.11. Obsérvese como la nueva escala “absorbe” las pronunciadas discontinuidades en frecuencia que presenta *UTC*(ROA) en los DJM’s 52559, 52619, 52704, 52819 ó 52979.

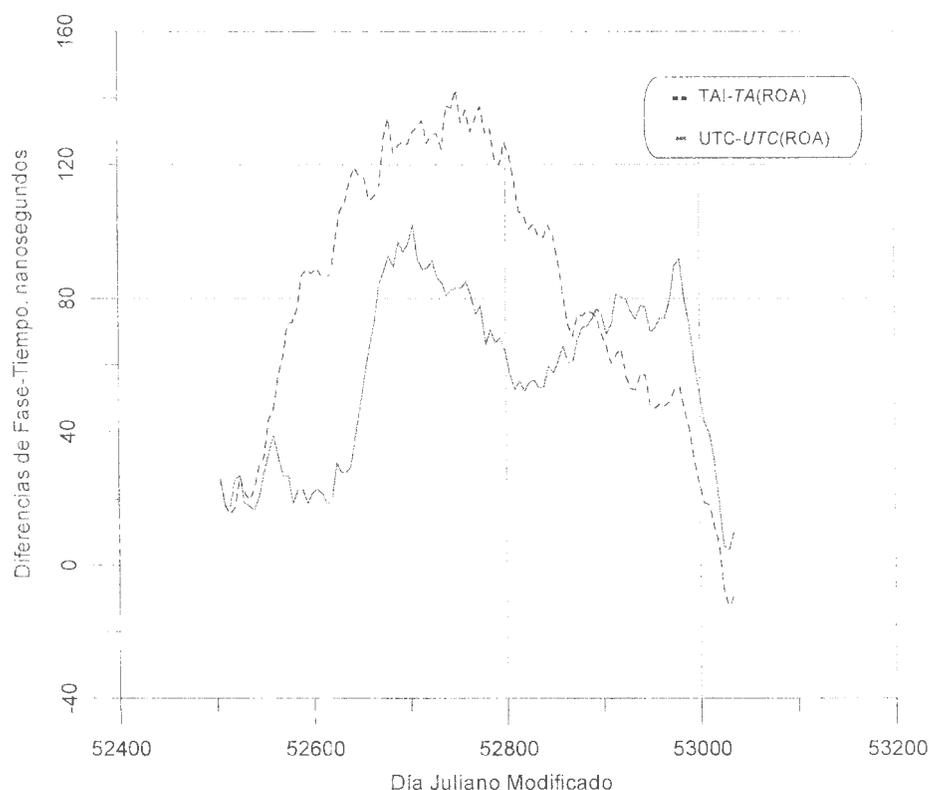


Figura 7.11: Diferencia entre las escalas UTC y *UTC*(ROA), y entre las escalas TAI y *TA*(ROA), desde agosto de 2002 hasta enero de 2004.

#### 7.4. Disciplinado de *TA*(ROA): la nueva escala *UTC*(ROA)

Los problemas derivados del acceso diferido a la escala UTC han sido tratados con la profundidad requerida en el capítulo 5. La solución adoptada pasa por la realización de

la predicción conforme a un simple predictor lineal basado en la media móvil (cociente incremental) de las diferencias de fase-tiempo  $x_{UTC(ROA)} = UTC - UTC(ROA)$ , previa eliminación del disciplinado para recuperar el proceso  $u_{UTC(ROA)}$  de segundas diferencias con carácter estacionario, sobre la base de un intervalo de tiempo  $T = 55$  días.

Para el intervalo de tiempo de predicción  $T_{predicción} = T = 55$  días, el error rms estimado será (5.6):  $\varepsilon(T = 55 \text{ días}) \approx 22.4 \text{ ns}$ .

El algoritmo de disciplinado propuesto ha sido diseñado en lenguaje *MATLAB* y posteriormente trasladado a formato *ejecutable*. Este algoritmo se ejecuta el día 25 de cada mes a 0 h *UTC(ROA)*, con posterioridad a la ejecución del algoritmo de cálculo de *TA(ROA)*. El algoritmo requiere el conocimiento de las diferencias de fase-tiempo entre *UTC* y *UTC(ROA)*, publicadas por la Sección de Tiempo del BIPM en su Circular T, correspondientes a las 0 h *UTC* de los DJM's acabados en 4 ó 9 y comprendidos en el mes previo al de cálculo. Este algoritmo genera un fichero que contiene la siguiente información:

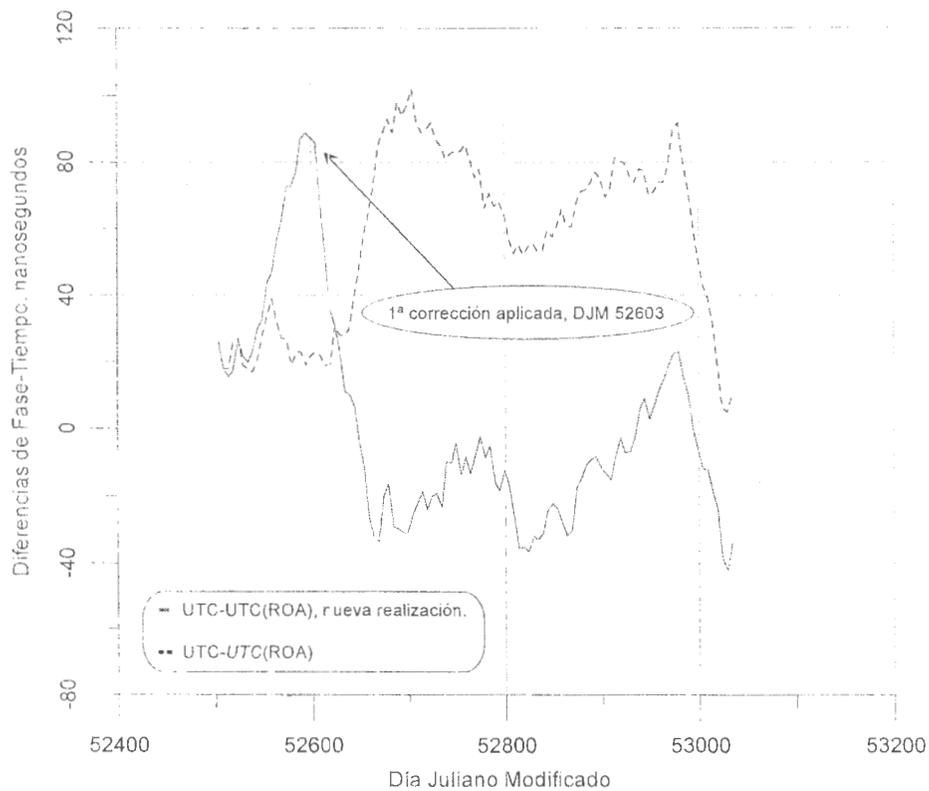
- Referencia a la fecha en que se aplica una nueva corrección sobre *UTC(ROA)*:  $t_{disc.}$ .
- Predicción de la diferencia de fase-tiempo en el instante de aplicación de la corrección:  $\hat{x}_{UTC(ROA)}(t_{disc.})$ .
- Corrección aplicada en ese instante (en unidades de ns/d):  $g_{UTC(ROA)}(t_{disc.})$ .
- Corrección acumulada hasta ese instante (en unidades de ns/d).

