Método gráfico de representación conforme y sus aplicaciones a la Aerodinámica

Por JOSE M.ª JANSA GUARDIOLA

La teoría de la representación conforme ha surgido de la feliz confluencia de dos corrientes del pensamiento, procedentes de regiones de la Matemática, sin conexión ninguna entre sí al parecer, y ha conducido en Física a soluciones en dominios también muy heterogéneos, hasta llegar a introducirse, por último, en la Técnica, muy especialmente en los trabajos de Aerodinámica aplicada.

Por una parte, en Geometría fué sistematizada desde antiguo la teoría de las figuras semejantes, traducción, en lenguaje matemático, de un fenómeno empírico: la imagen óptica. La *imagen* óptica se considera como una *representación*, en sentido vulgar, de un *objeto;* en este sentido, una figura puede representar otra figura cuando ambas tienen la misma *forma*. El concepto de *forma* es demasiado impreciso, y el primer progreso realizado consistió en sustituirlo por el de *semejanza,* completamente riguroso y exactamente definido. Durante muchos siglos no se concibió otro modo de representación más que la representación por semejanza, confundiendo ambos términos. Prueba de ello es la historia de la Cartografía: se trataba de representar la superficie de la Tierra, con sus mares y tierras, y sobre todo, se trataba de representar la línea de costa, de tanta importancia para la navegación; es decir, se trataba de representar unas figuras contenidas en la superficie terrestre mediante otras figuras dibujadas sobre una hoja de papel. Pues bien: se sobreentendió que la figura-imagen debía ser geométricamente semejante a la figura-objeto; el mapa debía ser simplemente una reducción de la realidad; el mapa de España, por ejemplo, debía tener la misma forma que tiene nuestro país. Por desgracia, la Naturaleza no quiso sujetarse a esta exigencia: mientras que los mapas de pequeñas comarcas podían salir bien, los de grandes extensiones del planeta no resultaban; era fácil darse cuenta, porque las imágenes de una misma región no tenían la misma forma si *caían* en el centro del mapa o si caían hacia sus bordes. Era conveniente ensanchar la idea de *representación,* que hubo de dejar de ser sinónima de la de *semejanza.* Sin embargo, el espíritu no se resignaba a renunciar por completo a esta condición; si no podía ser para la imagen en conjunto, había que conservarla, por lo menos, para fragmentos suficientemente pequeños: esa es la *conformidad* o semejanza infinitesimal, expresión moderna, pero intuición antigua, puesto que las proyecciones de Hyparco y de Mercator son representaciones *conformes.*

Lo que empezó por necesidad puede proseguir sin ella: si una vez nos hemos visto obligados a tomar como *representación* de una figura otra que no es su semejante, somos dueños de suprimir esta restricción en todos los casos. En particular, cuando se trata de figuras planas la restricción no existe: la imagen de una figura plana puede ser siempre otra figura semejante; pero el afán de generalizar nos impulsa a admitir también como imágenes posibles otras muchas figuras que no lo sean. En Geometría se han ido introduciendo toda una serie de métodos de transformación de figuras, que permiten mirar como imagen de una figura cualquiera su transformación por alguno de dichos métodos. De este modo, el concepto de *representación,* de sinónimo del de *semejanza,* pasa ahora a ser sinónimo del de *transformación.* Ambos adquieren así una extraordinaria generalidad, tan excesiva que resulta conveniente restringirlos de nuevo para darles mayor utilidad práctica. De entre todas las representaciones posibles se consideran, pues, en particular, las representaciones conformes. Una representación conforme es la transformación de una figura en otra, o de un plano en otro, de tal manera que a cada punto de la primera corresponde un punto de la segunda, y que el ángulo formado por dos líneas cualesquiera de aquella es igual al formado por sus correspondientes, de donde resulta que dos triángulos homólogos tienden a ser semejantes cuando sus dimensiones tienden a cero, y a cada par de puntos homólogos se puede asociar una razón de semejanza variable de un modo continuo al pasar de un lugar a otro. Además de la semejanza ordinaria, caracterizada por la constancia de dicha razón en todo el plano, otras transformaciones usadas en Geometría elemental, como la inversión, son también conformes.

