De la Carta cuadrada a la reducida de Mercátor

Por el Comandante Ingeniero Aeronáutico JULIAN DEL VAL

En los momentos cruciales de la Historia—y el que vivimos parece ser uno de los más decisivos—se revisan valores que la tradición y el método hicieron clásicos, desdeñando aquellos que no representan ya una necesidad. De esta ley no podrá escapar la cartografía de uso en Navegación, sobre todo en la aérea intercontinental, que, superada su iniciación romántica, parece ya encajada en normal utilización. Por ello el tema que nos ocupa tiene cierta actualidad; razón por la que sin otra intención que la puramente divulgadora dentro de un marco elemental, y también un poco a modo de divagación histórica, se escriben estas líneas, en las que llegaremos al desarrollo de la Carta Mercátor como una necesidad sentida en el siglo XVI, y de la que haremos constar los límites de su utilidad, totalmente ajena a una idea descriptiva del conjunto mundial, debido a sus enormes deformaciones a medida que se aumentan las latitudes (1).

Veremos cómo esta representación mercatoriana rompió también más antiguos y modestos moldes que bastaban a exigencias mediterráneas (2).

CILINDRICA EQUIDISTANTE

Para las rutas corrientemente surcadas en la época precolombina era de uso la proyección cilíndrica equidistante, que modificaba la cilíndrica centrográfica pura. En ella los meridianos siguen siendo rectas normales a la recta transformada del Ecuador o del paralelo de penetración, y el haz de paralelos perpendicular al de meridianos; pero se conservan sobre los últimos sus medidas rectificadas.

Este par de haces de rectas, paralelas y normales entre sí, hace desaparecer toda idea curva inicial de la superficie terrestre, y la Carta pertenece al grupo de las "planas".

El reticulado o cánevas de la Carta queda convertido en una sucesión de rectángulos iguales (para un constante incremento de longitudes y latitudes), cuyas bases son iguales al arco correspondiente en el paralelo de penetración o tangencia (Ecuador), únicos paralelos automecoicos en uno u otro caso.

Si es $\Delta\lambda$ el intervalo de meridianos establecido y φ_0 el paralelo de penetración (fig. 1), la base de los rectángulos

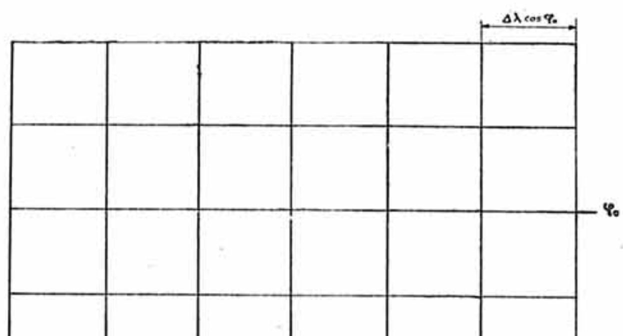

Fig. 1.

(1) Nos remitimos a la conferencia pronunciada por el Teniente Coronel Azcárraga el día 14 de abril en el Instituto de Ingenieros Civiles.

(2) Se emplearán los signos convencionales reglamentarios del Ministerio del Aire, llamando, por tanto, φ a la latitud y λ a la longitud.

tendrá el valor $R \cdot \Delta\lambda \cdot \cos \varphi_0$, toda vez que ésta es la medida del arco de $\Delta\lambda$ en el paralelo φ_0, pues su radio vale $R \cdot \cos \varphi_0$ (fig. 2).

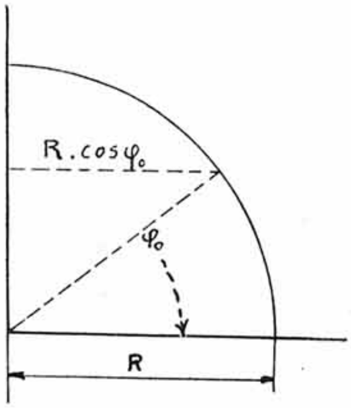

Fig. 2.

