ALGUNAS CUESTIONES DE MECÁNICA DE FLÚIDOS

Por

RICARDO SAN JUAN LLOSA,

Profesor de la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos.

Primer premio de nuestro Concurso de artículos, en el tema "Aerotecnia y Material".

1. Sobre la noción de movimiento estacionario (*).

Suele definirse el movimiento estacionario como aquel en que la velocidad es independiente del tiempo, y luego se establece sin demostración que también la densidad y la presión (o mejor su gradiente) son independientes de t (1). La noción física de estado estacionario entraña ciertamente la constancia en el tiempo de todas las magnitudes $\vec{V}$, ρ, grad p, etc., y no habría inconveniente en expresarlo así en la definición, presentando éstas con condiciones que pudieran resultar superabundantes mediante un ulterior análisis detenido de sus relaciones matemáticas; pero creemos preferible efectuar éste y deducir la invariación en el tiempo de ρ y grad p de la constancia de $\vec{V}$ como aplicación de la continuidad del flúido. Tal es el objeto de esta primera parte.

La densidad ρ en un punto geométrico fijo, ocupado sucesivamente en el tiempo t por distintas partículas flúidas, es una función de t que satisface, como es sabido, la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \mathrm{Div}\,\vec{V} + \vec{V} \cdot \mathrm{grad}\,\rho = 0, \qquad [1]$$

siendo Div $\vec{V}$ la velocidad de dilatación cúbica en dicho punto fijo, y el tercer término el producto escalar de la velocidad en él por el gradiente de la densidad en el mismo. Pero si el movimiento es estacionario, esto es, $\vec{V}$ *independiente de* t *en cada punto*, resulta Div $\vec{V}$ independiente de t, es decir, una constante del punto elegido; y si además se anula en éste: $\vec{V}$ grad p, por ser nulo uno de estos vectores o perpendiculares entre sí, queda reducida la ecuación de continuidad a una lineal, que se integra inmediatamente. Obtenemos así la función

$$\rho(t) = \rho_0\, e^{-t \,.\, \mathrm{Div}\,\vec{V}},$$

que expresa la densidad en dicho punto en función del tiempo y de la divergencia en él, siendo ρ_0 la densidad en el mismo para el instante inicial $t = 0$.

Pero si $\rho \to +\infty$, es decir, al transcurrir el tiempo indefinidamente, resulta:

$$\left.\begin{matrix} \rho \to 0 \\ \rho \to \infty \end{matrix}\right\} \text{ según sea } \left\{\begin{matrix} \mathrm{Div}\,\vec{V} > 0 \\ \mathrm{Div}\,\vec{V} < 0, \end{matrix}\right.$$

conclusiones evidentemente incompatibles con la noción física de flúido y que no habría inconveniente en incluir como

(*) Debo dar las gracias al Comandante del Servicio de Meteorología señor Morán y a los alumnos de Mecánica de flúidos de la Academia de Ingenieros Aeronáuticos en el curso 42-43, por sus atinadas observaciones sobre esta primera cuestión del presente artículo.

(1) *Aerodinámica*, E. Pistolesi, págs. 33 y 67.
Aerodynamik, tomo II, "Theorie der Luftkrräfte", von R. Fuchs, págs. 15 y 25.
Aerodynamic Theory, W. F. Durand, vol. I, págs. 110 y 232.
Cours de Mécanique des Fluides, J. Pérés, págs. 22 y 47.
Mécanique des Fluides, M. H. Villat, págs. 7 y 91.

postulados negativos si se tratase de adoptar una definición abstracta del mismo. Es, pues, Div $\vec{V} = 0$ en dicho punto, y resulta $\rho = \rho_0$ para todo t. La perpendicularidad de los vectores $\vec{V}$ y grad p en cada punto expresa que el movimiento sigue en éste los estratos o superficies equipotenciales de densidad constante; y como en esta condición pueden también incluirse las $\vec{V} = 0$ y grad $\rho = 0$, que corresponden a los puntos de remanso y homogeneidad respectivamente podemos enunciar así nuestro resultado:

En el movimiento estacionario de un flúido continuo, esto es, con velocidad independiente del tiempo en cada punto y conservación de la masa, es también independiente del tiempo la densidad en los puntos donde el movimiento sigue los estratos de densidad constante; en particular, en los puntos de remanso, y en todos si el flúido es homogéneo.

