# Aerotecnia

## Vibraciones de torsión

Por LUIS ARIAS

Comandante de Artillería de la Armada, alumno de la Escuela Superior Aerotécnica

ES de sobra conocida la importancia de las vibraciones en la técnica aeronáutica. En los motores tienen singular interés las vibraciones torsionales a que resultan sometidos los ejes, y que pueden ocasionar el fenómeno de resonancia, si la frecuencia de su vibración natural coincide con el régimen del motor. Por esta causa, al calcular ejes de motores, una vez dimensionados por las necesidades del mecanismo y para que los esfuerzos no pasen del límite fijado al material elegido, es preciso determinar la presencia de la vibración propia de cada eje, y verificar que no coincide su régimen con los usuales del motor, pues si esto sucediera hay que modificar las dimensiones hasta que tengamos una vibración propia que no ofrezca peligro de resonancia, bien por estar su frecuencia por encima de la velocidad de régimen, por bajo del «relenti» o en un valor que el uso correcto del motor no exige se mantenga.

En general, los ejes de los motores son realmente ejes con masas afectas; por ejemplo, los ejes de levas se pueden considerar reducidos a ejes con masas afectas, como sucede con los cigüeñales.

Es corriente también que en uno y otro caso las masas sean o se puedan considerar iguales y equidistantes.

En un artículo publicado en esta Revista por el ingeniero aeronáutico D. Felipe Lafita, se estudia perfectamente cómo se obtiene un sistema equivalente a un cigüeñal, por lo que no insistimos sobre ello.

Nos proponemos estudiar la determinación de la frecuencia de la vibración torsional, propia de sistemas vibrantes formados por ejes de sección constante, con $n$ masas iguales y equidistantes. Problema éste, al que, como hemos dicho, se reducen generalmente los diversos casos.

Determinadas las frecuencias, es inmediato el conocimiento de las velocidades críticas del eje.

Sean: $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, ..... $\varphi_n$ los desplazamientos angulares de las masas.

$I$ el momento de inercia mecánico de cada masa, que por la hipótesis hecha es igual para todas.

Para tener en cuenta la influencia de la masa propia del eje, puede seguirse el método de la energía de Rayleigh-Ritz, y para ello se suma al valor de $I$ la cantidad $\frac{1}{3n}$ del momento de inercia mecánico del eje, y se opera con el nuevo valor de $I$.

Representamos por $p$ la pulsación de la vibración propia del sistema, y por $k$, la constante de torsión que es igual para todo el eje.

Las ecuaciones de equilibrio (Timosheuko) conducen al esquema de Holzer, que con las simplificaciones correspondientes a las hipótesis hechas se reduce al siguiente:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{Ip^2}{K}\varphi_1$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - \frac{Ip^2}{K}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 - \frac{Ip^2}{K}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} - \frac{Ip^2}{K}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_{n-1})$$

Para resolver el sistema se da un valor arbitrario a $\varphi_1$ y $p$, obteniéndose una serie de valores para los ángulos $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \ldots \varphi_n$. Para que la solución sea verdadera se debe verificar la última ecuación del sistema de equilibrio

$$I_n \varphi_n p^2 + K(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = O.$$

Este sistema se transforma y simplifica eliminando la variable $\varphi_1$; para ello basta dividir por $\varphi_1$, y si representamos por

$$a_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1},\ a_3 = \frac{\varphi_3}{\varphi_1} \ \ldots\ a_n = \frac{\varphi_n}{\varphi_1}$$

se tiene, haciendo $\frac{Ip^2}{K} = H.$

$$a_2 = 1 - H$$
$$a_3 = a_2 - H(1 + a_2)$$
$$a_4 = a_3 - H(1 + a_2 + a_3)$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} - H(1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1})$$

y la ecuación de comprobación

$$F(a) = a_n(H-1) + a_{n-1} = O.$$

En este sistema se puede considerar como única variable $H$, y el problema se reduce a determinar un valor de $H$ que anule $F(a)$. Para ello se traza la curva de $F(a)$ en función de $H$ que por sus intersecciones con el eje $H$, nos da todos los valores de $H$ soluciones del sistema y por tanto los valores de $p$ correspondientes a los diversos modos de vibrar. El más interesante es el menor, que nos da la vibración más lenta.

De

$$H = \frac{Ip^2}{K}$$

se tiene

$$p = \sqrt{H \frac{K}{I}}$$

y la velocidad crítica será

$$N = \frac{60\ P}{2\ \pi} = \frac{30 \sqrt{H}}{\pi} \sqrt{\frac{K}{I}}$$

en general

$$N = c \sqrt{\frac{K}{I}}$$

El valor de $c$ sólo depende de $H$ y éste únicamente del número de ecuaciones del sistema, o sea del número de masas, puesto que todos los sistemas vibrantes análogos conducen a las mismas ecuaciones.