Las deformaciones aumentan a medida que se aleja la Carta del paralelo base y son sólo función de la latitud; es decir, que la deformación angular de un azimut es constante a lo largo de un paralelo, lo que indica que los trozos *rectos elementales* de un mismo azimut tienen la misma dirección en la misma latitud (fig. 3); propiedad previsible al ser rectas paralelas las transformadas de todos los meridianos.

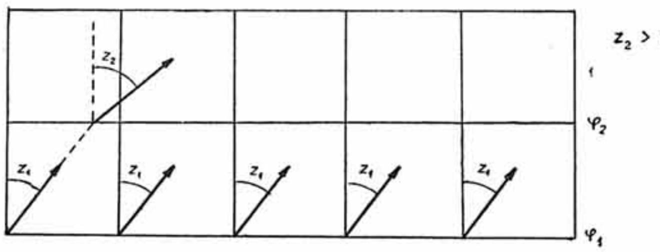

Fig. 3.

En cambio, porciones finitas de loxodrómicas o *líneas de azimut constante, no pueden ser rectas* al no ser isógona (conservación de ángulos) esta proyección, por lo que un segundo trozo elemental formará el ángulo z_2 en una segunda transformación del azimut original z en el paralelo φ_2. Este z_2 será mayor que z_1 a medida que se gane latitud.

La propiedad de que en esta proyección la representación angular de un azimut haya de ir variando en la forma indicada, a medida que aumenta la latitud, puede comprenderse a la vista de la figura 4, en la que se verifica que

$$AB = \lambda \cdot \cos \varphi;$$

y suponiendo elemental el recorrido AC con rumbo Z,

$$AB = CB \cdot \operatorname{tg} z = d\lambda \cdot \cos \varphi$$

(siendo φ la latitud media local).

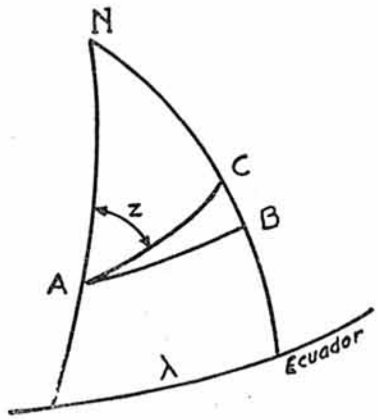

Fig. 4.

El valor $d\lambda$, o longitud diferencial alargada, será:

$$d\lambda = \operatorname{tg} z \cdot \left(\frac{CB}{\cos \varphi}\right). \qquad [\alpha]$$

La suma de todos estos valores elementales entre límites de una ruta finita da el alargamiento total, y por tanto, la longitud alcanzada desde un punto inicial.

La integración de la expresión

$$\frac{CB}{\cos \varphi}$$

entre los límites previstos de latitud es la suma de partes meridionales o latitudes crecientes. Para una misma distancia los alargamientos de longitud aumentan con la latitud; pero como se representan en su valor ecuatorial en todas las latitudes, ya que los paralelos son iguales al Ecuador, mientras los meridianos son automecoicos, la línea de rumbo constante (rumb-line) o loxodrómica tendrá la forma de la figura 5.

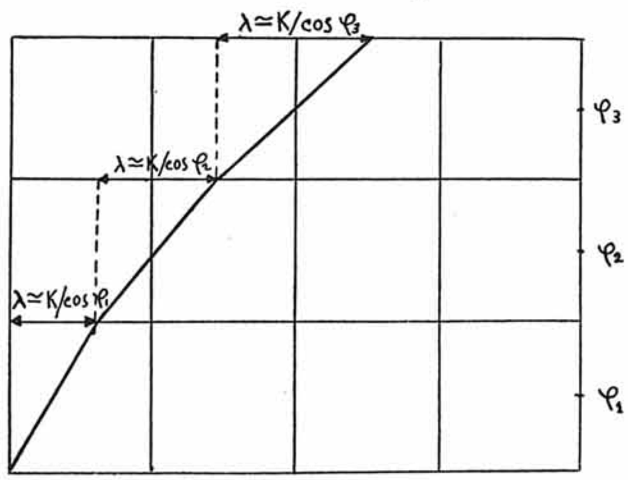

Fig. 5.

