UNA APLICACION

DE LA

TEORÍA DE NÚMEROS FIGURADOS

POR

D. E. T. DE LA F.

CAPITAN DE INGENIEROS.

MADRID

IMPRENTA DEL MEMORIAL DE INGENIEROS

1885

UNA APLICACION

DE LA

TEORÍA DE NÚMEROS FIGURADOS

POR

D. E. T. DE LA F.

CAPITAN DE INGENIEROS.

MADRID
IMPRENTA DEL MEMORIAL DE INGENIEROS
1885

UNA APLICACION

DE LA

TEORÍA DE NÚMEROS FIGURADOS.

Mucho tiempo hacía, que entre otros apuntes curiosos que tenemos gusto en conservar, figuraba una inscripcion que Silo, rey de Oviedo (774-783), habia hecho poner en el monasterio é iglesia de San Juan Evangelista, fundado por él en Právia (pequeña villa de Astúrias situada á la izquierda del Nalon), donde habia fijado su residencia. Esta inscripcion está dispuesta tan ingeniosamente, que hace posible sea leida de un gran número de modos distintos; número considerable por la gran cantidad de combinaciones que pueden hacerse y del cual no teníamos idea, hasta que hojeando un dia la *Historia de España* de Mariana (*), vimos hacía referencia, al tratar del reinado de Silo, y de la iglesia que fundó en Právia, á la inscripcion «donde en cierta manera de cifra se lee su nombre y se dice y »repite *docientas y setenta* veces que hizo aquella iglesia». Poco tiempo despues cayó en nuestras manos un periódico que se ocupaba de la inscripcion, y luego otro, y otros varios papeles, diciendo el que más, que podia leerse de 300 modos distintos. Despertada nuestra curiosidad con estas noticias y aprovechando los pocos ócios que nuestras ocupaciones y «el económico servicio de subalterno» nos permitian, tratamos de determinar su exactitud; habiendo llegado á ver, despues de algunas tentativas, que el número de veces que inscripciones así dispuestas pueden leerse, se halla á la simple inspeccion de una tabla de números figurados.

Tal es el objeto de estos apuntes, que publicamos como una mera curiosidad, alentados, por no ser la primera vez que el *Memorial* publica trabajos de está índole (**); y por contar de antemano con la indulgencia que nuestros ilustrados compañeros de cuerpo, han de dispensar seguramente, al primer é insignificante trabajo que tenemos el atrevimiento de presentar.

(*) Tomo II, pág. 194.—Madrid, 1828.

(**) *Memoria sobre el modo de reducir el cómputo mahometano al de la Era cristiana, y hallar el dia de la semana y la letra dominical que corresponden á una fecha para cualquier dia del año de la misma Era*, por el Excmo. Sr. D. Manuel Varela y Limia, antiguo oficial de ingenieros, brigadier de infantería.—75 pág.—1.ª época, tomo IX, 1854.

I.

La inscripcion objeto de estos apuntes es la siguiente:

c

1 2 3 4 5 . . . . m

n.... 7′	T I C E F S P E C N C E P S F E C I T	
6′	I C E F S P E C N I N C E P S F E C I	
5′	C E F S P E C N I R I N C E P S F E C	
4′	E F S P E C N I R P R I N C E P S F E	
3′	F S P E C N I R P O P R I N C E P S F	
2′	S P E C N I R P O L O P R I N C E P S	
1′	P E C N I R P O L I L O P R I N C E P	
a . .	E C N I R P O L I S I L O P R I N C E	**b**
	P E C N I R P O L I L O P R I N C E P	
	S P E C N I R P O L O P R I N C E P S	
	F S P E C N I R P O P R I N C E P S F	
	E F S P E C N I R P R I N C E P S F E	
	C E F S P E C N I R I N C E P S F E C	
	I C E F S P E C N I N C E P S F E C I	
	T I C E F S P E C N C E P S F E C I T	

d

que dice siempre *Silo princeps fecit*, empezando á leer por la letra *S* del centro y terminando en la *T* de uno de los vértices, siguiendo un camino en ángulo recto y sin retroceder nunca. A poco que se observe se nota que éste, está comprendido dentro de uno de los cuadrantes en que dividen á la inscripcion las líneas marcadas *a b* y *c d*; líneas que á su vez son simétricas con relacion á *S*, como lo son con relacion á la letra situada en dichas líneas *a b* y *c d*, cada una de las horizontales y verticales de la figura; es decir, que si doblamos la inscripcion por *a b* y luego por *c d*, se superpondrán las mismas letras, y por tanto, para hallar el número de lecturas que se busca, bastará encontrar las que dá el rectángulo *S*, m, 1 n, a, y multiplicar por cuatro el resultado.