* * *

Por otra parte, en el dominio del análisis se planteó el problema de la representación gráfica de las funciones de variable compleja. Visto el éxito alcanzado en el campo de las funciones reales con las representaciones gráficas, sobre todo en la técnica, era natural buscar la representación equivalente cuando se trata de variables complejas. En el caso de las funciones reales, la representación se funda en la correspondencia establecida entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de una recta y en la que se puede establecer entre los dos conjuntos de puntos de dos rectas distintas, que admite infinitas posibilidades. Es bien sabido que para hacer más intuitivo el resultado se disponen las dos rectas, soporte de las escalas, según el esquema de los ejes cartesianos, y se asocia a cada par de puntos correspondientes un punto del plano, obteniéndose una curva, cuyas particularidades ponen en evidencia a simple vista las principales propiedades de la función. En el caso de la variable compleja, la correspondencia primaria existe entre números y puntos del plano, y por consiguiente, la correspondencia funcional debe establecerse entre dos planos. También esta coordinación admite infinitas posibilidades, y por su medio se hace posible, por consiguiente, una cierta representación intuitiva de toda clase de funciones. Sin embargo, la sustitución del par de puntos correspondientes por un punto único, que se consigue con las variables reales mediante el artificio de las coordenadas, ahora no resulta posible y hay que contentarse con detenerse en una fase del desarrollo equivalente al simple acoplamiento de las dos escalas; es decir, que si queremos representar gráficamente una función de variable compleja, debemos utilizar dos planos superpuestos o yuxtapuestos: uno para la variable independiente y otro para la función. Ahora bien; si en los planos no dibujamos nada, no nos dará ninguna idea de la correlación que pretendemos materializar, del mismo modo que si colocásemos dos rectas juntas sin diferenciar ninguno de sus puntos, no nos darían la menor idea de ninguna función real. Así como entonces señalábamos una serie de puntos particulares, escogidos arbitrariamente sobre la escala de la variable independiente y condicionados por éstos mediante la ley de dependencia sobre la escala de la función, así ahora señalaremos un conjunto de puntos particulares, escogidos arbitrariamente sobre el plano de la variable independiente, que por consiguiente constituirán una figura plana arbitraria, y condicionados por éstos mediante la ley de dependencia sobre el plano de la función, constituyendo otra figura plana. La representación gráfica de la función de variable compleja queda así vinculada a la comparación de dos figuras planas relacionadas punto a punto; es decir, el problema geométrico de la *transformación* de figuras. Es claro que la representación gráfica así obtenida no es *completa,* como no lo es la de las funciones reales, limitada a la yuxtaposición de dos escalas, pues ni aquélla ni ésta agotan el campo de la variable independiente. La representación por medio de la curva cartesiana es completa, pero ahora aquí no disponemos, como ya hemos dicho, de ningún recurso equivalente a éste. Para suplir lo mejor posible a esta deficiencia, el artificio consiste en escoger la figura inicial del campo de la variable independiente, de tal manera que si no contiene *actualmente* todos los puntos del plano, contenga *potencialmente* cualquiera de ellos; la figura que mejor responde a esta condición es el cuadriculado fundamental inherente al sistema de coordenadas cartesianas, pues estrechando convenientemente las mallas de la red, podrá llegar a contener exactamente, o con tanta aproximación como se quiere, un punto dado arbitrariamente. Por tanto, la representación gráfica de una función de variable compleja se considerará satisfactoria cuando haya podido dibujarse la *transformada* de dicha red fundamental. Es fácil demostrar que la transformación geométrica que corresponde a cualquier función analítica de variable compleja es siempre una representación conforme, y recíprocamente; establecida una representación conforme cualquiera entre dos recintos, queda definida una función analítica cuyo círculo de convergencia comprende el recinto citado en la variable independiente, de donde resulta que el problema geométrico de la representación conforme y el problema analítico de la función de variable compleja coinciden, como habíamos dicho al *principio.*

Algunos ejemplos muy conocidos aclaran estos conceptos; podemos proceder en dos sentidos opuestos: o bien partiendo de una transformación geométrica (conforme) conocida, buscar la función analítica capaz de realizar la transformación, o, por el contrario, conociendo una función analítica dada, buscar la transformación geométrica que le corresponde. Así, preguntamos: ¿Cuál es la función analítica que verifica la transformación de una figura en otra semejante? Esta transformación convierte la red cuadrada fundamental en otra red también cuadrada.

Como la semejanza equivale a una homotecia (que para simplificar supondremos con centro en el origen de coordenadas) seguida de una traslación, las fórmulas de transformación serán:

$$\begin{aligned} u &= a x + c \\ v &= a y + d, \end{aligned}$$

siendo a la razón de semejanza, y c, d los componentes del vector representativo de la traslación. Estas fórmulas se condensan utilizando la notación de los números complejos en la siguiente:

$$w = a z + k \quad \left\{ \begin{aligned} w &= u + v i \\ z &= x + y i \\ k &= c + d i, \end{aligned} \right.$$

que nos dice que la función buscada es la función lineal con el primer coeficiente real. Esta última restricción se puede eliminar, pues aun cuando a sea complejo, la función lineal continúa representando una semejanza, como se comprueba observando que la transformación

$$\begin{aligned} u &= - b y \\ v &= b x \end{aligned}$$

representa una simetría con relación a la bisectriz del primer cuadrante, seguida de una homotecia con centro en el origen, y de una nueva simetría con relación al eje de ordenadas.

Recíprocamente, ¿cuál será la representación conforme que corresponde a la función $w = z^2$? Separando la parte real de la imaginaria se obtienen las relaciones

$$u = x^2 - y^2$$
$$v = 2xy,$$

que para $x =$ constante representan una parábola con su foco en el origen de coordenadas y su eje en coincidencia con el de abscisas, y para $y =$ constante otra parábola con el mismo foco y simétrica de la anterior. La figura transformada de la red cuadrada fundamental es, pues, un cuadriculado curvilíneo formado por la intersección mutua de las dos series de parábolas homofocales.

Las dos series de parábolas citadas últimamente son ortogonales entre sí; lo mismo ocurre con todos los casos, puesto que la red cuadrada fundamental debe transformarse en una red también ortogonal por la ley de la conservación de los ángulos. De aquí resulta que otro problema geométrico antiguo, el problema de las trayectorias ortogonales, viene a identificarse también en cierto modo con el de la representación conforme: todo haz de curvas junto con sus correspondientes trayectorias ortogonales, representa una posible cuadriculación del plano y por consiguiente una representación conforme de la cuadrícula fundamental. Por citar algunos ejemplos elementales recordaremos una serie de circunferencias concéntricas y el haz de radios respectivos; una serie de circunferencias y el correspondiente haz conjugado; cuatro series de hipérbolas equiláteras conjugadas dos a dos; una serie de elipses y una de hipérbolas homofocales, etc. Las funciones analíticas que definen la transformación de la red cuadrada fundamental en cada una de las redes citadas son sencillas y muy conocidas, a saber: las funciones

$$w = e^z; \quad w = \frac{1}{e^z + 1}; \quad w = \sqrt{z} \quad \text{y} \quad v = \cos z,$$

respectivamente.