La representación curva de las loxodrómicas en esta Carta cilíndrica equidistante podrá desarollarse analíticamente, si partimos de relaciones que liguen el azimut o rumbo original en la Tierra y su representación angular en la Carta alrededor de un punto de la misma y en todas direcciones.

Recordemos que la razón entre el elemento lineal representación y el original en la Tierra es el *módulo lineal de reducción* K, que varía, en general, en un determinado punto de una Carta con el azimut de dicho elemento, ya que las deformaciones no son iguales en todas direcciones. En esta representación equidistante, como la deformación lineal es nula en dirección de los meridianos (módulo de reducción $= 1$) y máxima en los paralelos (aumentando con su latitud), se comprende que el citado módulo, en una latitud φ, irá variando en las direcciones intermedias en forma continua y en función del azimut.

Los módulos máximo y mínimo o *módulos principales* corresponden en este caso a las direcciones de los meridianos y paralelos, bien entendido que en la cilíndrica penetrante en el paralelo φ_o, el máximo corresponde al k_2 en dirección a los paralelos para latitudes mayores que φ_o, y en dirección al meridiano o módulo k_1 (siempre igual a la unidad por construcción de la Carta), para latitudes menores a la de penetración.

Sabido que k_1, o módulo de reducción en dirección de los meridianos, es siempre igual a la unidad, veamos los valores de k_2.

En la penetrante:

$$K_2 = \frac{\Delta\lambda \,.\, \cos\varphi_o}{\Delta\lambda \,.\, \cos\varphi} = \frac{\cos\varphi_o}{\cos\varphi}.$$

Fórmula que indica claramente cómo está ampliada la representación en latitudes mayores que φ_o y reducida en menores latitudes.

En la cilíndrica tangente al Ecuador:

$$K_2 = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda \,.\, \cos\varphi} = \sec\varphi.$$

La fórmula general que nos liga un azimut terrestre con su representación mediante los módulos principales es:

$$\operatorname{tg} z' = \operatorname{tg} z \,.\, \frac{K_2}{K_1},$$

que para la representación tangente da:

$$\operatorname{tg} z' = \operatorname{tg} z \sec\varphi,$$

o sea, que la deformación angular depende solamente de la latitud φ, y las líneas de rumbo serán curvas cóncavas hacia el Ecuador.

Puesto que en las fórmulas anteriores vemos que la deformación angular en todos los puntos del paralelo de penetración o del Ecuador, en cada caso, es nula, de estas líneas podría partirse para dibujar una rosa de vientos o rumbos, que inicialmente se representan en su verdadero valor; y prolongarse radialmente en tela de araña con curvas calculadas que, como para un mismo rumbo son únicamente dependientes de la latitud, permitiría servir para todas las rutas mediante desplazamientos de dicha tela de araña a lo largo del paralelo φ_o o del Ecuador.

El cánevas a reticulado en estas proyecciones es "paralelográmico" o "rectangular", formando la representación "plana rectangular"; pero cuando se adopta el mismo intervalo en latitudes y longitudes, los meridianos y paralelos forman retículas cuadradas, y la Carta se llama "Carta cuadrada", con un lado igual a $\frac{2\pi R}{360}$ por cada grado de intervalo en la cilíndrica tangente, y $\frac{2\pi R \,.\, \cos\varphi_o}{360}$ en la penetrante en el paralelo φ_o.