Dicho esto y conviniendo en llamar *columnas* á las líneas verticales de letras marcadas en la inscripcion por 1, 2, 3 ... que supondremos en número de m (contando la *Sc*); y numerando 1′, 2′, 3′ ... á las *líneas* horizontales que supondremos en número de n (sin contar la *Sa*); veamos qué caminos se pueden seguir *en la lectura* de la inscripcion, para que podamos resolver el problema. Estos caminos son dos en general: uno de *S* á *a* y otro de *S* á *c*, deteniéndose en una cualquiera de las letras de $S a$ y $S c$, y luego siguiendo el camino ya indicado ántes, hasta llegar á T. Estos dos caminos se reducen á uno solo, pues eligiendo el $S a$, por ejemplo, se puede ir: primero, de S á E $(1, a)$ (*) y luego á T $(1, n)$; segundo, de S á C $(2, a)$ y de $(2, a)$ pasando por todas y cada una de las letras de la c. 2 (**) á $(1, n)$; y así para las demás. De este modo, luego de ir á $(m\text{-}1, a)$, como (m, a) es la letra S del centro, se recorre la c. m. Si partiéramos de $S c$ coincidirian con los anteriores, los caminos que pudieran seguirse.

Vamos á ver ahora de qué modo podemos determinar el número de lecturas; si éstas siguen alguna ley fija, y si esto se verifica, deducir la fórmula para este caso y *la general* para otros análogos.

Si partiendo de S se va á $(1, a)$, desde allí sólo se puede llegar á $(1, n)$ por un camino, luego el número de lecturas que dá la primera columna y que representaremos por $a^1 = 1$ (***).

Si en lugar de detenernos en $(1, a)$ lo hacemos en $(2, a)$, de aquí se puede: primero, pasar á $(2, 1')$ y de aquí por $(1, 1')$ á $(1, n)$; segundo, de $(2, a)$ á $(2, 2')$, de aquí á $(1, 2')$ y $(1, n)$, y así para todas las demás letras de la c. 2; es decir, que el número de lecturas a^2, que dá la c. 2 es igual al número de letras desde $(2, 1')$ inclusive hasta $(2, n)$; luego $a^2 = n$, resultado que es independiente del valor de n y aplicable por tanto á cualquier caso.

Antes de pasar adelante estableceremos una notacion general, llamando

$$\left\{\begin{array}{llll} a^1 = & \text{número de lecturas de} & & \text{la c. } 1 \\ a^2 = & \text{id.} & \text{id.} & \text{de la c. } 2 \\ a^m = & \text{id.} & \text{id.} & \text{de la c. } m. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} b_1^m = & \text{número de lecturas que dá la letra primera de la} \\ & \text{c. } m \text{ (empezando á contar desde la línea } S\text{-}a). \\ b_2^m = & \text{id. id. id. de la letra segunda de la c. } m \\ b_n^m = & \text{id. id. id. de la letra } n^{\text{ésima}} \text{ de la c. } m \end{array}\right.$$

número que tiene que ser la unidad, pues de cualquier letra de la línea n, no se puede ir á $(1, n)$ más que por un camino.

Continuemos. Partiendo de S y deteniéndose en $(3, a)$, de aquí: primero,

---

(*) Para evitar confusion al nombrar las letras, ponemos á su derecha entre paréntesis los dos números de la columna y línea en cuya interseccion está la letra de que se trata.

(**) c. 2, indica *columna* 2.

(***) Desde aquí en adelante las letras en las que haya números que ocupen el lugar de los exponentes, no tienen esta significacion, sino simplemente el de índices.

vamos á (3, 1') y de (3, 1') á (2, 1'); pero una vez en (2, 1') se puede ir á todas y cada una de las letras de la c. 2, luego el número de lecturas que dé la letra b_1^3, será tantas como la c. 2, y no coincidirán con las lecturas anteriores porque ahora hemos llegado á (2, 1') por (3, 1') y ántes por (2, a); luego $b_1^3 = a^2$, resultado tambien independiente de n; segundo, de (3, a) á (3, 2'), y de aquí se puede ir á todas las letras de la c. 2, ménos á la (2, 1'), pasando por (2, 2') siempre; es decir, que el número b_2^3 de lecturas será tantas como la c. 2, ménos las de b_1^2, de la letra (2, 1'), ó sea $b_2^3 = a^2 - b_1^2$; tercero, de (3, a) á (3, 3'): de (3, 3') se puede ir á todas las letras de la c. 2 (pasando siempre por (2, 3')), ménos á las letras (2, 1') y (2, 2'); luego

$$b_3^3 = a^2 - \left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

Yendo luego de (3, a) á (3, 4'), (3, 5'), etc., deduciríamos análogamente que

$$b_4^3 = a^2 - \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$$

. . . .