El razonamiento anterior excluye ciertamente la existencia de fuentes o sumideros en que

$$\text{Div } \vec{V} \neq 0,$$

y cabe, sin embargo, por ejemplo, un régimen estacionario con una fuente y un sumidero de igual intensidad. Pero nótese que en tales puntos hay una auténtica introducción o pérdida de masa para el flúido considerado, a expensas, naturalmente, de materia exterior, y deben, por tanto, ser excluídos del campo que constituye el flúido continuo como puntos singulares en que falla la continuidad o conservación de la masa. Tampoco hay, evidentemente, constancia de la densidad si el flúido pierde peso por evaporación, y aquí puede llegarse incluso al caso $\rho \to 0$ desechado antes. Pero todos estos fenómenos quedan excluídos con la condición de conservación de la masa que va indicada en el enunciado bajo la denominación usual de continuidad del flúido.

La integración de la ecuación de continuidad en la forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{ Div } \vec{V} = 0 \qquad [2]$$

nos daría una función

$$\rho(t) = \rho\left[x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\right],$$

formada con los valores de la densidad en los distintos puntos de una trayectoria o filete flúido

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t),$$

ocupados, sucesivamente, por una misma partícula en su recorrido; pero entonces la Div $\vec{V}$ ya no es constante, sino otra función de

$$\text{Div } \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x} u\left[x(t),\ y(t),\ z(t)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y} v\left[x(t),\ y(t),\ z(t)\right] + \frac{\partial}{\partial z} w\left[x(t),\ y(t),\ z(t)\right],$$

que no contiene t explícitamente, pero sí por intermedio de los puntos o posiciones

$$x(t), \quad y(t), \quad z(t)$$

de aquélla.

No es, pues, lineal [2], y ya no resulta inmediata de integración ni aplicables las conclusiones precedentes.

De la ecuación fundamental en la Hidrodinámica para movimientos estacionarios, o sea con

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

en cada punto:

$$\vec{V} \,.\, \text{Div } \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p,$$

resulta que también es el grad p en cada punto independiente de t si lo son las fuerzas unitarias F de masa, y resulta:

En el movimiento estacionario de un flúido continuo con fuerzas de masa independientes del tiempo, es también independiente del tiempo el gradiente de la presión en cada punto donde el movimiento sigue un estrato de densidad constante, en particular en todos los puntos de un flúido homogéneo y en los de remanso.

2. Una demostración geométrica del teorema de Bernoulli.

Recordemos la ecuación de los movimientos estacionarios con fuerzas conservativas o derivadas de un potencial U y densidad dependiente solamente de la presión:

$$\text{rot } \vec{V} \wedge \vec{V} = \text{grad } H,$$

siendo

$$H = U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2.$$

El teorema de Bernoulli se puede deducir inmediatamente de la relación geométrica contenida en esta ecuación entre la velocidad $\vec{V}$ y su rotor, rot $\vec{V}$, con el gradiente de H.

Sea, en efecto, c en un filete flúido o trayectoria.

En virtud del teorema de Lagrange, si es

$$\text{rot } \vec{V} = 0$$

en uno de sus puntos, lo mismo acontece en todos los demás; y si es

$$\text{rot } \vec{V} \neq 0,$$

se conserva distinto de cero sobre c. En el primer caso, siendo

$$\text{grad } H = 0$$

sobre c, está contenida c en una superficie equipotencial

$$H = C^{te};$$

y también si es

$$\text{rot } \overrightarrow{V} \neq 0,$$

pues entonces, grad H como producto vectorial no nulo de rot $\overrightarrow{V}$ por $\overrightarrow{V}$, es perpendicular en cada punto de c a la tangente $\overrightarrow{V}$; es, pues, c una trayectoria ortogonal del campo rot $\overrightarrow{V}$, y como tal está contenida en una superficie equipotencial

$$H = C^{te}.$$

Esto conduce al siguiente enunciado geométrico del teorema de Bernoulli, que pone muy gráficamente de manifiesto el distinto alcance de éste para movimientos rotacionales o irrotacionales:

Los filetes flúidos en el movimiento estacionario con fuerzas de masa derivadas de un potencial U *y densidad* ρ, *función solamente de la presión* p, *están contenidos en las superficies equipotenciales* H = C^{te}, *siendo*

$$H = U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2.$$

En el movimiento irrotacional resulta H *constante sobre todo el flúido, es decir, iguales los valores de* H *sobre cada filete o trayectoria.*

3. Una interpretación del potencial de velocidades.

I. *En el movimiento de un flúido perfecto con velocidad continua* $\overrightarrow{V}$, *si el potencial* φ *de velocidades tiene una derivada continua* $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ *respecto del tiempo, existe un potencial de aceleraciones* A *que es igual a esta derivada más el semicuadrado de la velocidad, o sea de la derivada sobre la normal,* $\overrightarrow{n}$, *a las superficies equipotenciales; es decir,*

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\overrightarrow{n}}\right)^2.$$

En efecto, por la continuidad de las derivadas, es

$$\frac{\partial \overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

y de la identidad

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \text{grad } \frac{1}{2} V^2$$

empleada en la Hidrodinámica para introducir el torbellino en las ecuaciones fundamentales, resulta

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2\right). \quad [3]$$

II. *Si las fuerzas de masa son conservativas en cada instante, la condición necesaria y suficiente para que exista un potencial de aceleraciones es que la densidad sea función uniforme de la presión* (1), *y entonces este potencial* A *se deduce del potencial* U, *de fuerza unitaria* $\overrightarrow{F}$, *restando el potencial* $q = \int \frac{d\rho}{\rho}$ *del gradiente de presión dividido por la densidad; es decir,*

$$A = U - \int \frac{dp}{\rho}.$$

Que la condición es suficiente se demuestra, como es sabido, en Mecánica de flúidos, definiendo la función

$$q = \int \frac{dp}{\rho},$$

que tiene como gradiente justamente

$$\text{grad } q = \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

y la ecuación fundamental de la Hidrodinámica

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \overrightarrow{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad [5]$$

siendo $\overrightarrow{F} = \text{grad } U$, toma la forma

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \text{grad } (U - q). \quad [6]$$

Pero tratándose de dar una interpretación del potencial de velocidades hemos de referir a éste todas las condiciones, y para esto vamos a demostrar el recíproco que aplicaremos como continuación del teorema I.

En efecto, si existe un potencial A de aceleraciones, es decir, si es en cada punto y en cada instante

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \text{grad } A,$$

como por hipótesis es también $\overrightarrow{F} = \text{grad } U$, la ecuación fundamental toma esta forma:

$$\text{grad } (A - U) = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p,$$

o bien, multiplicando escalarmente por el vector $[dx, dy, dz]$, esta otra:

$$d(U - A) = \frac{1}{\rho} dp;$$

de donde resulta que coinciden las dos familias de superficie equipotenciales de ambos campos, representados por las ecuaciones

$$dp = 0 \quad \text{y} \quad d(U - A) = 0.$$

(1) Esto demuestra que la hipótesis de carácter físico: ρ función de p solamente, admitida en la Mecánica de flúidos, es la condición mínima para que pueda desarrollarse la teoría matemática deducida del potencial de aceleraciones.

A cada valor de p, $p = p_0$, que define una superficie isobárica o de la primera familia, corresponde así el valor $A - U = k$, que representa la superficie de la segunda coincidente con ella, y viceversa; es, pues, $U - A$ función uniforme de p, y recíprocamente; luego también es función uniforme de p la densidad

$$\rho = \frac{dp}{d(U-A)},$$

como queríamos demostrar.

III. *En el movimiento de un flúido perfecto con fuerzas de masa conservativas y velocidad continua* $\overrightarrow{V}$, *si hay potencial de velocidades con derivadas continuas, éste puede interpretarse como impulso del escalar obtenido, restando del potencial* U *de fuerza de masa unitaria* $\overrightarrow{F}$ *el potencial* q *del gradiente de presión dividido por la densidad y el semicuadrado de la velocidad; es decir,*

$$\varphi = \int_0^t \left(U - q - \frac{1}{2} V^2\right) dt,$$

suponiendo que el movimiento parte del reposo.