En una cuadrada tangente, para trazar las líneas de igual rumbo de una rosa de vientos dibujada sobre un punto equinoccial, donde, como queda dicho, son nulas las deformaciones angulares, bastaría calcular las representaciones z' de los azimuts para los distintos rumbos z de la rosa, variando sucesivamente las latitudes en un cierto incremento. Si, por ejemplo, queremos trazar la loxodrómica de rumbo 45° (N-$45°$-E), se hará uso de la fórmula $\operatorname{tg} z' = \operatorname{tg} z \,.\, \sec\varphi$, y se encuentran los valores aproximados siguientes:

Latitudes φ	Angulo en la carta	$Z' - Z$
10°	$Z' = 45° 20'$	20'
20°	$Z' = 46° 45'$	1° 45'
30°	$Z' = 49° 06'$	4° 06'
40°	$Z' = 52° 32'$	7° 12'
50°	$Z' = 57° 22'$	12° 02'
60°	$Z' = 63° 34'$	18° 14'
70°	$Z' = 71° 16'$	25° 56'
80°	$Z' = 80° 08'$	35° 12'
90°	$Z' = 90°$	45°

Estas cifras nos proporcionan el trazado de la figura 6.

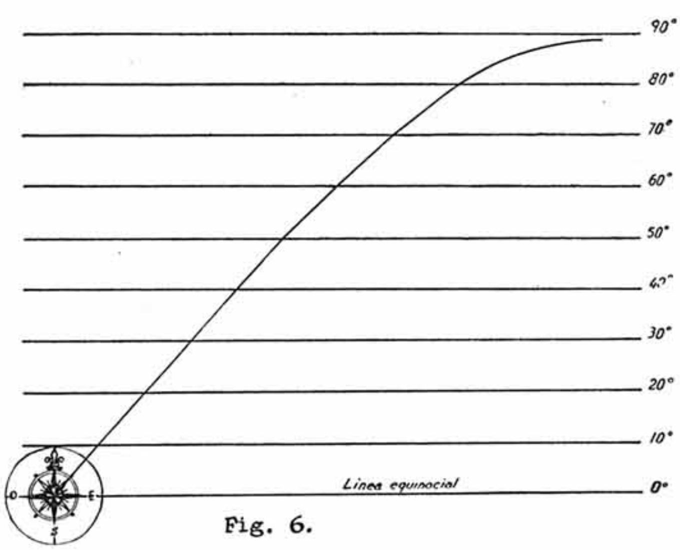

Fig. 6.

En el dibujo hemos conservado, a propósito, la Flor de Lis, indicadora del Norte, para recordar de pasada su origen histórico, interesante aunque pueril, pues fué debido a un adorno casual del copista en el cruce de la flecha indicadora del polo Norte, y la inicial T de su viento, llamado "tramontano" en las Cartas Mediterráneas.

Sólo en los cuatro rumbos cardinales N., S., E. y O. se representan los azimutes en su verdadero valor terrestre.

Las grandes diferencias que se observan sobre el rumbo original, a medida que se aumentan las latitudes, son también función de aquel para un cierto valor de φ, correspondiendo la máxima a los valores de z que verifiquen la ecuación:

$$\operatorname{tg} z = \pm \sqrt{K_1 / K_2} = \pm \sqrt{\cos \varphi}\,,$$

que nos indica que a medida que aumenta la latitud φ las máximas deformaciones angulares $z' - Z$ se verifican en rumbos más próximos a la dirección N. S.

La loxodrómica en la Carta siempre será asintótica a la transformada del polo (es decir, $Z' = 90^\circ$), lo que confirma la idea teórica de que con loxodrómicas (que no sean meridianos) jamás puede arribarse a los puntos polares.

Se deduce del anterior cuadro de correspondencias entre latitudes y deformaciones angulares para el rumbo 45°, que la Carta equidistante puede suponerse isógona o de loxodrómicas rectas para representar fajas estrechas de poca diferencia de latitud sobre el paralelo de penetración o el Ecuador. Tal es el caso del mar Mediterráneo, de representación muy práctica en plana equidistante sobre superficie cilíndrica penetrante en el paralelo medio de 37° 30', que da lugar a diferencias máximas inferiores a 8° de latitud, en las que corresponde la máxima deformación angular para el rumbo Z de la ecuación:

$$\operatorname{tg} z = \pm \sqrt{K_1 / K_2} = \pm \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_o}} = 0{,}941,$$

que da un valor de $Z = 43^\circ\ 18'$, es decir, muy próximo a los 45° que hemos considerado en la confección del citado cuadro.

