

Aerotecnica

Vibraciones de Torsión

Métodos para determinar las velocidades de resonancia debidas a estas vibraciones

Por FELIPE LAFITA

Comandante de Ingenieros de la Armada e Ingeniero Aeronáutico

EN este artículo voy a tratar exclusivamente de las velocidades de resonancia del motor, haciendo abstracción completa del reductor y de la hélice.

Claro es que en el caso más general en un avión no podrá hacerse esta abstracción, pero el estudio completo de las velocidades de resonancia del grupo motopropulsor es de una dificultad grandísima, y quizá en siguientes artículos pueda dar algunas ideas sobre él.

Es claro que en un motor de explosión existen también vibraciones laterales o de flexión, pero yo hago caso omiso de ellas, porque generalmente las distancias entre cojinetes son tan pequeñas que resultan para estas vibraciones unas frecuencias elevadísimas, y no hay peligro de resonancia. Es por lo que los métodos que a continuación expongo se refieren exclusivamente a la determinación de las velocidades de resonancia debidas a las vibraciones de torsión.

No voy a exponer la teoría detallada de estos métodos, sino que voy a hacer la aplicación a un motor de las siguientes características, cuyo anteproyecto tuve que hacer el pasado año en la Escuela Superior Aerotécnica.

Motor en X de 24 cilindros:

Potencia a 4.000 metros....	875 cv.
Revoluciones por minuto.....	2.200
Carrera.....	153 mm.
Diámetro.....	153 mm.

El embielaje está constituido por biela maestra y bieletas.

Es por todos conocido el peligro de la aparición del fenómeno de la resonancia, caracterizado por llegar a hacerse infinitas las deformaciones y, por tanto, sobrevenir la ruptura del material, estando éste sometido a esfuerzos normales. La aparición de este fenómeno es solamente debida a la igualdad de frecuencia de la vibración propia del material y de las fuerzas exteriores.

El estudio teórico de la vibración propia puede hacerse con relativa facilidad en un eje circular con varias masas afectas; así es que es a este «esquema» al que debemos reducir el cigüeñal del motor, para lo cual tenemos que definir primeramente lo que entendemos por «longitud equivalente» y «masa equivalente».

Longitud equivalente.—Se entiende por longitud equivalente (de un codo del cigüeñal, por ejemplo) la longitud que tendrá un eje circular de un diámetro cualquiera para que en su extremo el ángulo de torsión bajo el par aplicado al codo sea el mismo que el del codo.

Masa equivalente.—Se entiende por masa equivalente (por ejemplo, de la biela y masas afectas a ella) una masa, cuyo momento de inercia mecánico I sea tal que su inercia cinética, al girar con el eje, sea la misma que la energía cinética de las otras masas, a las que equivale.

Pasemos a determinar esa longitud y esa masa equivalente en el motor indicado.

Longitud equivalente al codo.—Es evidente que, según la

definición de longitud equivalente, ésta dependerá de como estén las sustentaciones del codo, por lo cual en la práctica, según Timoschenko, deben considerarse dos casos extremos de sustentación:

1.º Suponer que los muñones o cuerpos del cigüeñal tienen el huelgo suficiente en sus cojinetes para permitir libremente todos los desplazamientos de las secciones mn (fig. 1).

2.º Suponer que los muñones o cuerpos del cigüeñal están

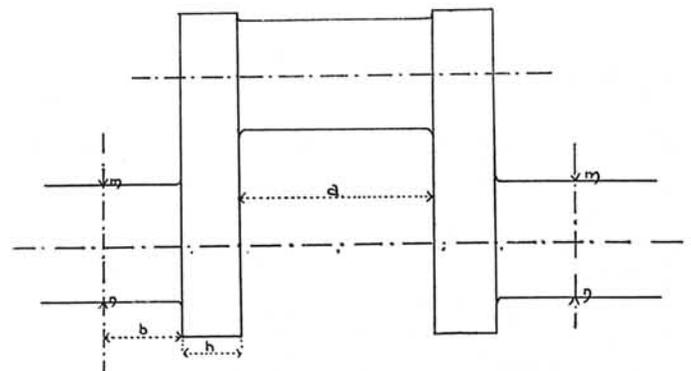


Fig. 1.

empotrados perfectamente en los cojinetes, no permitiéndoles, por tanto, desplazamiento alguno. Y una vez determinada la longitud equivalente en estos casos, se adopta la media.

Primer caso.—Aplicamos al cigüeñal el par medio del motor $M_T = 336 \times 10^3$ kilogramos por milímetro. El ángulo de torsión en el codo se determina teniendo en cuenta que consta de tres partes: a) Torsión de los muñones.—b) Torsión de la muñequilla.—c) Flexión de los brazos.