La corrección  $g_{UTC(ROA)}$  a aplicar en cada instante de disciplinado  $t_{disc.}$  no será finalmente la que haga  $\hat{x}_{UTC(ROA)}(t_{post.disc.}) = 0$ . En su lugar, y tras efectuar diferentes pruebas sobre procesos simulados que combinan ruido blanco y camino aleatorio de frecuencia en las mismas proporciones que *TA(ROA)*, se ha optado por tomar  $g_{UTC(ROA)}$  tal que  $\hat{x}_{UTC(ROA)}(t_{post.disc.}) = \ell \cdot \hat{x}_{UTC(ROA)}(t_{disc.})$ , con  $\ell = 0.35$ . Con esta modificación se consigue suavizar el disciplinado que da exactitud a *UTC(ROA)*, reduciendo la aportación de inestabilidad propia del proceso de disciplinado. Con esta nueva consideración, la ecuación (5.4) queda como sigue:

$$(7.15) g_{UTC(ROA)}(t_{disc.}) = -\frac{1}{T_{disc.}} \left\{ (1-\ell)x_{UTC(ROA)}(t_i) + [(1-\ell) \cdot T_{retardo}^{UTC(ROA)} + T_{disc.}^{UTC(ROA)}] y(t_i, T) \right\}$$

Este algoritmo se viene aplicando sobre la nueva escala  $TA(ROA)$  desde que existen datos suficientes para efectuar la primera predicción. La primera y sucesivas correcciones se aplican los días 25 de cada mes a 0 h  $UTC(ROA)$ , desde el mes de noviembre de 2002.

Los resultados obtenidos se exponen en la figura 7.12. En esta figura se pone de manifiesto como, obviando el periodo transitorio que tiene lugar entre los días 52603 y 52664, la escala  $UTC(ROA)$  converge hacia UTC.

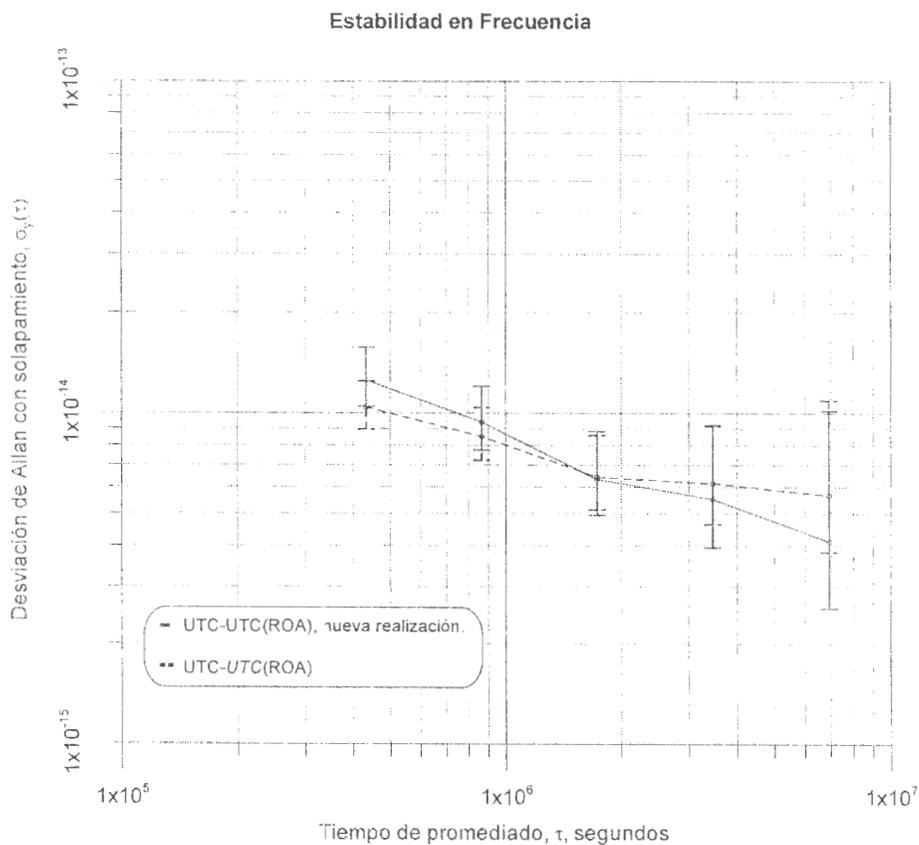


**Figura 7.12:** Diferencia entre las escalas UTC y  $UTC(ROA)$ , y entre las escalas UTC y la nueva realización de  $UTC(ROA)$ , desde agosto de 2002 hasta enero de 2004.

Durante el periodo de tiempo en que se ha calculado la nueva escala, la variación pico a pico de la diferencia  $UTC-UTC(ROA)$  ha sido 65 ns, siendo la máxima separación de  $UTC(ROA)$  respecto de UTC 42 ns. No obstante, y de acuerdo con el error rms

calculado para la predicción, el algoritmo de disciplinado prevé mantener  $UTC(ROA)$  en un intervalo a lado y lado de UTC de  $\pm 45$  ns, con un nivel de confianza del 95%.

La figura 7.13 muestra las estabilidades de  $UTC(ROA)$  y de su nueva realización, referidas a UTC. La estabilidad de la nueva realización es peor que la de  $UTC(ROA)$  en el rango de 5 a 10 días, pero se equiparan para tiempos de integración de 20 días y mejora significativamente para rangos comprendidos entre 40 y 80 días. Desafortunadamente, al haber excluido en la estima de la estabilidad a todos aquellos datos comprendidos entre los DJM's 52603 y 52664, no hay información suficiente para hacer una estima más fiable a 40 o más días que corroboren lo que se ha comentado al principio del párrafo.

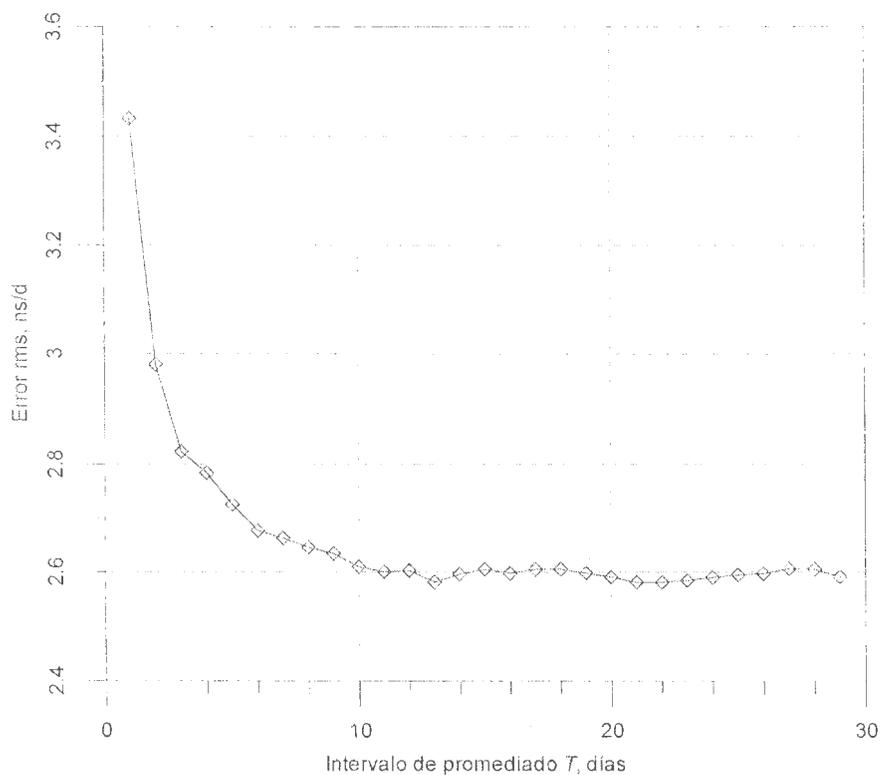


**Figura 7.13:** Comparativa entre las inestabilidades asociadas a la escala  $UTC(ROA)$  y a su nueva realización, ambas referidas a UTC.