Dentro, pues, de los límites del Mediteráneo, la deformación angular máxima no llegaba a 20' (totalmente despreciable) partiendo de una rosa de vientos dibujada sobre el paralelo medio de 37° 30', y podían suponerse sin error apreciable de trazado recto las líneas de igual rumbo. Del mismo modo las deformaciones "locales" de los puntos costeros eran muy pequeñas y hacían aceptable tal Carta como portulano. Pero esta representación curva de las líneas de rumbo fué un gran inconveniente en cuanto la navegación exigió largas y difíciles rutas que necesitaban una exactitud que la "Cuadrada equidistante" no podía satisfacer, y, sobre todo, las deformaciones angulares en el contorno de las costas llegaba a ser tan grande que perdía todo valor descriptivo. No fueron ajenos a este problema los españoles, que tanto han influído en las artes y ciencias náuticas. "El maestro" Pedro Medina, en su "Arte de Navegar" (1545), y el celebrado Martín Cortés, en su breviario "De la esfera y de la arte de navegar" (1546) (1), ya denunciaron este último defecto y la necesidad de una Carta que, permitiendo el trazado recto de las loxodrómicas, conservase los ángulos en el perfil de costas.

(1) **"Europa aprendió a navegar en libros españoles". Contribución del Museo Naval a la Exposición del Libro del Mar.—Barcelona, 1943.—Guillén Tato.**

CARTA MERCATOR

Era precisa, pues, una representación isógona en la que el módulo lineal de reducción fuese independiente del azimut.

Con este objeto apareció la Carta, que fué construída y editada por Gerarso Kauffman en 1569, "Para uso de los navegantes". Llevado de la moda y afán latinizante de la época, que tanto ha complicado en algunos casos ciertas identificaciones, tradujo su apellido por Mercátor, apelativo que se da a su Carta por más que se le discutiese su paternidad entre E. Wright por el hecho de que éste, en 1589, escribiera sobre su trazado y cálculo.

Esta proyección cumplió entonces perfectamente su cometido, toda vez que no solamente hacía rectas las líneas de rumbo, sino que por su isogonismo y en trozos pequeños (teóricamente diferenciales), conservaba la forma exacta de las costas, aunque las deformaciones en Cartas generales de grandes zonas falsean notablemente la configuración relativa en distintas latitudes, a pesar de lo cual sigue siendo de gran utilidad como elemento auxiliar de navegación.

¿Cómo consiguió Mercátor la isogonía conservando la sencilla construcción "plana", base de su mundial aceptación? Haciendo que el módulo de reducción lineal sea constante en un punto para todas las direcciones, es decir, independiente del azimut, puesto que entonces en la repetida fórmula anterior

$$\operatorname{tg} z' = \frac{K_2}{K_1} \cdot \operatorname{tg} z,$$

$\frac{K_2}{K_1}$ será igual a 1, y por tanto siempre $Z = Z'$.

Para ello basta lograr que las diferencias de latitud se deformen en la Carta en la misma proporción que lo hacen las diferencias de longitud.

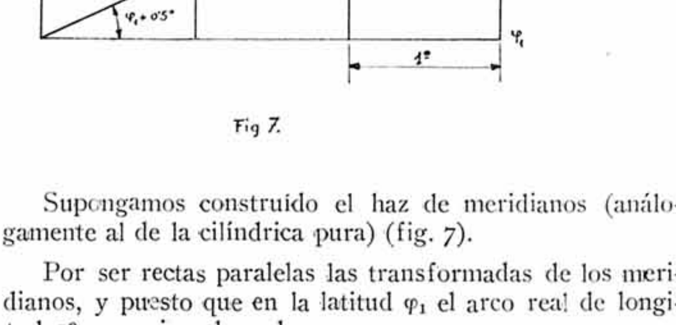

Fig 7.

Supongamos construído el haz de meridianos (análogamente al de la cilíndrica pura) (fig. 7).