En general, el camino a seguir para obtener la función que verifica la transformación del cuadriculado fundamental en otro cuadriculado dado cualquiera, cuando no es conocida, será el siguiente: Sea $u = F(v)$ la ecuación de una de las familias de curvas que definen la red propuesta; u y v son las coordenadas cartesianas en el plano de la función, k es un parámetro cuyo valor numérico caracteriza cada curva particular. Sea $w = \Phi(z)$ la función buscada con

$$w = u + vi; \quad z = x + yi,$$

siendo x y las coordenadas cartesianas en el plano de la variable independiente. Pondremos

$$u = \varphi(x, y)$$
$$v = \psi(x, y),$$

siendo φ, ψ funciones armónicas conjugadas. Si queremos que la curva $F(v)$ sea la transformada de una paralela al eje de las x, deberemos poner

$$y = k_1$$
$$u = \varphi(x, k_1)$$
$$v = \psi(x, k_1),$$

y por consiguiente:

$$\varphi(x, k_1) = F\big(\psi(x, k_1)\big).$$

Uniendo a esta ecuación las dos siguientes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial k_1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial k_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

que expresan que φ y ψ son funciones conjugadas, se obtiene un sistema que, salvo las dificultades de integración, resuelve el problema.

En la práctica muchas veces no será preciso conocer la forma analítica de la función Φ, bastando establecer una correspondencia cualquiera entre los cuadrados de una red ortogonal curvilínea y los de la red rectilínea fundamental, excluyendo, naturalmente, las regiones próximas a los puntos singulares. Lo más cómodo será numerar dichos cuadrados. Generalizando el procedimiento que siguen los dibujantes para ampliar una figura mediante dos redes cuadradas semejantes, se hace muy fácil la transformación de una figura cualquiera, trasladándola de la cuadrícula rectilínea a la curvilínea. En las figuras adjuntas se encontrarán algunos ejemplos.

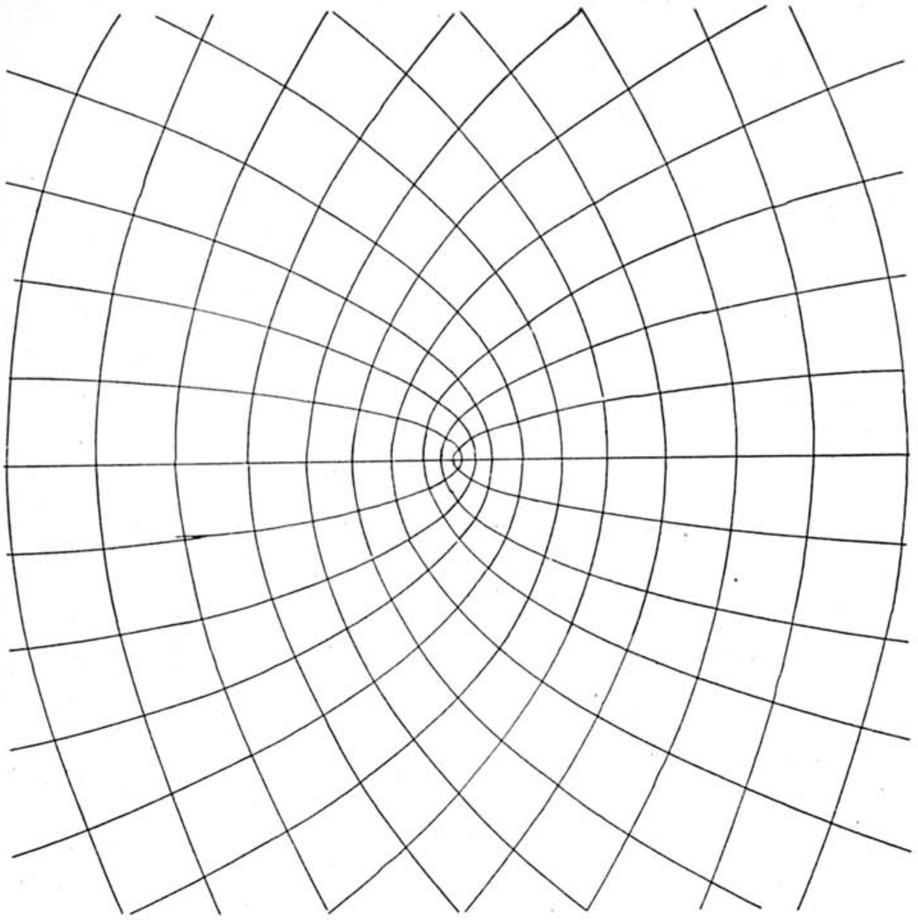
Por otra parte, también resulta fácil multiplicar indefinidamente el número de redes ortogonales nuevas partiendo de una ya conocida; cada una de estas nuevas redes permite una nueva transformación de la figura, y corresponde a una nueva función analítica conocida o desconocida. El procedimiento consiste en partir de un punto cualquiera de la red dada trazando las trayectorias isogonales de inclinación arbitraria con relación a uno de los sistemas de curvas, y luego con la misma inclinación con relación al otro. Por ejemplo, es muy sencillo el trazado de las líneas diagonales. He aquí algunos ejemplos gráficos. Disponiendo de una buena colección de redes ortogonales distintas, se pueden aparear dos de ellas directamente prescindiendo de la red cuadrada fundamental y considerarlas también como transformación una de otra. La función que verifica esta transformación es, naturalmente, distinta de las dos que transforman la red fundamental en cada una de ellas, si bien se relaciona con ambas por el algoritmo de la función de función: así, por ejemplo, la función $w = e^z$ transforma la red fundamental en una red circular concéntrica; la función