Sean:

$C_1 = I_0 G$ = rigidez torsional de los muñones = 1525608×10^4 kilogramos por milímetro cuadrado.

$C_2 = I_1 G$ = rigidez torsional de las muñequillas = 1525608×10^4 kilogramos por milímetro cuadrado.

$B = I_2 E$ = rigidez a flexión de los brazos en el plano perpendicular al codo = 18948168×10^3 kilogramos por milímetro cuadrado.

$I_0 = I_1$ = momento de inercia polar.

E = coeficiente de elasticidad longitudinal = 24.000 kilogramos por milímetro cuadrado.

G = coeficiente de elasticidad transversal = 9.000 kilogramos por milímetro cuadrado.

$$I = \text{momento de inercia geométrico} = \frac{h D^3}{12}$$

Para tener en cuenta las deformaciones locales en las secciones de unión de la muñequilla, y los muñones con los brazos, deben tomarse, según el citado Timoschenko, para longitud del cuerpo,

$$2b_1 = 2b + 0,9h = 116,2 \text{ mm.};$$

para longitud de la muñequilla,

$$a_1 = a + 0,9 h = 127,2 \text{ mm.}$$

El ángulo de torsión producido en el codo por el par motor medio M_T será,

$$\theta = \frac{2b_1 M_T}{C_1} + \frac{a_1 M_T}{C_2} + \frac{2r M_T}{B}$$

Si el eje por el que sustituimos el codo tiene por rigidez torsional $C = C_1$, la longitud de este eje, equivalente al codo, será

$$l = \frac{C_1 \theta}{M_T}$$

con los valores de C , θ y M_T calculados anteriormente; luego

$$l = \frac{C}{M_T} \left(\frac{2b_1 M_T}{C_1} + \frac{a_1 M_T}{C_2} + \frac{2r M_T}{B} \right) = C \left(\frac{2b_1}{C_1} + \frac{a_1}{C_2} + \frac{2r}{B} \right) \approx 365,5 \text{ mm.}$$

Segundo caso. — En este caso se determina la longitud equivalente por la ecuación

$$l' = C \left[\frac{2b_1}{C_1} + \frac{a_1}{C_2} \left(1 - \frac{r}{K} \right) + \frac{2r}{B} \left(1 - \frac{r}{2K} \right) \right] \approx 362 \text{ mm.}$$

$$K = \frac{\frac{r(a+b)}{4C_3} + \frac{ar^2}{2C_2} + \frac{a^3}{24B_1} + \frac{r^3}{3B} + \frac{l_1 2}{G} \left(\frac{ar}{2F} + \frac{r}{F_1} \right)}{\frac{ar}{2C_2} + \frac{r^2}{2B}}$$

$$C_3 = \frac{D^3 h^3 G}{3,6 (D^2 + h^2)} = \text{rigidez torsional del brazo.}$$

B_1 = rigidez de flexión de la muñequilla.

F = área de la sección de la muñequilla.

F_1 = área de la sección del brazo.

Tomó para longitud equivalente del codo

$$\frac{365,5 + 362}{2} = 363,7 \text{ mm.}$$

Masa equivalente en cada codo. — Según lo dicho anteriormente, hay que determinar una masa cuya energía cinética $\frac{1}{2} I \omega^2$ (I = momento de inercia mecánico, ω = velocidad angular del eje) sea igual a la energía cinética de las masas afectas al émbolo y a la muñequilla.

La velocidad lineal de la masa afecta a la muñequilla es ωr y las velocidades de las masas afectas a los émbolos son:

En el bloque 1:

$$v = \omega r \text{ sen } \omega t + \frac{r^2 \omega}{l} \text{ sen } 2 \omega t = \omega r \text{ sen } \alpha + \frac{r^2 \omega}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha.$$

En el bloque 2:

$$v = \omega r \text{ sen } \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \frac{r^2 \omega}{2 l} \text{ sen } 2 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \omega r \text{ cos } \alpha - \frac{r^2 \omega}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha.$$

En el bloque 3:

$$v = \omega r \text{ sen } (\pi + \alpha) + \frac{r^2 \omega}{2 l} \text{ sen } 2 (\pi + \alpha) = -\omega r \text{ sen } \alpha + \frac{r^2 \omega}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha.$$

En el bloque 4:

$$v = \omega r \text{ sen } \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) + \frac{r^2 \omega}{2 l} \text{ sen } 2 \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\omega r \text{ cos } \alpha - \frac{r^2 \omega}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha.$$

r = radio de la muñequilla.

l = carrera.