### 7.5. Realización física de UTC(ROA)

La materialización de la escala UTC(ROA) se lleva a cabo a la salida de un desplazador de fase y frecuencia controlable vía RS-232 (modelo HROG – 5, de Spectra Dynamics) cuya señal de referencia a la entrada procede del MC. Este equipo permite generar desplazamientos de fase y de frecuencia de muy alta resolución respecto de la señal de referencia a la entrada: 0.3 fs (femtosegundos) de resolución en fase-tiempo y  $5 \times 10^{-19}$  de resolución en frecuencia a la salida.

En funcionamiento normal solo se hace uso de la opción de desplazamiento en frecuencia. Las órdenes de desplazamiento en frecuencia se envían automáticamente, todos los días a 0 h UTC(ROA), en caso de detectarse alguna variación respecto del día anterior. Estas órdenes se generan desde el mismo ordenador que gestiona la realización de la escala TA(ROA) y su disciplinado (UTC(ROA)), ambas realizadas “en papel”.



**Figura 7.14:** Estima del valor rms del error obtenido en la predicción de la frecuencia de TA(ROA), relativa al MC, en función del intervalo de tiempo de la media móvil T, para un intervalo de tiempo de predicción de 1 día.

Las correcciones diarias en frecuencia sobre el MC se deducen de la suma de dos componentes: la primera de ellas es la componente  $g_{UTC(ROA)}(t_{disc.})$  que resulta en el disciplinado de  $TA(ROA)$  a partir de la predicción a 55 días y gracias a la cual se logra el acuerdo entre  $TA(ROA)$  y UTC/TAI; esta componente permanece en vigor durante el periodo comprendido entre las 0 h UTC(ROA) del día 25 del mes y las 0 h UTC(ROA) del día 25 del mes siguiente. La segunda componente se calcula diariamente a 0 h UTC(ROA), como la frecuencia media de  $TA(ROA)$  referida al MC durante los últimos diez días; su aplicación permite establecer un acuerdo entre el MC y  $TA(ROA)$ . Esta elección se debe a que tal como se observa en la figura 7.14, el error cuadrático medio cometido en la predicción en frecuencia promediada a un día alcanza un valor mínimo de 2.6 ns/d para periodos de tiempo de promediado de 10 días (o superior).

El método seguido para la elaboración de la figura 7.14 es muy similar al de elaboración de la figura 5.2. En esta ocasión se ha hecho uso de las lecturas de diferencias de fase-tiempo entre la escala  $TA(ROA)$  y el MC disponibles hasta la fecha (datos a 0 h UTC(ROA) de cada día). Con estos valores reales, se han calculado las frecuencias relativas para diferentes valores de  $T$ , comparándolas a continuación con la frecuencia relativa observada en el día siguiente al de promediado. La figura 7.14 pone de manifiesto como ante la presencia predominante de ruido blanco de frecuencia, la mejor estima la constituye la media de las diferentes muestras de frecuencias promedio en un número que para el caso que nos ocupa bastará con que sea igual o ligeramente superior a 10 días, tal como se comentó en el párrafo anterior.

Una vez materializada la escala, un distribuidor de pulsos la reproduce  $(UTC(ROA))_{TR}$  y distribuye en tiempo real a varios puntos del laboratorio; dos de sus salidas toman parte de los sistemas de medida descritos en el apartado 7.3.1.

Las nuevas lecturas MC- $UTC(ROA)_{TR}$  permiten hacer una comprobación final del error existente entre la escala de papel  $UTC(ROA)$  y su materialización  $UTC(ROA)_{TR}$ , alertando en caso de un eventual comportamiento anómalo.

La figura 7.15 muestra la nueva configuración de los diferentes equipos implicados en la generación de la escala  $UTC(ROA)$ .

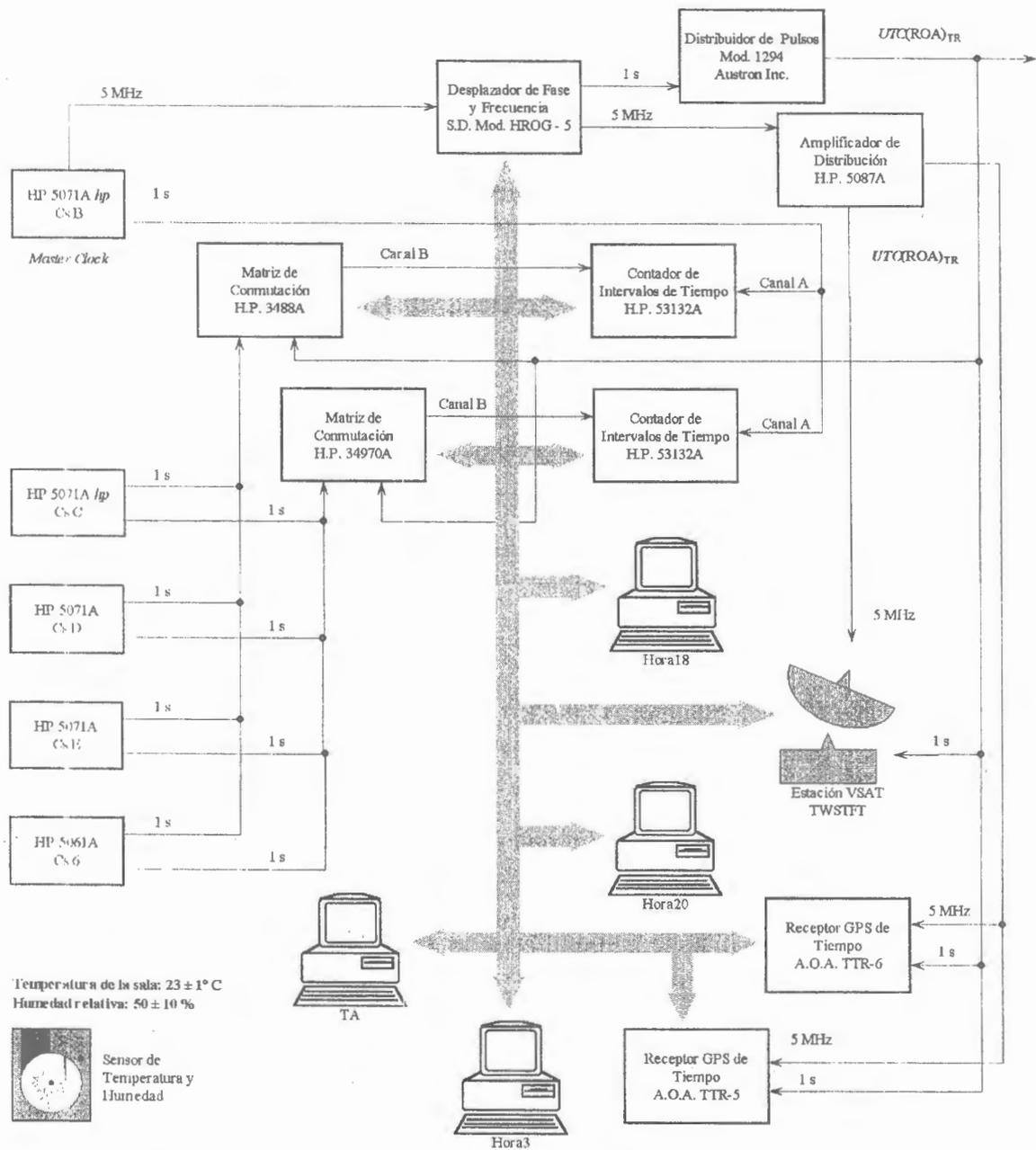


Figura 7.15: Nueva disposición de equipos implicados en la generación de UTC(ROA).