Esto resulta del teorema de Bernoulli:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = U - q - \frac{1}{2} V^2 + C(t),$$

el cual, en Mecánica de flúidos, se demuestra suponiendo la densidad función solamente de la presión y las fuerzas de masa conservativas, hipótesis que resultan de la existencia del potencial de velocidades con derivadas continuas combinando I y II, pero que puede deducirse directamente de dicha existencia del potencial φ de $\overrightarrow{V}$ sin más que identificar [3] y [6], pues resulta

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2\right) = \operatorname{grad}(U - q);$$

luego ambos potenciales difieren en una función arbitraria del tiempo $C(t)$. Integrando la ecuación de Bernoulli con la condición inicial $\varphi = k$ para $t = 0$, correspondiente a $\overrightarrow{V} = 0$, se tiene

$$\varphi = \int_0^t \left(U - q - \frac{1}{2} V^2\right) dt + \int_0^t C(t)\, dt + k;$$

y como se trata de un potencial, podemos prescindir de estos dos últimos sumandos que no dependan de x, y, z, obteniendo para φ la expresión indicada en el enunciado.

En particular, si el flúido es incompresible y no hay fuerzas de masa, es decir, si U y φ son constantes, resulta:

$$\varphi = -\frac{1}{\rho} \int_0^t p\, dt - \frac{1}{2} \int_0^t V^2\, dt$$

y aparece el potencial cambiado de signo como el impulso de la presión dividida por la densidad, más el semi-impulso de V².

Escolio.—Nótese que no puede prescindirse del último término

$$\frac{1}{2} \int_0^t V^2\, dt$$

por no ser V^2, ni por consiguiente su integral, función de t solamente.

Integrando la ecuación [5] con la condición inicial $\overrightarrow{V} = 0$ para $t = 0$, tendremos

$$\operatorname{grad} \varphi = \overrightarrow{V} = \int_0^t \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\, dt = \int_0^t \operatorname{grad}(U - q)\, dt \qquad [6\text{ bis}]$$

si esta integral se forma con los valores de $\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$ a lo largo de una trayectoria c, para que su derivada sea precisamente $\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$; pero entonces la integral de la función de t:

$$\operatorname{grad}(U - q)$$

a lo largo de c, no es el gradiente de la integral, es decir, no es

$$\int_0^t \operatorname{grad}(U - q)\, dt = \operatorname{grad} \int_0^t (U - q)\, dt,$$

ni, por tanto,

$$\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \int_0^t (U - q)\, dt,$$

que nos daría φ sin el término en V^2. Basta observar, en efecto, que las derivaciones parciales del operador de gradiente aplicadas a la integral, dan, cuando las variables x, y, z del integrando están ligadas, como en este caso, con el límite de t de integración por las ecuaciones

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

de la trayectoria, además de la integral del gradiente, otros términos que efectivamente derivan del potencial

$$\int_0^t \frac{1}{2} V^2\, dt.$$

Sin necesidad de calcular éstos por la regla clásica, de dudosa aplicación aquí por exigir la existencia de la función inversa de aquéllas:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

correspondiente a la variable de la derivación, podemos comprobar fácilmente que es

$$\int_0^t \operatorname{grad}(U - q)\, dt = \operatorname{grad} \int_0^t (U - q)\, dt - \operatorname{grad} \int_0^t \frac{1}{2} V^2\, dt,$$

pues la diferencia del segundo miembro, en virtud del teorema de Bernoulli, vale

$$\operatorname{grad} \int_0^t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - C(t)\right] d\,t = \operatorname{grad} \left[\varphi - k - \int_0^t C(t)\,d\,t\right] = \overrightarrow{V}$$

por ser nulo el gradiente de estos dos últimos términos, independientes de x, y, z; diferencia que efectivamente coincide con el primero, según [6 bis].