Energía cinética instantánea.

$$T = \frac{1}{2} M_1 \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \left[M_2 \left(\text{sen } \alpha + \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 + M_3 \left(\text{cos } \alpha - \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 + M_4 \left(\text{cos } \alpha - \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 + M_5 \left(\text{cos } \alpha - \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 \right]$$

M_1 = masa afecta a la muñequilla.

M_2 = masa afecta al émbolo (bloque 1).

$M_3 = M_4 = M_5$ = masa afecta al émbolo (bloques 2, 3, 4)

Energía cinética media durante una revolución.

$$T_o = \frac{1}{2} T_o'$$

$$T_o' = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} M_1 \omega^2 r^2 d\alpha + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \int_0^{2\pi} M_2 \left(\text{sen } \alpha + \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 d\alpha + \int_0^{2\pi} M_3 \left(\text{cos } \alpha - \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 d\alpha + \int_0^{2\pi} M_4 \left(\text{sen } \alpha + \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 d\alpha + \int_0^{2\pi} M_5 \left(\text{cos } \alpha - \frac{r}{2 l} \text{ sen } 2 \alpha \right)^2 d\alpha \right]$$

Como es natural, las energías cinéticas medias de los bloques 2, 3 y 4 serán iguales y, por lo tanto,

$$T_o = \frac{1}{2} \left[M_1 + \frac{1}{2} (M_2 + M_3 + M_4 + M_5) \left(1 + \frac{r^2}{4 l^2} \right) \right] \omega^2 r^2$$

y sin error sensible,

$$T_o = \frac{1}{2} \left[M_1 + 2 M_2 \left(1 + \frac{r^2}{4 l^2} \right) \right] \omega^2 r^2.$$

La masa equivalente tendrá por momento de inercia mecánico

$$\left[M_1 + 2 M_2 \left(1 + \frac{r^2}{4 l^2} \right) \right] r^2 \approx 6.027,56 \text{ kgs.} \times \text{mm}^2$$

dados los valores que en el motor estudiado tienen M_1 y M_2 . No indico la determinación de estos valores, por ser de sobra conocido de todos.

Ya tenemos, por lo tanto, reducido cada codo a un eje con una masa; por lo tanto, el cigüeñal quedará reducido a un eje con seis masas (fig. 2).

Este eje tendrá por longitud

$$6 \times 363,5 = 2.181 \text{ mm.}$$

y las seis masas, espaciadas igualmente, tienen por momento de inercia mecánico, como hemos dicho,

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = 6.027,56 \text{ kgs.} \times \text{mm}^2$$

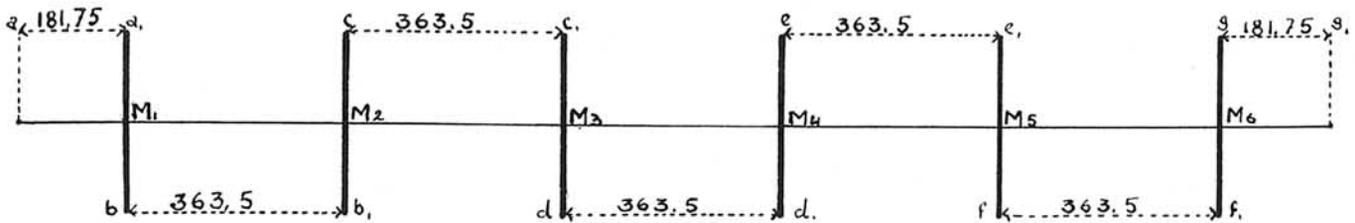


Fig. 2.

Para una primera aproximación desprecie la masa propia del eje, y sean:

l = distancia entre masas = 363,5 milímetros.

I = momento de inercia mecánico de las masas.

K = constante de los trozos de eje entre masas = $\frac{6 I_0}{363,5}$ = par de torsión por ángulo de torsión de un radian = 419,6 kgs \times mm.

$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \varphi_5 \varphi_6$ = desplazamientos angulares de las masas.