## CONCLUSIONES

La realización de una referencia temporal requiere la elección y establecimiento de un origen de tiempos y la definición de una unidad de duración o intervalo de tiempo a partir de un proceso físico con dos estados bien identificables.

El alto grado de exactitud y estabilidad alcanzada en la frecuencia derivada de la transición entre niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio ha llevado a adoptar un múltiplo de ésta como definición de la unidad de tiempo del Sistema Internacional de unidades.

El importante avance tecnológico logrado en el diseño de patrones atómicos en las últimas décadas ha permitido elevar el nivel de precisión en la medida del tiempo, llegando a definirse la unidad de segundo SI, para tiempos de promediado en torno a un mes, con una exactitud mejor que  $1 \times 10^{-14}$  y una incertidumbre relativa ( $1 \sigma$ ) inferior a  $2.2 \times 10^{-15}$ . Una vez fijado el origen de tiempos, la realización de una “escala de tiempo atómico” tan solo requiere la continua acumulación de segundos SI.

La realización de una escala temporal requiere, por tanto, la disponibilidad de uno o más relojes de precisión; pero no es menos importante el desarrollo de un algoritmo matemático con capacidad para evaluar las características intrínsecas de cada reloj a partir de las medidas efectuadas, que tenga en cuenta el modelo de ruido del sistema de medida empleado y que combine la información relativa a los diferentes relojes de manera que resulte una única referencia temporal, de mejores características metrológicas que cualquiera de las derivadas directamente de los relojes que integran el conjunto.

Un ejemplo claro de realización a partir de un conjunto de relojes lo constituye el Tiempo Atómico Internacional (TAI). Ésta es una escala de tiempo coordinado definida en un marco de referencia geocéntrico, en el que se toma como unidad de escala el segundo SI realizado sobre el geoide en rotación. El particular modo en que ha sido definida le hace ser muy fiable, además de mantener un alto grado de exactitud,

habiendo sido adoptada oficialmente como referencia convencional para todas las aplicaciones.

El Tiempo Universal Coordinado (UTC), que constituye la base de la hora legal de cualquier país, sigue el movimiento de rotación de la tierra por debajo de  $1_{STAI}$  manteniendo las mismas cualidades metrológicas que el TAI. Esto se debe a que se le hace diferir del TAI en un número entero de segundos ( $s_{TAI}$ ).

TAI y UTC presentan, no obstante, un inconveniente: el acceso diferido a ellas impide su uso en tiempo real. Lo cual solo es solventado mediante la realización de escalas de tiempo llevadas a cabo en los propios laboratorios de referencia nacionales, en estrecha concordancia con el UTC. En este sentido, el CCDS (en la actualidad el CCTF) estableció como deseable objetivo en el año 1993 que se mantuvieran las diferencias entre UTC y una determinada realización  $UTC(k)$  dentro de  $\pm 100$  ns.

La realización de una escala de tiempo que cuidara fundamentalmente el cumplimiento de la recomendación citada en el párrafo anterior, y que reuniera a su vez muchas otras cualidades tales como la estabilidad y la fiabilidad, ha sido la razón de ser y el objetivo de este trabajo de tesis. Previamente al diseño, se ha dedicado gran parte del trabajo a profundizar en el conocimiento de los diferentes problemas inherentes a la realización de la escala.

El capítulo 2 se ha dedicado a la caracterización del modelo de señal que mejor se ajusta a los relojes de precisión, tanto en su componente sistemática como aleatoria. Se han introducido las variables que se emplearan con posterioridad: desviación normalizada de frecuencia y desviación de fase-tiempo instantánea; dando paso a los parámetros que se emplearán en la caracterización de las fluctuaciones estadísticas: la densidad espectral de potencia (dominio de la frecuencia de *Fourier*) y la varianza de *Allan* (dominio del tiempo). En relación con estos dos estadísticos, se ha expuesto como de la evolución de ambos en sus respectivos dominios puede deducirse la predominancia de alguno de los cinco tipos de ruidos habitualmente presentes en este tipo de relojes.

Los capítulos 3 a 5 resuelven cada uno de los tres problemas fundamentales presentes en la realización de la escala, a saber: La elección de los pesos relativos con que se

combinarán linealmente las lecturas correspondientes a cada reloj para dar lugar a la escala de tiempo conjunta, la predicción de frecuencias (relativas a la escala media) de cada reloj que permita asegurar la continuidad, tanto en fase como en frecuencia, de la escala de tiempo conjunta ante una redistribución de pesos, y el disciplinado de la escala que proporcione el necesario grado de conformidad con UTC.

Una vez introducida la necesidad de disponer de una estima de la varianza absoluta (de *Allan*) de cada reloj como parámetro previo al cálculo de los pesos relativos a emplear en la media ponderada cuando se desea optimizar la estabilidad de la escala de tiempo conjunta, y vista la dificultad en obtener estas estimas a partir de las estimas de las varianzas referidas a pares de relojes (estadístico directamente derivado de los observables en laboratorio: las lecturas de diferencias de fase-tiempo entre pares de relojes), se hace un recorrido sobre los antecedentes relativos al problema del “sombrero de tres puntas”, para finalmente acometer algunas de las innovaciones aportadas en este trabajo:

- a) El problema genérico del “sombrero de  $N$  puntas”, según el cual siempre existen  $N$  valores de (co)varianza que quedan como parámetros libres, puede resolverse numéricamente como la minimización de una *función objetivo* supuesta la existencia de una restricción de desigualdad. La restricción de desigualdad viene dada por la condición de que el determinante de la matriz de covarianza de los relojes, expresada en términos de los  $N$  parámetros libres, debe ser mayor que cero (condición necesaria y suficiente para que la matriz sea definida positiva).
- b) Se han establecido las condiciones iniciales del problema numérico, asegurando que el punto de partida se encuentre dentro de la región factible establecida por la condición de constreñimiento.
- c) Para la resolución del problema numérico se han seguido métodos basados en las ecuaciones de *Karush–Kuhn–Tucker*, que llevan a los posibles óptimos del problema. No obstante, si el problema es convexo, las condiciones necesarias de *KKT* son además suficientes, y si lo es estrictamente, puede asegurarse que de existir el mínimo es el único en el conjunto  $D$  de soluciones factibles.
- d) La *función objetivo* a minimizar ha sido elegida de modo que tenga sentido físico, es decir, que exprese fielmente la propiedad de independencia entre relojes a minimizar, y que a su vez sea sencilla de analizar matemáticamente. Esta función se

expresa como la suma cuadrática ponderada de las covarianzas absolutas, en la que los pesos relativos están constituidos por aproximaciones sucesivas a la inversa del producto de las estimas de varianzas absolutas asociadas a los relojes a que se refieren cada término de covarianza en el numerador. Las sucesivas iteraciones llevarán a minimizar finalmente la suma cuadrática de las covarianzas absolutas normalizadas. Se ha demostrado que cada uno de los problemas de minimización particulares a resolver son estrictamente convexos, de modo que la solución de cada problema de minimización se emplea como punto de partida de la iteración siguiente en un proceso adaptivo que lleva a un mínimo local dentro de la región factible. La solución al problema, de ser única, constituirá el mínimo global del dominio factible, y aunque este extremo no puede asegurarse, sí es cierto que la adopción de tal solución ha dado muy buenos resultados tanto sobre datos simulados como sobre datos reales, lo que fundamenta la elección de la *función objetivo*.