$$b_n^3 = a^2 - \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + b_{n-1}^2\right).$$

Siendo general esta fórmula para la c. 3, pues todos los valores que entran son independientes de n; y pudiendo generalizarse á una letra cualquiera de cualquier columna, puesto que en todas se repite el razonamiento anterior. Fijándose en la ley de los números que ocupan el lugar de los exponentes, é índices, se puede establecer:

$$[1] \quad b_n^m = a^{m-1} - \left(b_1^{m-1} + b_2^{m-1} + b_3^{m-1} + \ldots\ldots + b_{n-1}^{m-1}\right),$$

fórmula que fácilmente se traduce en una regla; faltándonos únicamente deducir la que dé el número de lecturas de una columna cualquiera. Pero si sumamos el número de lecturas que dán todas las letras de una columna, evidentemente resultará el de ésta; es decir, que verificándose siempre que

$$[2] \quad a^m = b_1^m + b_2^m + b_3^m + \ldots\ldots + b_n^m;$$

y aplicando la fórmula [1] á todas las letras de la c. m, tendremos:

$$b_1^m = a^{m-1}$$

$$b_2^m = a^{m-1} - \left(b_1^{m-1}\right)$$

$$b_3^m = a^{m-1} - \left(b_1^{m-1} + b_2^{m-1}\right)$$

. . . .

$$b_n^m = a^{m-1} - \left(b_1^{m-1} + b_2^{m-1} + b_3^{m-1} + \ldots\ldots + b_{n-1}^{m-1}\right)$$

$$[3] \quad a^m = n \,.\, a^{m-1} - \left((n-1)\, b_1^{m-1} + (n-2)\, b_2^{m-1} + (n-3)\, b_3^{m-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (n-(n-2))\, b_{n-2}^{m-1} + (n-(n-1))\, b_{n-1}^{m-1}\right),$$

de donde podríamos deducir una regla práctica.

En realidad la cuestion está ya resuelta, pues como se conoce $a^1 = 1$ y $a^2 = n$, se conoceria inmediatamente a^3 que es funcion de b_1^2, b_2^2, b_3^2 ..... cantidades todas iguales á uno; aplicando la fórmula [1] b_1^3, b_2^3, b_3^3 ...... y en seguida a^4 funcion de estas cantidades y de a^3. Podríamos continuar así hasta llegar á la c. m, y teniendo en cuenta que se verifica por lo que hemos dicho al principio,

$$A = 4\left(a^1 + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^m\right),$$

el número A sería el total de lecturas pedido; sin embargo, como se verá en lo que sigue, puede deducirse una expresion de estas fórmulas, más general aún que las anteriores, que estudiada á su vez conduce á determinar A á la inspeccion de una tabla de números figurados.

II.

Si en la fórmula [1] ponemos en vez de b_1^{m-1}, b_2^{m-1}, ... sus valores en funcion de los correspondientes de a, podremos deducir el número de lecturas b_p^m de la letra de lugar p de la c. m, sin necesidad de conocer b_1^{m-1}, b_2^{m-1}, ... y sólo por el conocimiento del número de lecturas de las columnas anteriores. Aplicando, pues, dicha fórmula al conocimiento de b_1^{m-1}, ... tendremos sucesivamente:

1.º $\left\{ b_1^m = a^{m-1} \right.$

2.º $\left\{ b_2^m = a^{m-1} - b_1^{m-1} \quad » \quad b_1^{m-1} = a^{m-2} \quad » \quad b_2^m = a^{m-1} - a^{m-2} \right.$

3.º $\left\{ \begin{array}{l} b_3^m = a^{m-1} - \left(b_1^{m-1} + b_2^{m-1}\right) \quad » \quad b_2^{m-1} = a^{m-2} - \left(b_1^{m-2}\right) = a^{m-2} - a^{m-3} \\ b_3^m = a^{m-1} - \left[a^{m-2} + \left(a^{m-2} - a^{m-3}\right)\right]; \end{array} \right.$

y siguiendo así llegaríamos á deducir que b_p^m tenía por expresion (*)

(*) No ponemos la deduccion de b_4^{m-1}, b_5^{m-1}, ... porque dá fórmulas algo largas, y como por otra parte son sencillas de hallar, establecemos la fórmula gene ral desde luego.