$$w = \frac{1}{z + 1}$$

transforma ésta en un haz y la serie correspondiente de círculos, pues la función

$$w = \frac{1}{e^z + 1}$$

transforma la red fundamental en la última citada. En particular, la función inversa transforma la red obtenida, de nuevo, en la fundamental: así, la función $w = \log e^z$ permite volver de la serie de círculos concéntricos a la red cuadrada fundamental. Ella, en cambio, transforma dicha red fundamental en una red que ya no es sencilla, como las



$W = Z^2$

Fig. 1

anteriores, pues sus curvas tienen ecuaciones cartesianas de forma trascendente. Se pueden construir por puntos por el procedimiento, recordado antes, que se usa en dibujo para trasladar una figura cualquiera de una cuadrícula a otra. Como curiosidad, puede comprobarse que las parábolas de la figura 1 engendran por este procedimiento las hipérbolas de la figura 4, pues las funciones correspondientes

$$w = z^2 \quad \text{y} \quad w = \sqrt{z}$$

son inversas.

Las redes ortogonales consideradas se pueden interpretar, naturalmente, como curvas de nivel y líneas de máxima pendiente de una superficie; escogiendo como curvas de nivel el sistema de líneas transformadas del haz de paralelas al eje real del plano de la variable independiente, resulta que la sección vertical de dicha superficie, producida por el plano $v = o$, representa la gráfica de la misma función en el campo real. Así, la superficie de la figura 2 da lugar a la curva exponencial; la de la figura 1, a una parábola, etc. Esta observación puede facilitar a veces el trazado de las curvas.

Como vemos, todas las funciones elementales sirven para obtener representaciones conformes, por lo cual el número de posibilidades sencillas es inagotable. Toda función de esta clase se descompone en dos funciones reales de dos variables, también elementales, sin más que separar la parte real y la parte imaginaria. Recíprocamente, con dos funciones de dos variables también se puede siempre componer una función de variable compleja; pero en general el resultado no será una función analítica, y la transformación geométrica que representa no será, por consiguiente, conforme. Si llamamos $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ a las dos funciones reales que combinadas dan lugar a la función compleja, es sabido que la condición de conformidad o semejanza infinitesimal, que equivale a la conservación de los ángulos, se traduce analíticamente por las dos ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

que enlazan dichas funciones entre sí y excluyen la elección de funciones completamente arbitrarias; fijada una de ellas, la otra queda también definida. Consecuencia inmediata es que ambas funciones satisfacen a la ecuación de Laplace; es decir, que son funciones armónicas conjugadas. He aquí, pues, otro problema, que parecía bien alejado del nuestro y que viene también a identificarse con él: la integración de la ecuación de Laplace. Cuando se tiene una solución de esta ecuación puede formarse inmediatamente otra tomando la función conjugada. Es muy fácil formar funciones que satisfagan a la ecuación de Laplace; con cualquiera de ellas y su conjugada correspondiente es posible construir una función analítica, o, dicho con otras palabras, obtener una representación conforme. Todo el problema queda reducido a buscar la función conjugada de una función conocida; por ejemplo, sea $\varphi = x^2 - y^2$ (que satisface a la ecuación de Laplace), cuya conjugada resulta ser $\psi = 2\,x\,y$; de donde

$$w = x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,i = (x + y\,i)^2 = z^2.$$

Todo esto tiene una gran importancia para nosotros, porque la ecuación de Laplace es fundamental en muchísimos capítulos de la Física y en particular en Aerodinámica.

La circulación de un flúido en régimen permanente se caracteriza por el correspondiente campo estacionario de velocidades, el cual admite una representación gráfica haciendo uso de las llamadas líneas de corriente, que en este caso coinciden con las trayectorias. Por todo punto del campo pasa una línea de corriente que es tangente a la velocidad en el mismo punto. Siempre que sea posible la reducción a dos dimensiones, el problema se simplifica considerablemente: todas las líneas de corriente son curvas planas. Cuando todas estas líneas de corriente forman un sistema de curvas obedeciendo a una misma ecuación con un solo parámetro $\psi(x, y) = k$, entonces, en virtud de la ecuación de continuidad, las derivadas parciales de esta función con relación a las coordenadas pueden igualarse a las componentes de la velocidad:

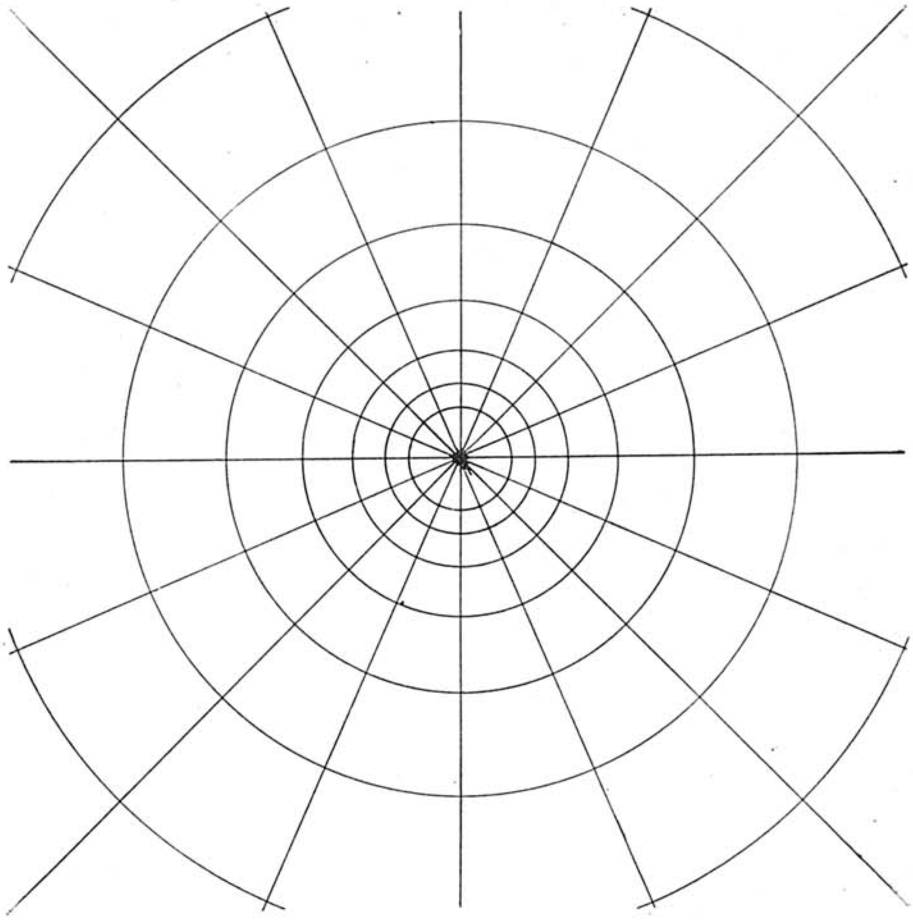
$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Esta función es la llamada función de corrientes. Recordando que el flujo de flúido que atraviesa un elemento de superficie (de línea, en dos dimensiones) normal a la línea corriente, cuando se puede despreciar la variación de densidad, es proporcional al valor absoluto de la velocidad, resulta de las ecuaciones precedentes que el flujo encerrado entre dos líneas de corriente es constante y puede igualarse al incremento del parámetro k; por esto se dice que un campo de velocidades que deriva de una función de corrientes es conservativo. Consecuencia muy importante para la representación gráfica es que si se dibujan las líneas de corriente correspondientes a valores sucesivos del parámetro k que varíen en progresión aritmética, resulta que la distancia entre dos curvas consecutivas es inversamente proporcional a la velocidad; es decir, que las líneas de corriente se condensan en los puntos del campo donde la velocidad es grande y se espacían donde es pequeña.

Cuando además la circulación sea irrotacional, es decir, cuando el torbellino es nulo en todo punto del campo, se verificará la ecuación

$$\frac{\partial V x}{\partial y} = \frac{\partial V y}{\partial x},$$

de la cual se deduce que la función de corriente es armónica. En efecto:



$w = e^z$

Fig. 2

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial V y}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Además se podrá introducir la función conjugada φ, que por definición cumplirá las condiciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

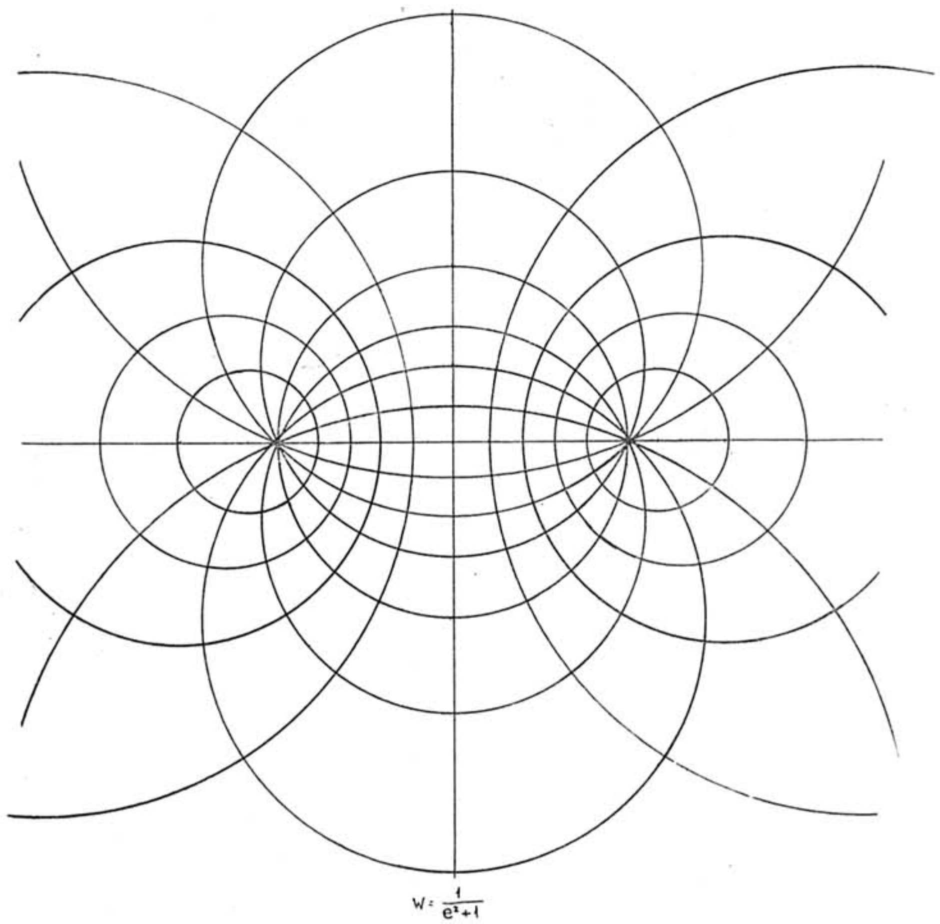
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

equivalentes a estas otras:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V x$$