Cabe comentar que la técnica del “sombrero de  $N$  puntas”, empleada en este trabajo para determinar la inestabilidad asociada a cada reloj, puede ser aplicada de manera más genérica como técnica de desacoplo de ruidos ante procesos con presencia de ruidos aditivos de diferente procedencia.

La duda fundada de si realmente es cierta la hipótesis de independencia entre relojes que justifique la elección de la *función objetivo*, o de si debe o no hacerse uso de las estimas de covarianzas absolutas resultantes de la aplicación de la técnica anterior, ha llevado a desarrollar un procedimiento de evaluación de la independencia entre relojes mediante un test de hipótesis, basado en tablas de contingencia, lo cual constituye otra de las particulares aportaciones de este trabajo. Con un nivel de significancia de  $\alpha = 5\%$ , la práctica totalidad de los relojes han superado el test, lo cual implica que la hipótesis de independencia está justificada. El único caso que suponía el rechazo de tal hipótesis estaba asociado a dos relojes cuyos tubos se encontraban en el último tercio de vida, por lo que cabría esperar el progresivo deterioro en el comportamiento de ambos. En este sentido, el test de independencia podría ser una herramienta útil en la detección de hechos tales como el de agotamiento de tubos antes citado.

La hipótesis de independencia entre relojes justifica el uso de la *función objetivo* empleada en el problema del “sombrero de  $N$  puntas”, si bien sigue suscitando la duda

de si deben o no emplearse los términos de fuera de la diagonal de la matriz de covarianza de los relojes en la determinación de los pesos. La respuesta a esta cuestión es que cuando se verifica la hipótesis de independencia no existe diferencia significativa entre la estabilidad de la escala conjunta obtenida a partir de la matriz de covarianza absoluta completa y la que se deduce del específico uso de su diagonal, por lo que por sencillez en la programación del algoritmo de cálculo se hace uso de la segunda opción.

El final del capítulo 3 ha sido dedicado a la evaluación del algoritmo de estimación de varianzas absolutas, siendo destacable el hecho de que bajo condiciones de correlación débil, a partir de cinco relojes en el conjunto se mantienen unos errores en el cálculo de las desviaciones de *Allan* de cada reloj por debajo del 10% respecto de sus valores verdaderos.

El capítulo 4 presenta el problema de la predicción como garantía de continuidad, tanto en fase-tiempo, como en su primera derivada. Una vez introducido el efecto que produce la redistribución de los pesos asignados a los relojes del conjunto, se expone la manera de compensar los “saltos” mediante la inclusión de términos correctores en la expresión de la media ponderada. Parte de estos términos se identifican con la predicción de frecuencia de cada reloj, relativa a la escala de tiempo conjunta, de ahí la necesidad de efectuar la predicción.

Tras hacer una breve incursión en la teoría de la predicción, y particularmente en la técnica *ARIMA*, se acomete el estudio del filtro *KALMAN* como claro candidato para llevar a cabo la tarea de la predicción. Este filtro es una versión dinámica de los mínimos cuadrados para el que se ajusta bastante bien el modelo de reloj de precisión, en el que se ha supuesto la única presencia de ruido blanco de frecuencia. Este modelo es muy simple pero a la vez muy adecuado en patrones de haz de cesio para intervalos de tiempo de dos horas (el adoptado en este trabajo entre actualizaciones de la escala de tiempo conjunta).

El capítulo 5 se dedica al planteamiento del problema de disciplinado de la escala de tiempo conjunta: una vez obtenida la escala temporal de estabilidad óptima a partir de la combinación lineal de las lecturas de fase-tiempo correspondientes a varios relojes, en la que se han evitado las discontinuidades o “saltos” ante la redistribución de pesos

relativos, queda pendiente el disciplinado requerido para lograr el acuerdo con UTC. El gobierno de la escala requiere nuevamente el empleo de las técnicas de predicción, que deberán tener en cuenta no solo el intervalo de tiempo entre predicciones, sino también el retardo de acceso a la escala UTC. El predictor empleado es lineal, de tipo media móvil de dos puntos, que se aplica sobre el proceso que resulta de deshacer las correcciones previamente introducidas a la escala de origen en sentido regresivo, de este modo puede asegurarse que la escala obedece a un proceso cuyas segundas diferencias son estacionarias; de otro modo, las correcciones aplicadas regularmente cada mes imposibilitarían el tratamiento del proceso desde un punto de vista estadístico, por su claro carácter evolucionista. Conocida la predicción de frecuencia, el disciplinado es tal que intenta cancelar la diferencia o “error” de fase-tiempo para el instante en que debe aplicarse la siguiente corrección.

El final del capítulo 5 se dedica al estudio de la estima del error cometido en la predicción ante diferentes supuestos, en particular el aplicable en la nueva realización de *UTC*(ROA), para el que se ha resuelto emplear el predictor lineal de tipo media móvil de dos puntos, con un intervalo de tiempo de promediado coincidente con el intervalo de tiempo de predicción: 55 días.

El capítulo 6 se ha dedicado al estudio de diferentes algoritmos empleados en la actualidad en la construcción de escalas de tiempo atómico. Todos ellos comparten las mismas hipótesis de fondo, aunque tengan diferentes características en función de la finalidad para la que cada cual ha sido construida o de la situación experimental en que tiene lugar su elaboración.

El capítulo 7 trata expresamente la realización práctica de la escala de tiempo conjunta. En este capítulo se hace uso de todo el desarrollo conceptual y de cálculo introducido en los capítulos 2 a 5, debiendo subrayarse lo siguiente:

- a) Las conclusiones obtenidas de la aplicación del test de independencia entre relojes, se han visto consolidadas con la mejora en las características de control de la temperatura y humedad relativa en la sala en que se ubican los relojes y con la progresiva sustitución de los modelos antiguos HP 5061 de Hewlett Packard por los nuevos modelos 5071A de Agilent Technologies.

- b) La caracterización del ruido inherente al sistema de medida ha puesto de manifiesto que la periodicidad con la que se venían efectuando las medidas era muy crítica. La periodicidad de 15 minutos podría haberse mantenido de haber dispuesto de mejores contadores de intervalo de tiempo. La comparación entre este ruido, blanco de fase, y el asociado a la pareja de relojes más estables del laboratorio del ROA, blanco de frecuencia en el rango de interés, aconsejan el uso de un nuevo periodo de muestreo igual o superior a dos horas. Dos horas ha sido el periodo de muestreo seleccionado ante la imposibilidad circunstancial de adquirir nuevos contadores de intervalo de tiempo con mayor resolución.
- c) La estima de varianzas absolutas optimiza la estabilidad de la escala de tiempo conjunta para un tiempo de integración de 20 días. La elección se debe a que siendo un múltiplo de la periodicidad con la que el BIPM declara la diferencia entre UTC y cada realización particular  $UTC(k)$ , supone un intervalo de tiempo dentro del rango en el que el retardo de acceso a UTC hace que se desconozca la marcha de la realización propia  $UTC(\text{ROA})$  respecto de la referencia: UTC. A mayor estabilidad en ese rango, mayor bondad en la estima de la predicción a realizar y menor incertidumbre en el disciplinado que busca el acuerdo con UTC.
- d) Las varianzas absolutas se calculan sobre la base de tiempo de un año, a partir de las lecturas correspondientes a las 0 h y 12 h  $UTC(\text{ROA})$ , actualizándose regularmente al final de cada mes y manteniéndose en vigor durante el mes próximo. Las series temporales relativas a un reloj podrían ser, no obstante, de menor longitud. El mínimo se ha establecido en 420 datos, correspondientes a siete meses, para evitar una incertidumbre relativa alta en el cálculo de la varianza asociada a tal reloj. La longitud del registro de lecturas actúa en la definición de los pesos absolutos para tener en cuenta la mayor incertidumbre en la determinación de la estima al basar el cálculo en un menor número de datos.
- e) El límite en la aportación de cada reloj a la escala media, entendido como un artificio empleado para garantizar la fiabilidad, así como la estabilidad y exactitud, se ha establecido en 0.65 en términos relativos.
- f) Un filtro *KALMAN* es el encargado de efectuar la predicción de frecuencias de cada reloj, relativas a la escala de tiempo conjunta, promediadas a dos horas. Los parámetros integrantes del filtro están sometidos a ajustes al margen de la transformación dinámica propia del proceso recursivo. Estos ajustes tienen lugar: cada mes, sobre la matriz de covarianza asociada al ruido del sistema,

eventualmente, cuando tenga lugar un cambio en la instrumentación empleada en la medida, y siempre que se produzca una redistribución de pesos.