$$b^m_p = a^{m-1} - X,$$

estando X representado por

$$X = a^{m-2} + \{a^{m-2} - a^{m-3}\} + \{a^{m-2} - [a^{m-3} + (a^{m-3} - a^{m-4})]\} + \dots$$
$$\dots + \Big\{ a^{m-2} - \Big[a^{m-3} + [a^{m-3} - a^{m-4}] + \Big[a^{m-3} - \big(a^{m-4} - (a^{m-4} - a^{m-5})\big)\Big]\Big] + \dots$$
$$\dots + \Big[a^{m-3} - \big(a^{m-4} + (a^{m-4} - a^{m-5})\big) + \dots$$
$$\dots + \Big(a^{m-(p-2)} + \big(a^{m-(p-1)} + (a^{m-(p-1)} - a^{m-p})\big)\Big)\Big]\Big\};$$

y quitando los paréntesis para poner de manifiesto los signos, sumando los términos semejantes y sacando factores comunes, será:

$$X = (1+1+\dots..)a^{m-2} - (1+2+3+4+\dots..)a^{m-3} + (1+3+6+10+\dots..)a^{m-4} -$$
$$- (1+4+10+\dots..)\, a^{m-5} + \dots.. \mp (1+6)\, a^{m-(p-1)} \pm 1.a^{m-p} \quad (*)$$

en cuya expresion el coeficiente de a^{m-2} tiene $(p-1)$ términos; el de a^{m-3}, $p-2$; el de a^{m-4}, $p-3$; ..... el de $a^{m-(p-2)}$ tres, el primero la unidad, y los otros dos los que ahora veremos; el de $a^{m-(p-1)}$, dos, uno la unidad; y el de a^{m-p} la unidad.

Ahora bien, el coeficiente de a^{m-2} es la suma de los $p-1$, primeros números figurados de primer órden; el de a^{m-3} la suma de los primeros $p-2$, números figurados de segundo órden; y así los demás hasta el de $a^{m-(p-1)}$, que será la suma de los dos primeros números figurados de órden $m-(p-2)$; y por analogía, el de a^{m-p} podremos decir será el primer número figurado de órden $m-(p-1)$. Pero en los números figurados se verifica, que «la suma de m números figurados del órden n, es igual al número figurado de lugar m y de órden $n+1$»; luego teniendo esto en cuenta, y representando por

$$\alpha^m_1,\ \alpha^m_2,\ \alpha^m_3 \dots..\ \alpha^m_n$$

el primero, segundo ..... números figurados del órden m, X, y por consiguiente b^m_p, se podrá expresar como sigue:

(*) El signo de a^{m-p} será $+$ (en el valor de b^m_p), si p es impar, y $-$ si p es par; puesto que b^m_p tiene p términos; el primero es positivo y no hay ninguna permanencia.

$$[4]\quad \begin{cases} b^m_p = \alpha^1_p \,.\, a^{m-1} - \alpha^2_{p-1} \,.\, a^{m-2} + \alpha^3_{p-2} \,.\, a^{m-3} - \ldots\ldots \mp \alpha^{p-2}_3 \,.\, a^{m-(p-1)} \pm \\ \qquad \pm\, \alpha^{p-1}_2 \,.\, a^{m-(p-1)} \mp \alpha^p_1 \,.\, a^{m-p}. \end{cases}$$

Aunque á primera vista esta fórmula (que podríamos traducir en una regla) no parece general, por ser el último término funcion de a^{m-p}, puede sin embargo aplicarse, áun en el caso en que $m < p$, observando que cada término está multiplicado por el número de lecturas de una columna siempre distinta, y que se vá aproximando á la primera; y como no podemos así llegar más que á ésta, el término funcion de ella será el último (*).

El valor de b^m_p que hemos determinado está en funcion de los valores de $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ .....; es necesario, por consiguiente, la determinacion del valor general de a.

Si aplicamos la fórmula [4] para deducir los valores de b^m_1, b^m_2 ..... que entran en la [2], resulta:

$$b^m_1 = a^{m-1}$$

$$b^m_2 = a^{m-1} - \alpha^2_1 \times a^{m-2}$$

$$b^m_3 = a^{m-1} - \alpha^2_2 \times a^{m-2} + \alpha^3_1 \times a^{m-3}$$

. . . .