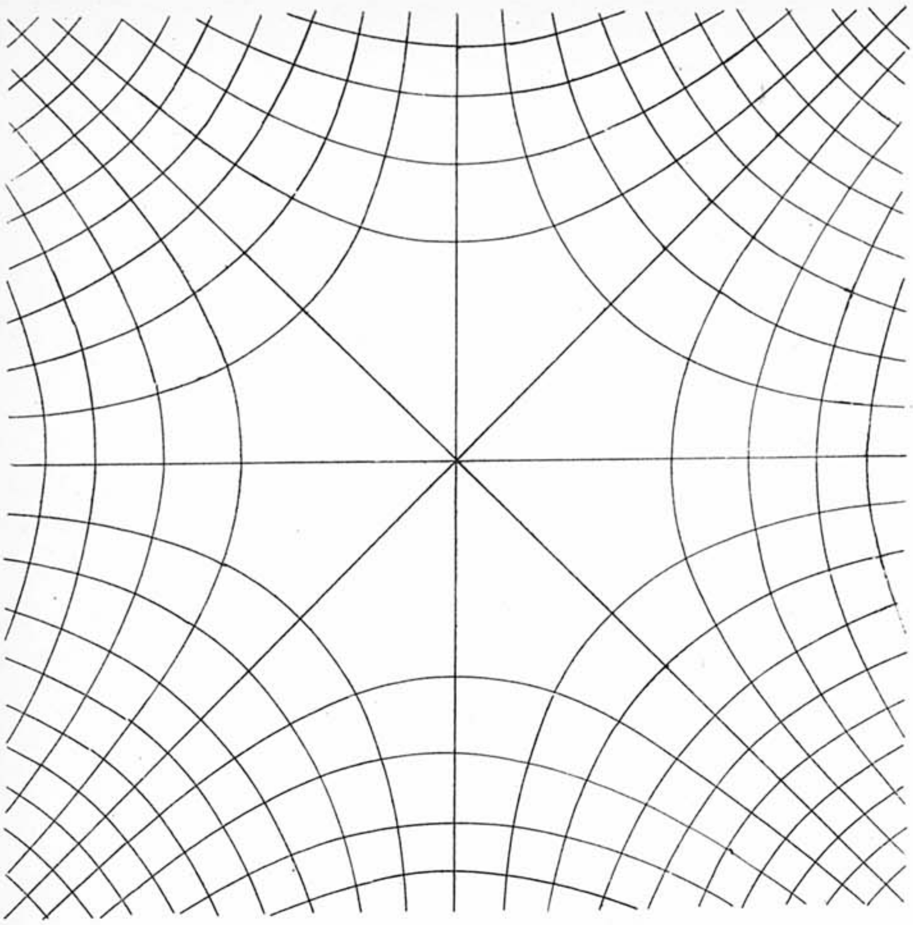
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V y.$$

La función φ no es otra cosa que el potencial de velocidades. Podemos, pues, definir una función compleja $\Phi = \varphi + \psi i$, que suele llamarse potencial complejo, cuya parte real es el potencial escalar y la imaginaria la función de corrientes. Esta función, por ser analítica, establece una representación conforme, que transforma la red