- g) El algoritmo evalúa la bondad en el comportamiento de cada reloj mediante la comparación de la diferencia entre la frecuencia media del reloj, relativa a la escala conjunta, en los últimos treinta días, y la de dicho reloj, relativa a la escala conjunta, en las últimas dos horas. La validación de pesos solo tiene lugar si la diferencia se mantiene inferior en valor absoluto a la inestabilidad esperada para un tiempo de integración de dos horas ( $3\sigma$ ), deducida de las especificaciones dadas por el fabricante para determinado modelo de reloj y de la inestabilidad de la escala conjunta. El empleo de la frecuencia media promediada a treinta días como referencia en esta evaluación se debe a que para este tiempo de integración, los relojes muestran ruido *flicker* de fondo, es decir, máxima estabilidad en la medida de la frecuencia media.
- h) La escala de tiempo conjunta hasta ahora obtenida es una escala de tiempo atómico muy estable, de fiabilidad significativamente mayor al estar integrada por un conjunto de relojes, y que marcha libremente. Es la escala denominada *TA(ROA)*. El origen ha sido establecido a las 12 h del DJM 52499 (13 de agosto de 2002), momento en el que se hizo coincidir la diferencia de fase-tiempo y la frecuencia respecto de UTC con los valores que mostraron *UTC(ROA)* respecto de UTC en ese preciso instante.
- i) Para lograr el acuerdo con UTC, se ha optado por definir una nueva escala deducida de *TA(ROA)*, la escala *UTC(ROA)*. En otras circunstancias (mayor estabilidad en la escala *TA(ROA)*) hubiera bastado con controlar la adecuación a UTC a partir de pequeñas correcciones en frecuencia que apenas hubieran afectado a la estabilidad de la escala conjunta, pero el reducido número de relojes integrantes del conjunto y el orden de inestabilidad en éstos sugieren la realización de la nueva escala *UTC(ROA)*, menos estable que *TA(ROA)*, pero próxima a UTC. La nueva realización de *UTC(ROA)* está totalmente automatizada, frente a la elaboración que se venía haciendo, en la que el gobierno de la escala se hacía de manera esporádica cuando se apreciaba que la diferencia respecto de UTC se aproximaba al límite de  $\pm 100$  ns. El disciplinado, de ser necesario, se aplica el día 25 de cada mes a 0 h *UTC(ROA)*.

La escala  $TA(\text{ROA})$  muestra una estabilidad de  $\sigma_y^{\text{TAI-TA}(\text{ROA})}(\tau = 20 \text{ días}) = 6.46 \times 10^{-15}$ , lo cual supone una ligera mejora respecto de la estabilidad del *master clock* en el mismo periodo en el que se ha basado el cálculo anterior:  $\sigma_y^{\text{UTC-MC}}(\tau = 20 \text{ días}) = 6.51 \times 10^{-15}$ . La mejora no es mayor por la limitación práctica de disponer de un número reducido de relojes, si bien la teoría que soporta la realización de  $TA(\text{ROA})$  augura muy buenos resultados de haberse dispuesto de mayor número de relojes de altas prestaciones. Estos valores deben ser tomados, no obstante, con ciertas reservas, pues las incertidumbres asociadas son aún elevadas al disponer de un número de datos reducido.

Para la nueva escala  $UTC(\text{ROA})$  se ha estimado un error rms en la predicción de  $\varepsilon(T = 55 \text{ días}) \approx 22.4 \text{ ns}$ , lo que supone que  $UTC(\text{ROA})$  se mantendrá en un intervalo a lado y lado de UTC de  $\pm 45 \text{ ns}$ , con un nivel de confianza del 95%. Durante el periodo de tiempo en que se ha calculado la nueva escala, la variación pico a pico de la diferencia  $UTC-UTC(\text{ROA})$  ha sido 65 ns, siendo la máxima separación de  $UTC(\text{ROA})$  respecto de UTC 42 ns. Este valor se mantiene por debajo de los  $\pm 45 \text{ ns}$  que prevé la teoría aplicada, y desde luego, se mantiene muy por debajo de los  $\pm 100 \text{ ns}$  recomendados por el CCTF. Respecto a la estabilidad de  $UTC(\text{ROA})$  con la nueva realización, puede decirse que si bien es ligeramente inferior a la del *master clock* para tiempos de integración inferiores a veinte días, prácticamente se equiparan para tiempos de integración de veinte días, y aunque es pronto para extraer conclusiones definitivas, parece obvio que para tiempos de integración mayores la estabilidad de  $UTC(\text{ROA})$  superará a la del *master clock*.

La nueva realización de  $UTC(\text{ROA})$ , construida “en papel”, ha sido realizada físicamente a partir del *master clock*, cuya salida se ha gobernado mediante un desplazador de fase y frecuencia, que produce la escala  $UTC(\text{ROA})_{\text{TR}}$  adecuada a  $UTC(\text{ROA})$ . La realización física de  $UTC(\text{ROA})$  es ligeramente más inestable que la correspondiente de papel, pero mantiene su acuerdo con UTC además de ser una escala disponible en el laboratorio del Real Observatorio de la Armada en tiempo real.

El resultado final de este trabajo de tesis puede resumirse en la consecución de una nueva realización de la escala  $UTC(\text{ROA})$ , elaborada automáticamente y realizable físicamente en tiempo real, tan estable a medio y largo plazo y mucho más exacta que la

realización que se venía haciendo tradicionalmente, además de ser muy fiable al basarse en la aportación de varios relojes. La elaboración de *UTC(ROA)* ha hecho uso de una escala de tiempo atómico *TA(ROA)* muy fiable y mucho más estable a medio-largo plazo que la propia realización de *UTC(ROA)* o cualquiera de los relojes integrantes del conjunto, pudiendo ser de utilidad para gran variedad de aplicaciones. La notable mejoría en la definición de *UTC(ROA)* redundará en la hora legal española, por estar basada precisamente en *UTC(ROA)* conforme establece el R.D. núm. 1308/1992, de 23 de octubre de 1992.