Por ser rectas paralelas las transformadas de los meridianos, y puesto que en la latitud φ_1 el arco real de longitud 1°, por ejemplo, vale

$$\frac{\pi \cdot R}{180} \cdot \cos \varphi,$$

el módulo lineal en el paralelo φ será

$$K_2 = \frac{\pi R}{180} \Big/ \frac{\pi \,.\, R}{180} \,.\, \cos\varphi = \sec\varphi,$$

valor independiente de la longitud y que se verifica a lo largo del paralelo φ.

Esto quiere decir que los grados de paralelo vienen en la Carta multiplicados por *sec* φ. Si se hace lo mismo con pequeños incrementos de latitud, suponiendo una latitud media local, se obtendrá aproximadamente que $K_1 = sec\,\varphi$, y, por tanto, los incrementos de la latitud vienen también en la Carta multiplicados por *sec* φ. Puesto que φ es una determinada latitud, ha de operarse con incrementos de meridiano elementales para dar rigor matemático al tomar la media como latitud local, y en este caso es indudable la isogonía, toda vez que la representación en carta de un área elemental es otra en la que varían proporcionalmente sus lados. Es decir, que la relación dimensional entre grados de latitud y longitud en la Tierra está conservada en la Carta, con el artificio de que mientras en el Globo un grado de latitud de meridiano es constante y el de longitud decrece hacia los Polos, en la Carta Mercátor el que permanece constante es el grado de longitud, aumentando el de latitud.

Sin rigor matemático puede conseguirse con bastante exactitud, huyendo de integraciones, con la construcción gráfica que indica la figura 7, siempre que los incrementos de latitud sean pequeños (de un grado, por ejemplo).

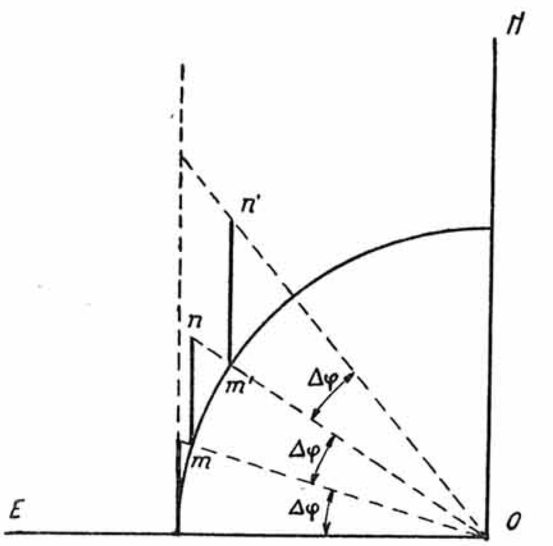

Fig. 8.

La teoría de la Carta Mercátor se ve claramente expuesta en la figura 8, que representa un corte de la construcción gráfica de la figura anterior, puesto que los trozos $m\,n$ son los mismos que los $A\,C$ de la figura 7. Los incrementos de latitud quedan "reducidos" respecto a la proyección punteada que corresponde a la cilíndrica pura. Considerando rectilíneos los pequeños arcos correspondientes a los incrementos de latitud $\Delta\,\varphi$, y puesto que el ángulo $n\,m\,m'$ es igual a la latitud local φ, $m\,n = \Delta\,\varphi\, sec\,\varphi$, fórmula que, repetimos, tiene exacto rigor cuando $\Delta\,\varphi = d\,\varphi$, es decir, para incrementos diferenciales de latitud. La suma de estos trozos $m\,n$ nos dará las "latitudes aumentadas" para los distintos valores de φ, sumando desde $\varphi = o$ hasta el valor considerado, lo que nos indica que la representación del paralelo φ_o corta la red de meridianos a una distancia del Ecuador tal, que

$$\text{Latitud aumentada} = \int_o^{\varphi_o} d\,\varphi \,.\, \sec\varphi =$$

$$= \frac{1}{M} \log \operatorname{tg} \left(45^o + \frac{1}{2}\,\varphi_o\right) =$$

$$= \frac{1}{M \,.\, \operatorname{sen} 1'} \log \operatorname{tg} \left(45^o + \frac{1}{2}\,\varphi_o\right) \text{ millas} =$$

$$= 7915{,}7046741 \,.\, \log \,.\, \operatorname{tg} \left(45^o + \frac{1}{2}\,\varphi_o\right). \qquad [\beta]$$

Siendo M el factor de conversión de logaritmos hiperbólicos a decimales, o relación entre éstos y aquéllos, que tiene un valor constante igual a 0,434294.