$$b^m_{n-1} = a^{m-1} - \alpha^2_{n-2} \times a^{m-2} + \alpha^3_{n-3} \times a^{m-3} - \ldots\ldots \pm \alpha^{n-2}_{(n-1)-(n-3)} \times a^{m-(n-2)} \mp$$
$$\mp\, \alpha^{n-1}_{(n-1)-(n-2)} \times a^{m-(n-1)}$$

$$b^m_n = a^{m-1} - \alpha^2_{n-1} \times a^{m-2} + \alpha^3_{n-2} \times a^{m-3} - \ldots\ldots \pm \alpha^{n-2}_{n-(n-3)} \times a^{m-(n-2)} \mp$$
$$\mp\, \alpha^{n-1}_{n-(n-2)} \times a^{m-(n-1)} \pm \alpha^n_{n-(n-1)} \times a^{m-n},$$

y teniendo en cuenta la [2]

$$a^m = n\,.\,a^{m-1} - \left(\alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \alpha^2_3 + \ldots + \alpha^2_{n-1}\right) a^{m-2} + \left(\alpha^3_1 + \alpha^3_2 + \alpha^3_3 + \ldots + \alpha^3_{n-2}\right) - \ldots$$
$$\ldots \mp \left(\alpha^{n-2}_1 + \alpha^{n-2}_2 + \alpha^{n-2}_3\right) a^{m-(n-2)} \pm \left(\alpha^{n-1}_1 + \alpha^{n-1}_2\right) a^{m-(n-1)} \mp \alpha^n_1 \,.\, a^{m-n}.$$

Observando la composicion de los coeficientes de a^{m-2}, a^{m-3}, ... y teniendo en cuenta una de las propiedades de los números figurados, ya ante-

(*) Los tres casos que se pueden presentar, son:

1.° $m > p$ » $m - p > 0$. Se llega hasta el término en a^{m-p}. El valor de b^m_p tiene todos sus términos, que son en número de p.

2.° $m = p$ » $m - p = 0$. El último término desaparece, se llega hasta el de lugar $m - (p - 1) = m - (m - 1) = 1$, y el número de términos es $p - 1 = m - 1$.

3.° $m < p$. Se llega tambien hasta el término $\overset{1}{a}$. El número de términos es igual á $m - 1$.

riormente citada, tendremos que

$$[5]\quad \begin{cases} a^m = \alpha_n^2 \cdot a^{m-1} - \alpha_{n-1}^3 . a^{m-2} + \alpha_{n-2}^4 . a^{m-3} - \ldots . \mp \alpha_3^{n-1} . a^{m-(n-2)} \pm \alpha_2^n . a^{m-(n-1)} \mp \\ \qquad \mp \alpha_1^{n+1} \cdot a^{m-n}, \end{cases}$$

sustituyendo, á n el número figurado α_n^2 y á α_1^n el α_1^{n+1}, que tienen el mismo valor. En la aplicacion de la [5] puede ocurrir la misma dificultad que antes se presentaba en la [4], pero se resuelve del mismo modo (*).

Una vez hallada la [5], dando valores á m resultará:

$$\begin{cases} m = 1 \text{ » } a^1 = 1 \\ m = 2 \text{ » } a^2 = \alpha^2_n \times a^1 \\ m = 3 \text{ » } a^3 = \alpha^2_n \times a^2 - \alpha^3_{n-1} \times a^1 \\ m = 4 \text{ » } a^4 = \alpha^2_n \times a^3 - \alpha^3_{n-1} \times a^2 + a^4_{n-2}\, a^1 \text{ etc.} \end{cases}$$

y haciendo en estas, $n = 1, 2, 3 \ldots m$, resulta para el número de lecturas de la primera, segunda ... $m^{\text{ésima}}$ columna, segun los distintos valores de m y n, los números del siguiente cuadro:

Tabla **A.**

VALORES DE		VALORES DE n.										
m	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	a^1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	a^1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	a^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
3	a^1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	a^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	a^3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
4	a^1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	a^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	a^3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
	a^4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	...
..	...	..	..	...	...	...	...	...	....	....	....	...

(*) En efecto, los tres casos que se pueden presentar son:

1.° $m > n$. $m - n > 0$. Se llega hasta el término en que entra a^{m-n}. El valor de a^m tiene todos sus términos, que son en número de n.

2.° $m = n$. $m - n = 0$. El último término desaparece, y se llega hasta el término funcion de $a^{m-(n-1)} = a^{m-(m-1)} = a^1$. El número de términos es $n - 1 = m - 1$.

3.° $m < n$. Desaparece hasta el término en que entra a^1 exclusive. El número de términos es entónces $m - 1$.

siendo una tabla de números figurados los resultantes para cada valor de m, que sumados á su vez dan para $A' = \frac{A}{4}$ los valores de la

Tabla **B**.