## ACRÓNIMOS

<b>ACOV:</b>	Covarianza (de <i>Allan</i> ).
<b>ARIMA:</b>	Proceso Integrado Autoregresivo y de Media Móvil.
<b>ARMA:</b>	Proceso combinado Autoregresivo y de Media Móvil.
<b>AVAR:</b>	Varianza de <i>Allan</i> .
<b>BIH:</b>	Buró Internacional de la Hora.
<b>BIPM:</b>	Buró Internacional de Pesas y Medidas.
<b>BNM-SYRTE:</b>	Buró Nacional de Metrología, Sistemas de Referencia Espacio –Temporales.
<b>BRCS:</b>	Sistema Celeste de Referencia Baricéntrico.
<b>CCDS:</b>	Comité Consultivo para la Definición del Segundo.
<b>CCIR:</b>	Comité Consultivo Radio Internacional.
<b>CCTF:</b>	Comité Consultivo de Tiempo y Frecuencia.
<b>CGPM:</b>	Conferencia General de Pesas y Medidas
<b>CIPM:</b>	Comité Internacional de Pesas y Medidas.
<b>DJM:</b>	Día Juliano Modificado.
<b>EAL:</b>	Escala Atómica Libre.
<b>ET:</b>	Tiempo de Efemérides.
<b>FFT:</b>	Transformada Rápida de <i>Fourier</i> .
<b>GMT:</b>	Tiempo Medio en <i>Greenwich</i> .
<b>GRCS:</b>	Sistema Celeste de Referencia Geocéntrico.
<b>GRS<sub>R</sub>:</b>	Sistema Coordinado Geocéntrico en Rotación.
<b>IAU:</b>	Unión Astronómica Internacional.
<b>IERS:</b>	Servicio Internacional de Rotación de la Tierra.
<b>NIST:</b>	<i>National Institute of Standards and Technology</i>
<b>SI:</b>	Sistema Internacional de Unidades
<b>TAI:</b>	Tiempo Atómico Internacional.
<b>TA(<i>k</i>):</b>	Escala de Tiempo Atómico, realizada por el Instituto « <i>k</i> ».
<b>TCB:</b>	Tiempo Coordinado Baricéntrico.
<b>TCG:</b>	Tiempo Coordinado Geocéntrico.
<b>TDT:</b>	Tiempo Dinámico Terrestre.
<b>TT:</b>	Tiempo Terrestre.
<b>USNO:</b>	Observatorio Naval de Washington.
<b>UT1:</b>	Tiempo Universal.
<b>UTC:</b>	Tiempo Universal Coordinado.
<b>UTC(<i>k</i>):</b>	Escala de Tiempo realizada por el Instituto « <i>k</i> », en concordancia con UTC.



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] UIT (1995), “Recomendaciones UIT–R, Emisiones de frecuencias patrón y señales horarias”, Vol. 1994 Serie TF.
- [2] IAU (1991), “Transactions Vol. XXIB”, en *Proc. 21<sup>st</sup> Gen. Assembly Buenos Aires*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London.
- [3] IAU (1992), “Information Bulletin 67”, p. 7.
- [4] A. Einstein, “Annalen der Physik, 17”, traducido al inglés por Lorentz H.A., A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl, “The Principle of Relativity”, 1923, Dover, New York.
- [5] V.A. Brumberg, “Essential Relativistic Celestial Mechanics”, 1991, Adam Hilger, Bristol.
- [6] V.A. Brumberg, “Essential Relativistic Celestial Mechanics”, en *Proc. IAU Colloq. 127*, J.A. Hughes, C.A. Smith, G.H. Kaplan (ed.), US Naval Observatory, Washington D.C., pp. 36–49.
- [7] S.M. Kopejkin, “Celestial Mechanics”, 1988, **44**, pp. 87–115
- [8] T. Damour, M. Soffel, C. Xu, “Physical Review D”, 1991, **43**, 3273–3307.
- [9] B. Guinot, “Scales of Time”, *Metrologia* 1995, **31**, 431–440.
- [10] D.H. Sadler, *Q. Jl. R. Astr. Soc.*, 1978, **19**, pp. 290–309
- [11] *Bulletin Horaire*, Série J. N°7, Observatoire de Paris, Bureau International de l’Heure, jan.–fèv., 1965.
- [12] D.C. Baker, S.R. Kulkarni, C. Heiles, M.M. Davis, & W.M. Goss, *Nature*, 1982, **300**, pp. 615–618.
- [13] D.W. Allan, “Statistics of atomic frequency standards”, en *Proc. IEEE* 54, 1966, p. 221.
- [14] J.A. Barnes, A.R. Chi, L.S. Cutler, D.J. Healey, D.B. Leeson, T.E. McGunigal, J.A. Mullen, Jr., W.L. Smith, R.L. Sydnor, R.F.C. Vessot, and G.M.R. Winkler, “Characterization of Frequency Stability”, en *Proc. IEEE*, 1971, pp. 105–120.
- [15] J.Rutman, “Characterization of Phase and Frequency Instabilities in Precision Frequency Sources: Fifteen Years of Progress”, en *Proc. IEEE*, 1978.

- [16] P. Lesage, and C. Audoin, "Characterization of Frequency Stability: Uncertainty due to the Finite Number of Measurements", en *Proc. IEEE*, Vol. IM-22, 1973, pp. 157-161, (correcciones efectuadas en 1974 y 1976).
- [17] D.A. Owe, D.W. Allan, and J.A. Barnes, "Properties of Signal Sources and Measurement Methods", en *Proc. 35th. Frequency Control Symp.*, 1981.
- [18] "Precision Frequency Control, Vol. 2", ed. E.A. Gerber and A. Ballato, Academic Press, New York, 1985, pp. 191-416.
- [19] E. Bava, F. Cordara, V. Pettiti and P. Tavella, "Analysis of the seasonal effects on cesium clocks to improve the long term stability of a time scale", en *Proc. Precise Time and Time Interval Planning Meeting*, 1987, pp. 185-202.
- [20] D.W. Allan, and J.A. Barnes, "Modified "Allan Variance" with increased Oscillator Characterization Ability", en *Proc. 35th. Frequency Control Symp.*, 1981.
- [21] D.W. Allan, "Time and Frequency (Time-Domain) Characterization, Estimation, and Prediction of Precision Clocks and Oscillators", en *Proc. IEEE*, Vol. UFFC-34, NO. 6, 1987.
- [22] S.R. Stein, "Frequency and Time Measurement", ed. E.A. Gerber and A. Ballato, Academic Press, New York, 1985, cap. 12, pp. 207-210.
- [23] J. A. Barnes, "Atomic Timekeeping and the statistics of precision signal generators", en *Proc. IEEE* 54, 1966, pp. 207-219.
- [24] S. Iijima, K. Fujiwara, H. Kobayashi and T. Kato, "Effect of environmental conditions on the rate of a cesium clock", *Ann. Tokio Astronomical Observatory*, 2<sup>nd</sup>. ser., vol. 18 núm. 1, pp. 50-67, 1978.
- [25] A. de Marchi, "Understanding environmental sensitivity and cesium beam frequency standards", en *Proc. 1<sup>st</sup>. European Frequency and Time Forum*, 1987, pp. 288-293.
- [26] L. A. Breakiron, "The effects of ambient conditions on cesium clock rates", en *Proc. Precise Time and Time Interval Planning Meeting*, 1987, pp. 175-184.
- [27] L. A. Breakiron, "The effects of data processing and environmental conditions on the accuracy of the USNO time scale", en *Proc. Precise Time and Time Interval Planning Meeting*, 1988, pp. 221-236.
- [28] J. E. Gray, H. E. Machlan and D. W. Allan, "The effect of humidity on commercial cesium beam atomic clocks", en *Proc. 42th. Frequency Control Symp.*, 1988, pp. 514-518.