Esta es la explicación de que en la obra de *Clemens Schaefer, Einfürung in die Theoretische Physik*, 3 Auflage 1929 bis 803, donde se considera el caso particular de un flúido incompresible sin fuerzas de masa, se obtenga la expresión de φ sin el término en V^2, lapsus reconocido por el autor, a quien indirectamente fué comunicado nuestro resultado por el Excmo. Sr. D. Julio Palacios.

4. Sobre la noción de densidad de un flúido.

Hay numerosas cuestiones de Mecánica de flúidos, Teoría electromagnética, Mecánica cuántica, etc., donde la noción física no viene exactamente expresada por la definición matemática de límite ordinario, aun extendido a las funciones de recinto, por exigir éste la divisibilidad indefinida de la materia o energía, y sí, en cambio, por el concepto más amplio y flexible de *límite dirigido*, que expuso el joven matemático Garret Birkhoff en el Congreso Internacional de Oslo (1), y que aquí vamos a resumir brevemente para su aplicación a la noción de densidad de un flúido, que es uno de los ejemplos más típicos donde aparece la necesidad de recurrir a él para resolver las dificultades señaladas primeramente por *Prandtl* en su magnífica obra *Hidro und Aerodynamik* (tomo I, pág. 6), y más recientemente por *Fuchs* en su moderna *Aerodynamik* (capítulo II, párrafo primero).

Iniciamos así las aplicaciones físicas de esta noción, que tan fecundas las ha tenido desde el Análisis elemental, en la noción de integral (2), hasta las más diversas cuestiones de Topología y Teoría de conjuntos abstractos.

Recordemos que un conjunto se dice *ordenado* cuando se da un criterio cualquiera de prioridad que permite reconocer para cada par de elementos M y N, si M es anterior a N, es decir, N posterior a M, o es N anterior a M. Este criterio puede ser cualquiera, pero ha de tener la propiedad transitiva, a saber: si M es anterior a N y N anterior a P, es M anterior a P (3).

Cuando sólo se pueden determinar los elementos posteriores o sucesivos a cada uno, M, sin que necesariamente entre cada dos elementos tenga que ser uno posterior al otro, el conjunto se dice *semiordenado*, y un conjunto semiordenado se llama *dirigido* cuando dos elementos cualesquiera, M y N, tienen un sucesivo o posterior común P.

El ejemplo más típico de conjunto semiordenado, y no ordenado, único que creemos oportuno traer aquí (1), es el formado por las particiones o divisiones de un intervalo mediante puntos interiores, empleadas, como es sabido, en la definición de integral, llamando posteriores a una partición a las obtenidas por descomposición de sus intervalos mediante nuevos puntos de subdivisión. Entre dos particiones, puede no ser ninguna posterior a la otra si cada una contiene puntos de división que no figuran en esta otra; pero existe siempre una tercera posterior a ambas, obtenida con los puntos de división de las dos.

Los conjuntos coordinables con un conjunto dirigido son, evidentemente, conjuntos dirigidos.

El límite de un conjunto dirigido puede definirse como sigue, cuando sus elementos son números o conjuntos de números, o más general, de entes cualesquiera entre los que se puedan definir sus entornos; esto es, subconjuntos tales que dos puntos distintos cualesquiera tengan sendos entornos sin parte común, dos entornos de un mismo punto tengan otro contenido en ambos, y cada elemento de un entorno admita otro contenido en éste (2).

Se dice que l es el límite *de un conjunto dirigido* cuando a cada entorno de l corresponde un elemento M del conjunto tal que todos los posteriores a él quedan contenidos en el entorno.

El límite dirigido es único, pues si hubiese dos, $l \neq l'$, elegidos sendos entornos sin parte común, correspondería a cada uno un elemento M y N del conjunto, tales que las posteriores a M o N, respectivamente, quedarían dentro de cada entorno; pero si es P el sucesor común a M y N, los posteriores a P, como posteriores a M por la propiedad transitiva, debieran quedar en el primer entorno, y simultáneamente en el segundo, puesto que son también posteriores a N. Llegamos, pues, a una contradicción.