VALORES de m.	VALORES DE n. 1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
3	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...
4	4	10	20	35	56	84	120	165	220	...
5	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...
6	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	...
7	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	...
8	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	...
..	..	...	....	....	....	......	......	......	....	...

que constituye tambien una tabla de números figurados; en la cual cada número representa, el total de lecturas de una inscripcion de un número de letras determinado por los valores de m y n. Si suponemos, por ejemplo, que la inscripcion es una en la que $m = 4$ y $n = 7$, la tabla **B**, dá $A' = 120$; número que buscado en la **A**, y en el valor correspondiente de m, vemos es el octavo número figurado de cuarto órden; es decir, que en general *el número de lecturas que se busca es igual al número figurado del órden* m *y de lugar* n + 1 *ó del órden* n + 1 *y de lugar* m, segun otra propiedad de los números figurados (*); resultado que en cierto modo parece se debia obtener, pues la disposicion de las letras en la inscripcion, si no exactamente igual, es análoga á la de las tablas de dichos números; y que aplicado á la inscripcion que motivó estos renglones, en el caso presente en que $m = 10$ y $n = 7$, dá

$$A' = 11.440 \quad \text{y} \quad A = 4 \,.\, A' = 45.760$$

número que se diferencia bastante de los que al principio apuntamos.

En realidad podíamos dar por terminados estos apuntes; pero con objeto de convencernos más de los resultados obtenidos, vamos á aplicar las fórmulas generales encontradas ántes, al caso particular de la inscripcion, comparando su resultado con el que directamente obtengamos.

(*) En todo esto se recordará que nos referimos únicamente á la cuarta parte de la inscripcion.

III.

APLICACION DE LAS PRIMERAS FÓRMULAS GENERALES.

Para la primera columna, evidentemente $a^1 = 1$.

Columna 2. Aplicando la fórmula [3] $a^2 = n\,a^1 = n = 7$, y para el número de lecturas de una letra cualquiera de la c. 2, teniendo en cuenta [1], $b^2_n = a^1 = 1$.

Con las mismas fórmulas, y de un modo análogo, obtenemos para las demás columnas:

$$
[6]\left\{
\begin{aligned}
&\text{Columna 3 » } a^3 = n\,a^2 - \left\{ (n-1) b^2_1 + (n-2) b^2_2 + (n-3) b^2_3 + \ldots + (n-6) b^2_6 \right\} = \\
&\qquad\qquad = 7\,a^2 - 21\,a^1 \\
&\qquad b^3_n = a^2 - \left(b^2_1 + b^2_2 + \ldots\ldots + b^2_{n-1} \right) = a^2 - (n-1)\,a^1 \\
&\text{Columna 4 » } a^4 = n a^3 - \{ 6a^2 + 5(a^2 - a^1) + 4(a^2 - 2a^1) + 3(a^2 - 3a^1) + 2(a^2 - 4a^1) + \\
&\qquad\qquad + (a^2 - 5\,a^1) \} = 7\,a^3 - 21\,a^2 + 35\,a^1 \\
&\qquad b^4_n = a^3 - [a^2 + (a^2 - a^1) + (a^2 - 2\,a^1) + (a^2 - 3\,a^1) + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + (a^2 - (n-2)\,a^1)],
\end{aligned}
\right.
$$

Obteniéndose para las columnas siguientes (no poniendo más que los valores finales)

$$a^5 = 7\,a^4 - 21\,a^3 + 35\,a^2 - 35\,a^1$$

$$a^6 = 7\,a^5 - 21\,a^4 + 35\,a^3 - 35\,a^2 + 21\,a$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Así podríamos llegar hasta la c. 10 (lo que no hacemos por no prolongar demasiado este artículo). Si ahora quisiéramos hallar a^1, a^2, a^3 ....., sólo en funcion de n, no tendríamos más, que hacer una de dos cosas; ó $a^1 = 1$ y $a^2 = n$ en los valores anteriores, en cuyo caso resulta:

$$
[7]\left\{
\begin{aligned}
a^1 &= 1 \\
a^2 &= n \\
a^3 &= 7n - 21 \\
a^4 &= 28\,n - 112 \\
a^5 &= 84\,n - 378 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

ó tomando los valores [6] en la primera forma en que allí aparecen, sustituir tambien $\overset{1}{a} = 1$ y $\overset{2}{a} = n$, resultando entónces:

$$[8]\quad \left\{ \begin{aligned} \overset{1}{a} &= 1 \\ \overset{2}{a} &= n \\ \overset{3}{a} &= \frac{n\,(n+1)}{2} \\ \overset{4}{a} &= \frac{7\,n\,(n-5)}{2} + 35 \\ \overset{5}{a} &= 14\,n\,(n-7) + 210 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

fórmulas que coinciden con los números de la tabla **A** para $n=7$ y $m=10$. En cuanto á los valores de $\overset{m}{b}_p$ ya los hemos determinado al tenerlos que sustituir en los correspondientes de $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots\ldots$ Si ahora aplicamos la fórmula [5], en que entran los números figurados, resultan inmediatamente y sin ningun trabajo las [6].