Si se toma como unidad la milla, o arco de un minuto central, bastará dividir por su medida, que dada la pequeñez del ángulo puede sustituirse por el *sen* 1', quedando expresada en millas, forma en que vienen tabuladas las *Tablas de latitudes crecientes,* aprovechándose la escala ecuatorial de millas en las construcciones gráficas.

Los sumandos de esta integración son cada vez mayores a medida que aumenta φ y, por tanto, su secante, razón por la que a estas "partes meridionales" se las llame "latitudes crecientes".

Ya anteriormente se indicó, aunque en forma diferencial [α], el empleo de estas partes meridionales (*C B,* fig. 4), para hallar los alargamientos en longitud correspondientes a un rumbo y latitudes de partida y llegada determinados, cuya integración nos resuelve el problema en una ruta finita por la fórmula [α],

$$P = \int_B^C d\,\varphi \,.\, \sec\varphi = \text{alargamiento en longitud.}$$

El español Mendoza calculó a finales del siglo XVIII sus célebres Tablas de partes meridionales, universalmente conocidas, utilizables para la construcción de la Carta Mercátor, mientras, en cambio, el cálculo de la longitud alargada, tradicional problema del navegante, se había solucionado por medios cronométricos y no hacía tan necesarias para ello las citadas Tablas.

Es sobradamente conocido el uso que de las mismas puede hacerse en la construcción de Cartas Mercátor, y no hemos de insistir en ello. Llamaremos la atención, sin embargo, sobre la aparente anomalía que presenta, por ejemplo, la correspondiente lectura a los 10° de latitud, ó 600 primeros minutos, que a primera vista parece debería ser, conforme a su apelativo de latitudes crecientes, mayor que 600 y nunca el valor que se lee de 599,1 millas Esto es debido a que la forma real de la Tierra, con su achatamiento, da para la milla valores variables, que van aumentando con la latitud, como indica la tabla siguiente:

Latitudes	Millas en metros
0 grados	1.842,7
5 »	1.842,9
10 »	1.843,3
15 »	1.844
20 »	1.844,9
25 »	1.846,1
30 »	1.847,4
35 »	1.848,9
40 »	1.850,5
45 »	1.852
50 »	1.853,8
55 »	1.855,4
60 »	1.856,9
65 »	1.858,3
70 »	1.859,4
75 »	1.860,4
80 »	1.861,1
85 »	1.861,5
90 »	1.861,7

Introduciendo este achatamiento terrestre $e^2/2$, la fórmula exacta es:

$$\text{Latitud aumentada} = 1/\text{sen } 1' \left[\frac{1}{M} \log \text{tag} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi_o\right) - \right.$$

$$\left. - \left(e^2 \text{ sen } \varphi_o + \frac{1}{3} e^4 \text{ sen}^3 \varphi_o + \ldots\right)\right].$$

Este segundo término introducido es un cierto número de millas que han de restarse, dando como resultado las 599,1 millas de 0° a 10° de latitud, a pesar de que la expresión [β] daba 603,69 millas aproximadamente. Es de notar que entre 0° y 10° la sec φ varía poco de la unidad. A partir de 10° los incrementos de latitud van siendo mayores que sus reales en el Globo, llegando para $\varphi = 60°$ al doble de su valor, debido a que sec $60° = 2$, y aumentando sucesivamente. Por esta razón la Carta Mercátor es impracticable para grandes latitudes, y suelen ser limitadas a 72° N. y 72° S.

Si no se poseen Tablas de partes meridionales, puede recurrirse a la primitiva construcción adicional, indicada en la figura 7, para incrementos de latitud, que no deben ser superiores a 1° para no incurrir en demasiado error.

La medida de distancias en esta Carta es igualmente problema conocido y deducido de su teórica construcción.