- [29] H. Helwig, “Environmental sensitivities of precision frequency sources”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 39, pp. 301–306, Abr. 1990.
- [30] A. de Marchi and E. Rubiola, “Environmental sensitivity and long term stability limitations induced by C-field variations in commercial cesium beam frequency standards”, en *Proc. 5<sup>th</sup>. European Frequency and Time Forum*, 1991, pp. 237–242.
- [31] P. Tavella and C. Thomas, “Study of the correlations among the frequency changes of the contributing clocks to TAI”, en *Proc. 4<sup>th</sup>. European Frequency and Time Forum*, 1990, pp. 527–541.
- [32] C. Thomas and P. Tavella, “Report on correlations in frequency changes among the clocks contributing to TAI”, en *Proc. 4<sup>th</sup>. European Frequency and Time Forum*, 1990, pp. 527–541.
- [33] A. Premoli, and P. Tavella, “A revisited three-cornered hat method for estimating frequency standard instability”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 42 núm. 1, Feb. 1993, pp. 7–13.
- [34] J. E. Gray and D. W. Allan, “A method for estimating the frequency of a individual oscillator”, en *Proc. 28th. Frequency Control Symp.*, 1974, pp. 243–246.
- [35] P. Tavella and A. Premoli, “Estimating the instabilities of  $N$  clocks by measuring differences of their readings”, *Metrologia* 1993/94, **30**, 479–486.
- [36] A. Giachino, “Estimación de inestabilidades en patrones atómicos mediante intercomparaciones”, Tesis de licenciatura en matemáticas, *Università di Torino*, Mar. 2000 (en italiano).
- [37] C.G. Broyden, “The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms”, *J. Inst. Math. Applic.*, Vol. 6, pp. 76–90, 1970.
- [38] R. Fletcher, “A New Approach to Variable Metric Algorithms”, *Computer J.* Vol. 13, pp. 317–322, 1970.
- [39] D. Golfarb, “A family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means”, *Mathematics of Computing.* Vol. 24, pp. 23–26, 1970.
- [40] D.F. Shanno, “Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization”, *Mathematics of Computing.* Vol. 24, pp. 647–656, 1970.
- [41] W.C. Davidon, “Variable Metric Method for Minimization”, *A.E.C. Research and Development Report*, ANL--5990, 1959.

- [42] P.E. Gill, W. Murray, and M.H. Wright, “Numerical Linear Algebra and Optimization Vol. 1”, *Addison Wesley*, 1991.
- [43] P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders, and M.H. Wright, “Procedures for Optimization Problems with a Mixture of Bounds and General Linear Constraints”, *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 10, pp. 282–298, 1984.
- [44] S.P. Han, “A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 22, p. 297, 1977.
- [45] M.J.D. Powell, “A fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations”, *Numerical Analysis*, ed. G.A. Watson, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Vol. 630, 1978.
- [46] F.J. Galindo, and J. Palacio, “Estimating the instabilities of N correlated clocks”, en *Proc. Precise Time and Time Interval Planning Meeting*, 1999, pp. 285–296.
- [47] H.J. Larson (1969), “Introduction to probability theory and statistical inference” 3<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons. New York, pp. 541–551.
- [48] I. Miller – J.E. Freund (1985), “Probability and Statistics for Engineers” 3<sup>th</sup> edition, Prentice – Hall. New Jersey, pp. 262–265.
- [49] F.J. Galindo, and P. Tavella, “Optimal weighting of correlated clocks in the definition of an ensemble – time scale”, en *Proc. 14th. European Frequency and Time Forum*, 2000, pp. 418–422.
- [50] A. Kolmogorov (1941), “Interpolation und extrapolation von stationären Zufälligen Folgen”, *Bull. Acad. Sci. (Nauk), U.S.S.R., Ser. Math.*, **5**, 3–14.
- [51] N. Wiener (1949), “The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications”, Wiley, New York.
- [52] G.E. Box and G.M. Jenkins (1970), “Time Series Analysis, Forecasting and Control”, Holden–Day, San Francisco.
- [53] M.B. Priestley (1981), “Spectral Analysis and Time Series”, *Academic Press Ltd.*, 1981.
- [54] C. Andreucci, “A new algorithm for the French atomic time scale”, *Metrologia* 2000, **37**, 1–6.
- [55] R.E. Kalman (1960), “A new approach to linear filtering and prediction problems”, *Trans. ASME J. Basic Engrg., Series D*, **82**, 35–45.
- [56] R.E. Kalman (1963), “New methods of Wiener filtering theory”, en *Proc. 1st. Symp. on Eng. Appns. of Random Functions Theory and Prob.* (Eds. J.L. Bogdanoff and F. Kozin), Wiley, New York.

- [57] R.E. Kalman, and R.S. Bucy (1961), “New results in linear filtering and prediction problems”, *Trans. ASME J. Basic Engrg., Series D*, **83**, 95–108.
- [58] S.M. Bozic (1979), “Digital and Kalman Filtering. An introduction to discrete-time filtering and optimum linear estimation”, *Edward Arnold*, 1981, pp. 81–120.
- [59] F.J. Galindo, and J. Palacio, “Post-processing ROA data clocks for optimal stability in the ensemble time-scale”, *Metrologia* 2003, **40 (3)**, pp. 237–244.
- [60] W. Guo, and S. Jin-an, “Characteristic Analysis of Clock Noise: A Dynamic Model”, en *3rd. International Time Scale Algorithm Symposium*, 1988, pp. 167–180.
- [61] P.Tavella, M. Gotta, “Uncertainty and Prediction of Clock Errors in Space and Ground Applications”, en *Proc. EFTF*, 2000, pp. 77–81.
- [62] L.G.Bernier, “Use of the Allan Deviation and Linear Prediction for the Determination of the Uncertainty on Time Calibrations Against Predicted Timescales”, en *Proc. IEEE*, 2002.
- [63] BIH Annual Report 1973, Paris, 1974, A1–A19.
- [64] C. Thomas, and J. Azoubib, “TAI computation: study of an alternative choice for implementing an upper limit of clock weights”, *Metrologia*, 1996, pp. 227–240.
- [65] J. Azoubib, “A revised way of fixing an upper limit to clock weights in TAI computation”, *Report to the 15<sup>th</sup> session of the CCTF*.
- [66] J. Azoubib, M. Granveaud, and B. Guinot, *Metrologia*, 1977, **13**, pp. 87–93.
- [67] P. Tavella, and C. Thomas, “Comparative study of time scale algorithms”, *Metrologia*, 1991, vol. 28, pp. 57–63.
- [68] M. Weiss, and T. Weissert, “AT2, A new time scale algorithm: AT1 plus frequency variance”, *Metrologia*, 1991, vol. 28, pp. 65–74.
- [69] M.A. Weiss, and T. Weissert, “Sifting through nine years of NIST clock data with TA2”, en *Proc. 7th. European Frequency and Time Forum*, 1993, pp. 199–210.
- [70] L.A. Breakiron, “Timescale algorithms combining cesium clocks and hydrogen masers”, en *Proc. Precise Time and Time Interval Planning Meeting*, 1991, pp. 297–305.
- [71] P. Tavella, G. Vizio, and F. Cordara, “A new design for the realization of the Italian atomic time scale”, en *Proc. XIII IMEKO World Congress*, 1994, vol. 2, pp. 1083–1088.
- [72] A. Lepek, “A time scale based on optimum linear prediction”, en *IEEE Frequency Control Symp.*, 1997.

- [73] F. Collin, and P. Pâquet, “Realization of the Belgian Time Scale”, en *Proc. 5th. European Frequency and Time Forum*, 1991, pp. 275–280.
- [74] Real Decreto 1308/1992, de 23 de octubre, por el que se declara el Laboratorio del Real Instituto y Observatorio de la Armada, como laboratorio depositario del patrón nacional de Tiempo y laboratorio asociado al Centro Español de Metrología (*BOE* núm. 282, de 24 de noviembre de 1992).
- [75] Decreto 2781/76 (Presidencia), de 30 de octubre de 1976. HORA LEGAL. Consideración como base nacional de la escala de “tiempo universal coordinado” que mantiene el Instituto y Observatorio de Marina.









MINISTERIO  
DE DEFENSA