Deduccion directa. Como sabemos que $\overset{1}{a} = 1$ y $\overset{2}{a} = n$, repitiendo el mismo razonamiento que se hizo al deducir las primeras fórmulas generales, veríamos que en la c. 3 sería

$$\overset{3}{b}_1 = n \quad » \quad \overset{3}{b}_2 = n - 1 \quad » \quad \overset{3}{b}_3 = n - 2 \ldots\ldots \overset{3}{b}_7 = 1,$$

y segun la [2] $\qquad \overset{3}{a} = \dfrac{n\,(n+1)}{2}.$

En la c. 4, tomando la letra N (4, 1′) veríamos que de (4, 1′) se puede ir: primero, á (1, 1′), que produciria tantas lecturas como la c. 1 ó 1; segundo, á (2, 1′) (*), que dá tantas como la c. 2, ménos las que dá (2, 1′) que ya se han contado ó sea $n - 1$; tercero, á (3, 1′) que dá tantas como la c. 3 ménos las de (3, 1′) que forman parte de la anterior, ó sea

$$\frac{n\,(n+1)}{2} - n = \frac{n\,(n-1)}{2},$$

luego el número de lecturas de la letra N (4, 1′) será

$$\overset{4}{b}_1 = 1 + (n-1) + \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

ó sea tantas como la c. 3, como debia ser.

(*) Al decir yendo á (2, 1′), debe entenderse que esta letra es la terminacion en la horizontal, y que desde allí el camino es vertical; por ejemplo será (4, 1′) (3, 1′) (2, 1′) (2, 2′) sin pasar á la izquierda, pues el camino coincidiria con el (4, 1′) (1, 1′) ya contado.

De igual modo veríamos que el número de lecturas de la letra C (4, 2′) sería
$$b_2^4 = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2},$$
y para

$$[9]\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{E}\ (4, 3') & b_3^4 = \dfrac{n(n-3)}{2} + 1 \\ \mathrm{P}\ (4, 4') & b_4^4 = \dfrac{n(n-5)}{2} + 3 \\ \mathrm{S}\ (4, 5') & b_5^4 = \dfrac{n(n-7)}{2} + 6 \\ \mathrm{F}\ (4, 6') & b_6^4 = \dfrac{n(n-9)}{2} + 10 \\ \mathrm{E}\ (4, 7') & b_7^4 = \dfrac{n(n-11)}{2} + 15 \end{array}\right.$$

teniendo a^4 por valor, segun la fórmula [2]
$$a^4 = \frac{7n(n-5)}{2} + 35,$$
ó sea el correspondiente de [8].

Aquí se presenta otra comprobacion: b_7^4 tiene que ser igual á la unidad, pues de (4, 7′) á (1, 7′) no hay más que un camino; y en efecto, $b_7^4 = 1$, haciendo $n = 7$ en la última de las [9].

Antes de pasar adelante debemos observar tambien, que como todas las letras de la línea (n), no dan más que una sola lectura, las fórmulas en funcion de n sólo, que encontremos, deben ser idénticas.

Si pasamos á considerar letra por letra las de la c. 5, obtendrémos las fórmulas siguientes, que luego de sumadas reproducen el valor a^5 de [8]

$$[10]\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Letra I } (5, 1') & b_1^5 = \dfrac{7n(n-5)}{2} + 35 \\ \mathrm{N}\ (5, 2') & b_2^5 = \dfrac{6n(n-6)}{2} + 35 \\ \mathrm{C}\ (5, 3') & b_3^5 = \dfrac{5n(n-7)}{2} + 35 \\ \mathrm{E}\ (5, 4') & b_4^5 = \dfrac{4n(n-8)}{2} + 34 \\ \mathrm{P}\ (5, 5') & b_5^5 = \dfrac{3n(n-9)}{2} + 31 \\ \mathrm{S}\ (5, 6') & b_6^5 = \dfrac{2n(n-10)}{2} + 25 \\ \mathrm{F}\ (5, 7') & b_7^5 = \dfrac{n(n-11)}{2} + 15 \end{array}\right\} a^5 = 14n(n-7) + 210$$

verificándose que $b_7^4 = b_7^5$, como no podia ménos de suceder y habíamos supuesto ántes.