En esta noción están incluídos todos los límites estudiados en el Análisis matemático. Evidentemente, el límite aritmético de una sucesión. La notación $x \rightarrow x_0$ significa que x_0 es el límite del conjunto dirigido obtenido llamando posteriores a cada valor de x a los que distan de x_0 menos que él, con exclusión evidente del mismo x_0 para evitar la existencia de un último. El límite funcional $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)$ es el límite del conjunto dirigido que forman los valores de $f(x)$ ordenados con respecto a sus antihomólogos de x, cuando éstos $x \rightarrow x_0$, esto es, están a su vez ordenados como indicamos antes. Y así podríamos proseguir los ejemplos, entre los que encontraríamos todos los conceptos de integral; pero creemos que los anteriores son suficientes para facilitar la mejor interpretación de la aplicación que nos interesa.

En Mecánica de flúidos se define, según es sabido, la densidad media de un volumen flúido $\Delta\,v$ como cociente

---

(1) Véase *Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens*, Oslo, 1936, t. II, pág. 152.

(2) Véase J. Rey Pastor: *Elementos de la teoría de las funciones reales*, Madrid, 1943.

R. San Juan: *Lecciones de análisis matemático*, segundo curso; Madrid, 1941.

(3) Véase J. Rey Pastor: *Análisis algebraico*, cuarta edición, núm. 3.

(1) Otros pueden verse en J. Rey Pastor: *Elementos de la teoría de las funciones reales*, Madrid, 1943, pág. 15; en el libro citado de R. San Juan, pág. 324, o en el artículo original de Birkhoff.

(2) Esto se expresa, como es sabido, diciendo que el conjunto es un espacio topológico de Hausdorft. Pero intencionadamente omitimos esta denominación del texto, donde hemos procurado, por brevedad, reducir al mínimo la nomenclatura, remitiendo al lector a los libros españoles de J. Rey Pastor: *Teoría de las funciones reales*, tercera edición, Madrid, 1939, página 37, y R. San Juan, pág. 9, en los que puede verse la extensa bibliografía existente sobre el asunto.

$\frac{\Delta m}{\Delta v}$, siendo Δm su masa, y se llama densidad en un punto A al límite de la densidad media al tender a cero el volumen en torno de A:

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v},$$

o sea a la derivada de la función de recinto $m = m(V)$, obtenida asignando a cada volumen su masa; lo cual significa en definitiva que, dado un número positivo ε, existe otro δ, también positivo, tal que para todos los volúmenes en torno de A menores que δ:

$$\Delta v < \delta, \qquad \text{resulta} \qquad \left| \rho - \frac{\Delta m}{\Delta v} \right| < \varepsilon.$$

Pero el proceso de subdivisión indefinida que entraña la condición $\Delta v \to 0$, expresada aritméticamente mediante estas desigualdades, conduciría, al ser aplicado en la materia y proseguido más allá de los espacios moleculares o intermoleculares, a un valor nulo o no, según que el punto geométrico A quedase en un espacio vacío o sobre una molécula; y para excluir esto habría que acotar inferiormente la disminución del volumen y enunciarla en esta forma, ciertamente poco elegante: a cada número $\varepsilon < 0$ corresponden otros dos $\delta > \delta' > 0$, tales que

$$\left| \rho - \frac{\Delta m}{\Delta v} \right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad \delta' < \Delta v < \delta, \qquad [7]$$

siendo δ' suficientemente grande para que el número de moléculas contenidas en todo volumen δ' en torno de A permita obtener un valor en media aceptable de Δm sin que acuse la influencia de los movimientos bronwianos, y a la vez suficientemente pequeño para que entre dentro de la noción de *partícula hidrodinámica* o *punto del flúido*, esto es, resulte despreciable dentro del orden de aproximación establecido en las cuestiones estudiadas.

Recordando, por ejemplo, como hizo notar Prandtl, que en un centímetro cúbico de gas a presión ordinaria existen $2{,}3 \cdot 10^{18}$ moléculas, resulta que todavía habrá $2{,}3 \cdot 10^{4}$ en un volumen de 10^{-9} milímetros cúbicos, que escapa, evidentemente, a todas las apreciaciones empleadas en Mecánica de flúidos, y bien puede considerarse, por tanto, como partícula elemental del mismo. Solamente en casos extremos de enrarecimiento será insuficiente el número de moléculas contenidas en volúmenes de dimensiones despreciables para obtener un valor en media de la masa que haga aproximarse $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ a un límite fijo ρ, como indica la definición, sin acusar en él la influencia de dichos movimientos moleculares, apenas dignos de notarse si no es en fenómenos de difusión, frotamiento, transmisión de calor, etc.