Nos encontramos, pues, con una fórmula general de aplicación directa, en cuanto determinemos los valores de $c$ para cada forma de sistema vibrante.

A continuación determinamos algunos valores de $c$ para los sistemas más corrientes.

### Eje con cuatro masas

El esquema es:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 - H \\ a_3 &= a_2 - H(1 + a_2) \\ a_4 &= a_3 - H(1 + a_2 + a_3) \end{aligned}$$

y la ecuación de comprobación

$$F(a) = a_4 (H - 1) + a_3 = O.$$

Se ha trazado la curva $F(a)$ (curva 1 del gráfico) en la que se observan tres soluciones que dan tres modos de vibrar del eje, obteniéndose para $H$ los valores 0,59 „ 2 y 3,41, y para $c$ los valores 7.335 „ 13.505 y 17.634. Las velocidades críticas de ejes con cuatro masas vienen dadas por las fórmulas:

$$N_1 = 7.335 \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$N_2 = 13.505 \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$N_3 = 17.634 \sqrt{\frac{K}{I}}$$

ligadas entre sí por las relaciones:

$$\begin{aligned} N_2 &= 1.841\ N_1 \\ N_3 &= 2.404\ N_1 \end{aligned}$$

### Eje con seis masas

El esquema es

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 - H \\ a_3 &= a_2 - H(1 + a_2) \\ a_4 &= a_3 - H(1 + a_2 + a_3) \\ a_5 &= a_4 - H(1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ a_6 &= a_5 - H(1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \end{aligned}$$

y la ecuación de comprobación

$$F(a) = (H - 1)\ a_6 + a_5 = O$$

Sobre el mismo gráfico está trazada la curva (2) de $F(a)$ que hasta el límite del dibujo nos da cuatro valores de $H$ soluciones del sistema que son: 0,267 „ 1 „ 2 y 3. Los valores de $e$ son: 4.934 „ 9.5493 „ 13.505 y 16,53, y las velocidades críticas de los ejes con seis masas vienen dadas por las fórmulas:

$$N_1 = 4.934 \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$N_2 = 9.5493 \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$N_3 = 13.505 \sqrt{\frac{K}{I}}$$

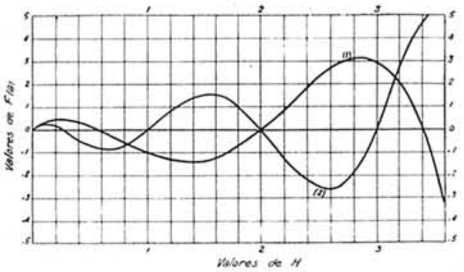
$$N_4 = 16,53 \sqrt{\frac{K}{I}}$$

ligadas entre sí por las relaciones

$$\begin{aligned} N_2 &= 1.935\ N_1 \\ N_3 &= 2.737\ N_1 \\ N_4 &= 3.350\ N_1 \end{aligned}$$

Vamos a analizar la influencia de cada uno de los factores que entran en la fórmula general.

Observemos primeramente que el valor de $K$ es:




$$K = \frac{I_0\ G}{l}$$

$I_0$ momento de inercia polar del eje

$G$ módulo transversal

$l$ distancia entre masas.

Vemos que el número de masas influye en el valor de $c$ que disminuye con el número de éstas, o sea, que si consideramos, por ejemplo, dos cigüeñales en que las dimensiones de cada codo son iguales en ambos, pero el número de codos varía, las velocidades críticas del que tiene más son menores que las del que tiene menos.

Si consideramos dos ejes de igual sección e igual longitud total, pero uno con seis masas y otro con cuatro, ya no puede decirse *a priori* que el que tiene más vibra más lentamente, pues el valor de $l$ varía, y, por tanto, modifica también $N$, pero hecha la comparación de las dos fórmulas, resulta que también en este caso los ejes con mayor número de masas tienen la vibración más lenta.

La separación $l$ entre masas influye en $K$, y, por tanto, la velocidad crítica aumenta cuando las masas se acercan y disminuyen cuando se alejan, de acuerdo con el conocido principio de que los ejes largos tienen las vibraciones más lentas.

La calidad del material influye a través de $G$ en el valor de $K$. Vemos que $N$ aumenta con $K$.

Las dimensiones del eje influyen en $I$, y, por tanto, en el mismo sentido en $K$.

Se ve que, cuanto mayor es $I_0$ (en general, cuanto mayor sección tiene el eje), mayor es su velocidad crítica.

Por último, la cantidad de masa afecta en cada punto influye en $I$, y en sentido contrario en $N$, lo que nos dice que, cuanto más cargados están los ejes, más lentas son sus vibraciones propias.