$W = \frac{1}{e^z + 1}$

Fig. 3



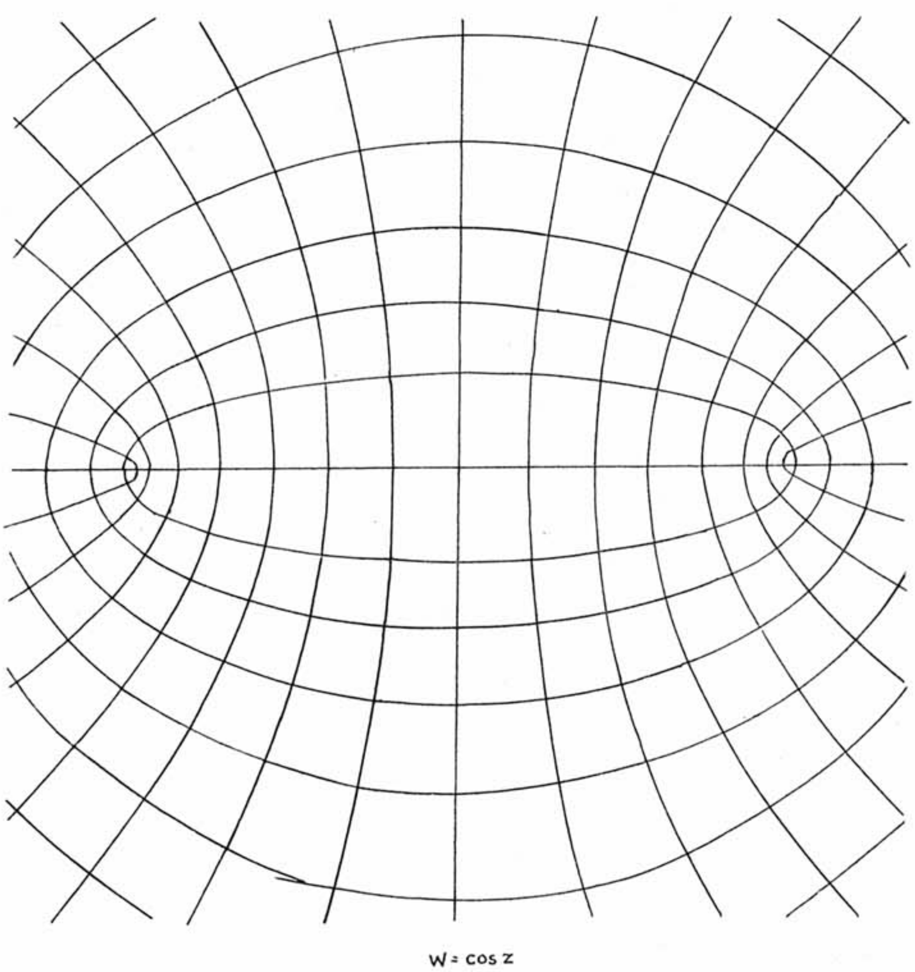
$W = \sqrt{z}$

Fig. 4.

fundamental del plano $x\,y$ en la red de líneas de corriente y sus correspondientes líneas equipotenciales. Por consiguiente, cualquiera de las redes de curvas ortogonales deducidas por representación conforme de la red fundamental, o lo que viene a ser lo mismo, cualquier función analítica que transforma el plano $x\,y$ en el plano $u\,v$, proporciona un esquema de circulación posible.

El problema de trazar espectros aerodinámicos en todos los casos de circulación permanente, irrotacional y conservativa, puede darse, pues, por resuelto. No se crea, sin embargo, que cualquier sistema de curvas, con sus respectivas trayectorias ortogonales, constituya una circulación de este tipo, pues con una distribución dada de líneas de corriente existen infinitas circulaciones posibles, de las cuales una sola es irrotacional. Así, por ejemplo, de entre todos los movimientos circulares, sólo el representado en la figura 2 es irrotacional. Con el convenio hecho respecto al intervalo entre dos líneas de corriente consecutivas, es fácil dibujar la figura correcta, teniendo en cuenta que estas curvas, juntamente con las líneas equipotenciales, han de formar una red de mallas sensiblemente cuadradas (deben tender a serlo exactamente cuando sus dimensiones tienden a cero), siempre que se establezca para las líneas equipotenciales, como es costumbre, un convenio análogo, deducido también de la ecuación de continuidad, y con arreglo al cual la velocidad en un punto es inversamente proporcional a la separación entre dos líneas equipotenciales consecutivas cuando se toma como equidistancia de éstas la unidad.

Considerando, por otra parte, que suprimiendo o solidificando una parte del campo de líneas de corriente limitada por una de ellas, el campo restante subsiste sin variación, se tiene el medio de obtener la circulación alrededor de cualquier obstáculo cuyo perfil coincida sensiblemente con alguna línea de corriente de alguno de los campos dibujados de antemano. Al hacer eso hay que tener presente que toda red ortogonal de mallas cuadradas admite dos interpretaciones distintas, pues cualquiera de los dos sistemas representará las líneas equipotenciales. Así, la repetida figura 2 tanto puede servir para representar un movimiento de rotación irrotacional (trayectorias circulares, líneas equipotenciales radiales) como un manantial o un sumidero (trayectorias radiales, líneas equipotenciales circulares). La circulación alrede-