Analíticamente las distancias loxodrómicas en direcciones oblicuas $D E$ (fig. 9) pueden hallarse teniendo en cuenta que existirá proporción entre dos valores reales y sus representaciones rectas mercatorianas; la diferencia de latitudes o latitud variada de D a E tiene un valor meridiano, que viene dado en su real medida por el segmento abarcado $D d$ sobre la escala ecuatorial por el número de millas leído, de D a M, directamente en la escala de latitudes. Este segmento $D M$ vale

$$\int_M^D d\varphi \cdot \sec \varphi$$

en escala ecuatorial, y es calculable exactamente en las Tablas de latitudes crecientes, pudiendo establecerse la proporción

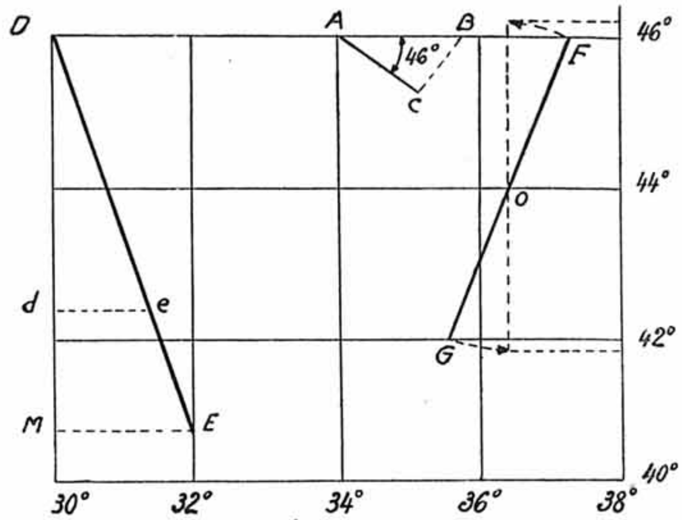

Fig. 9.

$$\frac{D d}{D M} = \frac{x}{D E},$$

siendo x el verdadero recorrido en millas.

UTILIDAD ACTUAL DE LA CARTA MERCATOR

Plumas autorizadas aseguran que esta Carta no ha perdido actualidad después de sus tres siglos y medio de existencia y, aunque no pueda pensarse en su empleo exclusivo, es todavía un medio auxiliar conveniente, y aun necesario, en el trazado y preparación de rutas.

Es cierto que el enorme tráfico aéreo de E. a W., y viceversa, en latitudes generalmente superiores a 40°, hace de la loxodrómica en tales casos una línea inoperante, aun para relativamente cortas distancias, al buscar el navegante la geodésica que le aproxima al polo de su hemisferio.

Sin embargo, la Carta Mercátor conserva su rango cuando partiendo de una previa ruta ortodrómica de difícil navegación se divide en trozos de loxodrómica de distintos rumbos en navegación circunscrita al círculo máximo ideal.

Cuando la ruta se aproxima a un meridiano o se alarga en zonas ecuatoriales, la fácil construcción de la Carta y sencillez de operaciones gráficas, así como la práctica navegabilidad a rumbo en estas circunstancias, la hacen muy aconsejable. Aunque en rutas próximas a meridianos, por tratarse de grandes variaciones de latitud y, por tanto, de *sec* φ, se falsean notablemente, como ya se dijo, los valores descriptivos en el conjunto total de Cartas generales (punto menor), lo que es un grave inconveniente didáctico, no tiene mayor importancia para el navegante, toda vez que en recaladas o reconocimientos locales en que φ es prácticamente constante, el dibujo es, para tales efectos, reproducción fiel de la parte objetiva. En alargamientos próximos a la línea equinoccial la reducida de Mercátor cobra gran utilidad y es asimilable a una Carta Kahn.

El esclarecimiento completo de sus posibilidades haría extender demasiado estas líneas y fuera ya de los límites cartográficos, razón por la que haremos punto final estableciendo nuestra creencia de que la Carta Mercátor, después de tantos años de empleo clásico, no está totalmente superada.