Estableciendo las ecuaciones de equilibrio, para lo que basta escribir, que el momento de inercia de cada masa, multiplicada por la aceleración, es igual y de signo contrario al par de torsión aplicado sobre dichas masas, tendremos:

$$\begin{aligned} I_1 \varphi_1'' + K(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ I_2 \varphi_2'' + K(\varphi_2 - \varphi_3) - K(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ I_3 \varphi_3'' + K(\varphi_3 - \varphi_4) - K(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0 \\ I_4 \varphi_4'' + K(\varphi_4 - \varphi_5) - K(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0 \\ I_5 \varphi_5'' + K(\varphi_5 - \varphi_6) - K(\varphi_4 - \varphi_5) &= 0 \\ I_6 \varphi_6'' - K(\varphi_5 - \varphi_6) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales lineales, de segundo orden, que pueden resolverse y obtenerse, por lo tanto, una solución particular, en el caso de suponer el movimiento vibratorio armónico simple, suposición que está de acuerdo con la experiencia.

En estas condiciones, los desplazamientos angulares instantáneos se podrán expresar como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda_1 \cos pt & \varphi_2 &= \lambda_2 \cos pt & \varphi_3 &= \lambda_3 \cos pt \\ \varphi_4 &= \lambda_4 \cos pt & \varphi_5 &= \lambda_5 \cos pt & \varphi_6 &= \lambda_6 \cos pt \end{aligned}$$

donde $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5$ y λ_6 son los máximos desplazamientos angulares.

Las ecuaciones, una vez ordenadas respecto a los λ , se convertirán en

$$\begin{aligned} (I_1 p^2 - K) \lambda_1 + K \lambda_2 &= 0 \\ K \lambda_1 + I_2 p^2 \lambda_2 + K \lambda_3 &= 0 \\ K \lambda_2 + I_3 p^2 \lambda_3 + K \lambda_4 &= 0 \\ K \lambda_3 + I_4 p^2 \lambda_4 + K \lambda_5 &= 0 \\ K \lambda_4 + I_5 p^2 \lambda_5 + K \lambda_6 &= 0 \\ K \lambda_5 + I_6 p^2 \lambda_6 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando de estas ecuaciones $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6$ llegamos a la ecuación que nos da la pulsación p . Esta ecuación es

$$\Delta(p^2) = 0$$

donde $\Delta(p^2)$ representa el discriminante de Silvester, que tendrá por expresión:

$$\begin{vmatrix} I_1 p^2 - K & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & I_2 p^2 & K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & I_3 p^2 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & I_4 p^2 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & I_5 p^2 & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K & I_6 p^2 \end{vmatrix} = 0$$

Por ser el determinante de sexto grado, dará lugar a una ecuación de grado 12 en p , lo que nos dice que la resolución analítica en este caso es muy dificultosa, pero lo expongo por creer que hasta cuatro masas éste es el más conveniente, por ser el más rápido, y creo también que es muy conveniente emplear, para la resolución de las ecuaciones en estos casos, el esquema de «Horner».

Ahora bien, en el caso del motor considerado, y mejor dicho, en la mayoría de los casos, ya que por regla general los motores constan de bloques de más de cuatro cilindros, conviene emplear el método de F. M. Lewis (*Trans. of Naval Architects and Marine Engineers*, de 1925), con el que se evita la resolución de la citada ecuación.

En esencia, este método es lo siguiente: Se da un valor arbitrario al ángulo de torsión inicial y a la frecuencia, y con estos valores determinaremos el momento correspondiente al otro extremo del eje. Se repite esto un cierto número de veces y se construye una curva que tenga por abscisas frecuencias, y por ordenadas, momentos. El punto en que esta curva corta al eje de abscisas, nos da la frecuencia propia de vibración del eje. En efecto, en ese punto el momento en el extremo es nulo, lo que nos dice que no es necesario aplicar ningún par al eje para que vibre con esa frecuencia. Es decir, que abandonado a sí mismo vibra con esa frecuencia.

Voy a hacer aplicación al motor en estudio.

Para ello diremos primeramente que el incremento de mo-

mento, producido por una masa de momento de inercia mecánico I_1 y sometida a un ángulo de torsión θ_1 es:

$$\Delta M = 4 \pi^2 \gamma_1^2 I_1 \theta_1$$

$$\gamma_1 = \text{Frecuencia} = \frac{2 \pi}{P}$$

El incremento del ángulo de torsión, por una longitud de eje l , es:

$$\Delta \theta_1 = \frac{(M_1 + \Delta M) l}{G I_0}$$

I_0 = momento de inercia polar del eje.

G = coeficiente de elasticidad de transversal.