La noción de límite dirigido permite expresar con toda naturalidad y más claramente la condición anterior mediante esta definición.

Densidad de un flúido en un punto A es el límite dirigido de las densidades medias $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ de los volúmenes, que envuelven un volumen δ' en torno de A suficientemente grande para obtener un valor en media de la masa Δm contenida en él con independencia de los movimientos bronwianos, y a la vez despreciable dentro del orden de aproximación prefijado, cuando $\Delta v \to \delta'$, esto es, cuando se llaman posteriores a cada volumen a los contenidos en él y cuando, además, este límite es independiente del volumen de valor δ' en torno de A, elegido como núcleo común a los demás.

Así ordenados los volúmenes que envuelven un núcleo prefijado de valor δ', forman, en efecto, un conjunto dirigido, porque, dados dos, existe otro posterior a ambos, que es su interferencia o parte común, pues también ésta envuelve evidentemente a δ'; es, por consiguiente, un conjunto dirigido el formado por las densidades medias de estos volúmenes, y como éstas son números, podemos aplicar la definición, obteniendo por hipótesis un límite ρ independiente del núcleo de valor δ elegido en torno de A.

Resulta así el número ρ, que cumple la condición anterior [7], pues quedan en su entorno de amplitud ε todas las densidades medias $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ de los volúmenes posteriores (esto es, interiores) a uno del conjunto igual o menor que δ, Pero, recíprocamente, de que un número ρ sea el límite dirigido común de todos los conjuntos que forman los volúmenes en torno de cada volumen de valor δ', no puede deducirse que se verifique dicha condición [7] si no tienen un valor mínimo o extremo inferior $\delta > \delta'$ los volúmenes que corresponden al entorno ε del límite común ρ en cada uno de dichos conjuntos dirigidos, obtenidos, como hemos dicho, para los distintos núcleos o volúmenes de valor δ' en torno del punto A. Esta restricción, que pudiéramos llamar *convergencia uniforme de estos infinitos conjuntos dirigidos*, es, evidentemente, inesencial y extraña a la noción de densidad en el punto, y su eliminación constituye otra ventaja fundamental, aparte de las de naturalidad y sencillez ya señaladas, que presenta la definición como límite dirigido sobre la de forma aritmética [7].

La partícula A es el límite dirigido, no del conjunto formado por las partículas de los volúmenes $\Delta V \to 0$, que no es dirigido si no se ordenan éstas individualmente, por ejemplo, por sus distancias a la A y otro par de coordenadas angulares; pero sí lo es de todos los conjuntos dirigidos, que, como hemos visto, forman los volúmenes con cada núcleo común δ'. Queda, pues, así completada la correspondencia entre volúmenes y densidades medias, con la noción de densidad en cada punto, de modo que la densidad límite de densidades medias corresponde a la partícula límite dirigido de los volúmenes, o dicho brevemente, *con continuidad*. Esta continuidad ha podido lograrse, gracias a la ampliación que hemos hecho de la definición de Birkhof, para conjuntos cuyos elementos son a su vez subconjuntos de otro en el que pueden definirse entornos: continuidad que constituye el criterio fundamental para toda ampliación de una magnitud por paso al límite, asignando cantidades a objetos que no la tenían, como, por ejemplo, al definir la velocidad en un punto, el trabajo o circulación sobre una curva, el flujo a través de una superficie, etc., partiendo de las velocidades medias, trabajos o flujos elementales, etc.; pero todo esto, que expondremos detalladamente en otro lugar y será publicado oportunamente, nos apartaría demasiado de nuestro objeto en este trabajo (1).

Presentado el 31 de diciembre de 1943.

(1) Véase R. San Juan: "Teoría de las magnitudes físicas derivadas y sus fundamentos algebraicos". *Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, 1944.