$W = \cos z$

Fig. 5

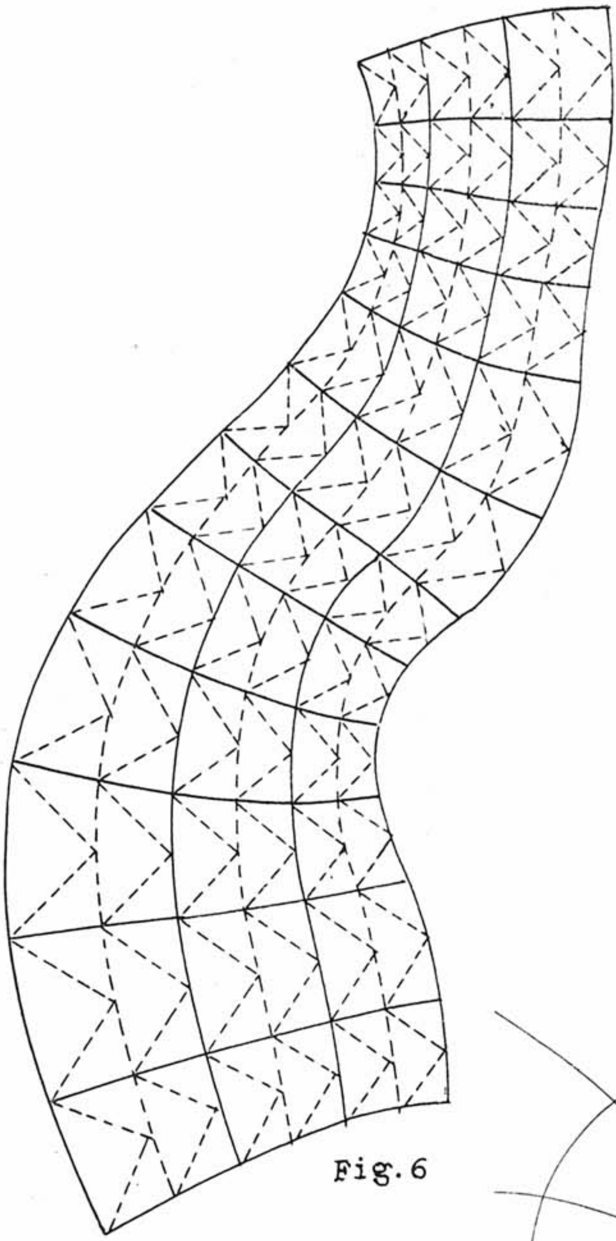


Fig. 6

do, o línea de corriente con la distribución de velocidades a lo largo del mismo. De esta distribución se deduce la del potencial. Marquemos a lo largo del filete la escala de valores del potencial de unidad en unidad; por cada punto de división tracemos dos segmentos inclinados un ángulo de 45°; unamos entre sí por una línea continua todos los puntos de intersección así obtenidos; tracemos, además, por los mismos puntos de división las bisectrices de los ángulos rectos, y por los puntos de intersección de éstas con la línea dibujada se repite la misma construcción; esta segunda línea obtenida es válida para el cuadriculado del campo; es la línea de corriente que sigue a la dada. De ella podrá deducirse del mismo modo la tercera, y así sucesivamente; al mismo tiempo van resultanlo prolongadas las líneas equipotenciales, y la cuadriculación va invadiendo paso a paso todo el plano mientras no se tropiece con algún punto singular de la función, donde la construcción queda detenida. Es fácil convencerse que por este procedimiento puede reproducirse cualquiera de las figuras que acompañan, partiendo de alguna de sus curvas y de los puntos de división señalados sobre ella por el otro sistema de curvas. El método viene a ser una traducción geométrica de la prolongación analítica, pues estrechando la red convenientemente es siempre posible hallar gráficamente el valor numérico de la función (el potencial complejo) correspondiente a cualquier valor de la variable independiente, y es siempre posible, evitando el punto singular, desbordar el círculo inicial de convergencia.

dor de un obstáculo dado, aun con las limitaciones aquí impuestas, no es única: sin salir de nuestras figuras se encontrarán, por ejemplo, varias trayectorias circulares; de cada una de ellas puede deducirse una circulación posible alrededor de un cilindro.

Las diferentes soluciones se distinguen por la ley de distribución de la velocidad a lo largo del perfil del obstáculo, hasta el punto que cuando es conocida dicha ley, de ella puede deducirse todo el resto del campo de velocidades.

Gráficamente, se puede aplicar un procedimiento dado por Prasil para un problema particular de Hidráulica.

Sea (fig. 6) conocido un filete flúi-

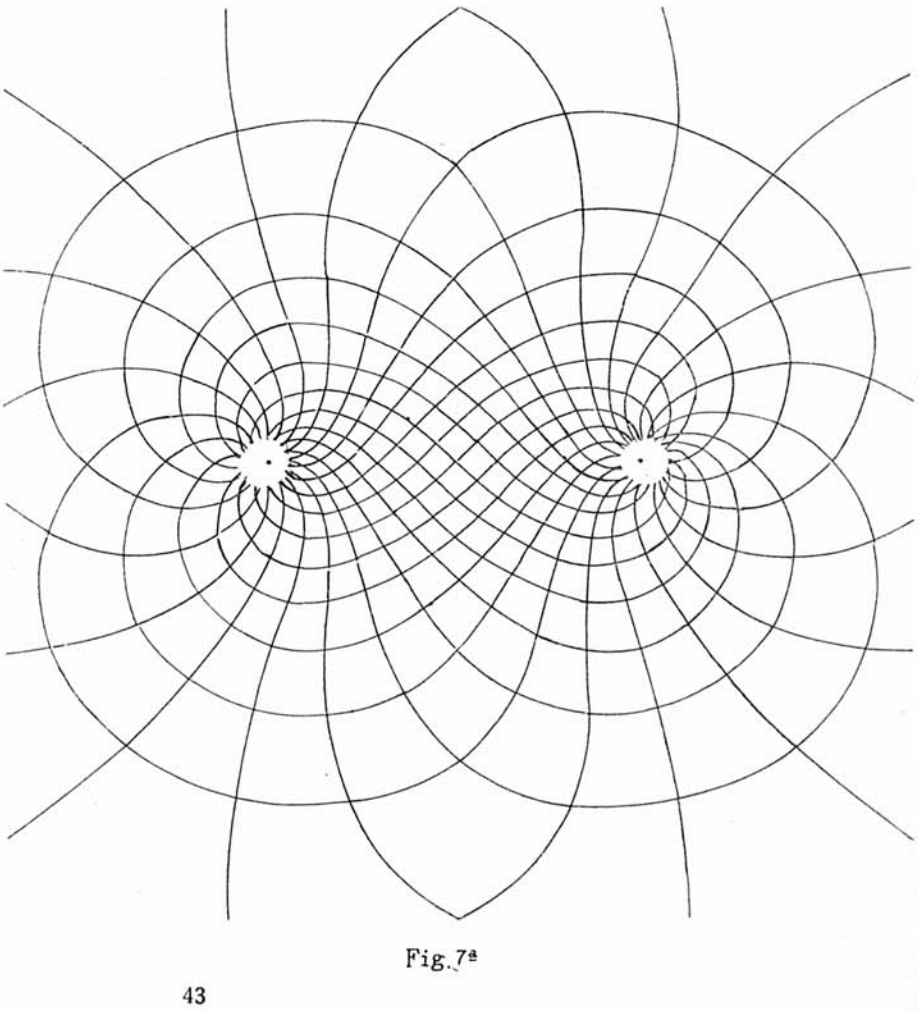


Fig. 7ª