Creemos que baste esto para demostrar la perfecta coincidencia entre unos y otros resultados, como puede comprobarse haciendo $n = 7$ en estas fórmulas.

Comparando las fórmulas [9] y [10] es fácil darse cuenta de la ley que siguen los coeficientes del factor n en la fraccion; del sustraendo de n en el segundo factor de la misma, así como la que siguen los sumandos numéricos que acompañan á las fracciones; cosa que no hacemos en obsequio á la brevedad. Únicamente, para concluir, vamos á determinar la condicion para que el número de lecturas que dé una inscripcion de la clase de las que nos ocupamos, que es sumamente fácil de formar, sea un máximo.

Para esto supondremos, por ejemplo, que el número de letras que tenga la inscripcion sea 11; dando á n valores desde 1 hasta 10, resultan para m desde 10 hasta 1, y para el número total de lecturas de la cuarta parte de la inscripcion las del cuadro siguiente:

Valores de **n**.. . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valores de **m**. . . .	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Número de lecturas.	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

en el cual todos los números que representan las lecturas están situados en una misma diagonal en las tablas de números figurados, y van aumentando desde 10 (primer valor de m) hasta 252 (para $m = 6$ y $n = 5$) para luego volver á disminuir otra vez. Ahora bien, si observamos la disposicion que tienen los números figurados en las líneas diagonales, en las del lugar impar, empezando por el primer número figurado de primer órden, hay un número mayor que los demás; siendo iguales dos á dos y simétricamente colocados los que están ántes y despues de aquél, que siempre es del mismo lugar que órden; es decir, que es el tercero de tercer órden, el quinto de quinto órden, etc.; en las de lugar par, el total de números figurados es par tambien, y los dos números que ocupan el centro son iguales, y los mayores; siendo tambien iguales dos á dos los situados á uno y otro lado de aquéllos, que son siempre el tercero de cuarto órden, y el cuarto de tercer órden, etc. En resúmen, que obtendremos un máximo, si el número total de letras es *par*;

haciendo $n = \frac{m'}{2}$ (siendo m' el número total de letras de la inscripcion, que siempre es $m' = m + n$); y si es *impar* $n = \frac{m' - 1}{2}$; correspondiendo en estos dos casos para m los valores $m = \frac{m'}{2}$ y $m = \frac{m' + 1}{2}$, resultado que si se aplica á la inscripcion, nos dice que el número de lecturas hubiera sido un máximo haciendo $n = 8$ y $m = 9$; y por consiguiente, habiendo terminado la línea Sa en la letra C $(2, a)$, en lugar de terminar en la E $(1, a)$; teniendo una columna ménos (en la cuarta parte de la inscripcion) y una línea más. En este caso sería:

$$A' = 12.870 \quad \text{y} \quad A = 4 \,.\, A' = 51.480.$$

Para concluir podríamos formar una inscripcion cualquiera, aplicar todo lo anterior y comprobar los resultados que se obtuviesen. Por ejemplo, la inscripcion que podria formarse con el lema (uno de los que el ilustrado y veterano general de artilleria Sr. La Llave (*) propone para estampar en las espadas de los ingenieros militares)

In terram, *sub-terram*, *super-aquam*

contándola como compuesta de 27 letras, y para el caso del máximo, podria leerse de ¡41.601.200! modos distintos. Resultado que parece increible, no teniendo en cuenta la grandísima rapidez con que crecen los números figurados.

Hemos terminado ya; y antes de concluir, sólo nos queda manifestarnos de antemano conformes, con una idea que acudirá sin duda á la mente de más de uno de los lectores que se hayan tomado la molestia de serlo de estos renglones: ¡Qué lástima de tiempo perdido con un objeto tan fútil! dirá alguno de ellos. A éstos sólo les diremos dos cosas: primera, que no nos encontramos con fuerzas para resolver problemas que puedan servir de enseñanza á los lectores de este periódico; y segunda, que ya que la ocupacion no haya sido tan loable como hubiéramos deseado, podemos decir con Cervantes, en su *Ingenioso hidalgo*, que «en otras cosas peores se podria ocupar el hombre, y que menos provecho le trujesen.»

Madrid, 28 de Mayo de 1885.

(*) Véase el erudito y curiosísimo folleto titulado *Grabados y lemas de armas blancas*, por el Excmo. Sr. D. Pedro de la Llave, mariscal de campo de artillería.—Madrid, 1882.—1 cuaderno 4.°, 54 páginas.

FIN.