Para mayor comodidad se disponen los cálculos, como se indica en el cuadro adjunto. Operando en la misma forma y dando a P los valores sucesivos de 40, 45 y 50 radianes, se obtienen otros tres cuadros análogos, con los cuales se ha construido la curva de la fig. 3, y por ella vemos que la frecuencia propia fundamental, o primario, corresponde a siete períodos por segundo, es decir, una velocidad de $7 \times 60 = 420$ revoluciones por minuto. Para determinar el secundario de la vibración propia, bastaría seguir dando valores a h cada vez mayores, y nuevamente volverían a tomar valores positivos los momentos, y, por lo tanto, a cortar la curva al eje de abscisa, y ese punto de intersección nos daría el secundario, y así sucesivamente el terciario, etc. Dada la forma de la curva se ve que éstos corresponderían a frecuencias elevadísimas, y, por lo tanto, no nos interesan.

El régimen normal del motor sería, aproximadamente, 1.800 revoluciones por minuto, luego ya vemos que no hay peligro de resonancia entre el primario y el par periódico motor. Ahora

bien, sabemos que este par periódico puede desarrollarse, según la serie de Fourier, del siguiente modo:

$$Y = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2 \omega t + \dots + A_n \cos n \omega t + \dots + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2 \omega t + \dots + B_n \sin n \omega t.$$

Por lo tanto, podrá haber resonancia siempre que la frecuencia de alguno de los términos de esa serie coincida con la frecuencia de alguno de los modos de vibración natural del eje.

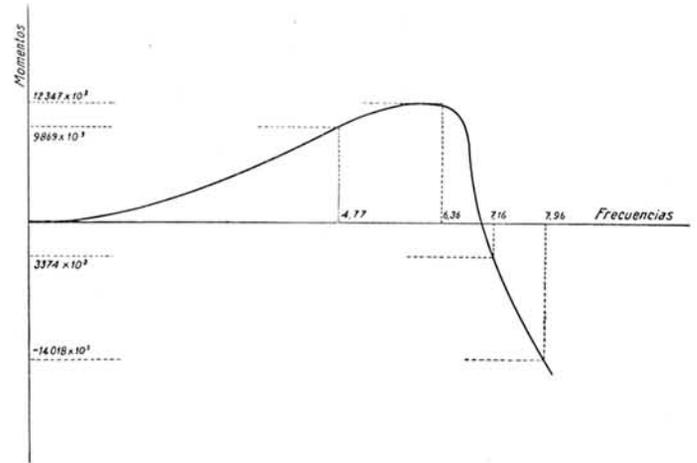


Fig. 3.

En un artículo próximo indicaremos el modo de determinar esas frecuencias, y cómo se tiene en cuenta la masa del eje, aunque desde luego se sabe que por tener en cuenta esa masa, la velocidad de resonancia disminuye.

$P = 30$ radianes.

$n = \frac{P}{2 \pi} = 4,77$ periodos por segundo.

$4 \pi^2 n^2 = 987,3$.

Log. $4 \pi^2 n^2 = 2,95294$.

	TROZO a a ₁		TROZO b b ₁		TROZO c c ₁		TROZO d d ₁		TROZO e e ₁		TROZO f f ₁	
	Log.	Valor.										
I (Kilogramos mm ²)..	3,77014	6027,56	3,77014	6027,56	3,77014	6027,56	3,77014	6027,56	3,77014	6027,56	3,77014	6027,56
G (Kilogramos mm ²) ..	3,95424	9000	3,95424	9000	3,95424	9000	3,95424	9000	3,95424	9000	3,95424	9000
J (mm ⁴)..	6,20096	15884×10^2										
l (mm) ..	2,25947	181,75	2,56050	363,5	2,56050	363,5	2,56050	363,5	2,56050	363,5	2,56050	363,5
$\frac{l}{GJ}$	8,10427	8,40530	8,40530	8,40530	8,40530	8,40530
θ al principio del trozo	0	1	1,96976	0,9328	1,82808	0,6731	1,50920	0,3230	1,84880	- 0,0706	1,55098	- 0,3693
Momentos en la sección anterior.....	0	5285×10^3	10215×10^3	13772×10^3	15479×10^3	11748×10^3
$J + M$	2,95294 3,77014											
$4 \pi^2 n^2 I \theta$	0 6,72308		1,96978 6,69286		1,82808 6,55116		1,50920 6,23228		1,84880 6,57188		1,55098 6,27406	
$M + J M$	6,72308	5285×10^3	7,00923	10215×10^3	7,13899	13772×10^3	7,18974	15479×10^3	7,06996	11748×10^3	6,99427	9869×10^3
$J \theta$	6,72308		7,00923		7,13899		7,18974		7,06996		6,99427	
$\frac{(M + J M) l}{G J}$	8,10427 2,82735		8,40530 1,41453		8,40530 1,54429		8,40530 1,59504		8,40530 1,47526		8,40530 1,39957	
		0,0672		0,2597		0,3501		0,3936		0,2987		0,2509