COMO SE CALCULA UN BOMBARDEO

Cálculo del número de bombas o de pasadas cuando se desea obtener más de un impacto.

Por el Comandante A. MONTEL

Hasta este momento solamente hemos tratado del procedimiento a seguir para calcular la probabilidad de un impacto útil; pero se comprende que en la realidad la mayoría de las veces nos serán necesarios más de uno, cuyo número será función del grado de destrucción o de neutralización que se desee conseguir.

El cálculo del número de bombas a lanzar no puede deducirse por aplicación de una simple regla de tres, ya que, como hemos dicho, las leyes de la probabilidad están influenciadas por el hecho de la *repetición del ensayo*. Para solucionar esta cuestión no nos queda otro camino que acudir, una vez más, a dichas leyes. La que nos interesa dice así: "*Cuando en* n *observaciones* (punterías o lanzamientos) *se pueden presentar dos sucesos* (que la bomba caiga dentro o fuera del blanco), *la probabilidad* P *de que se repita el primero* r *veces y el segundo* n — r *veces, en un orden cualquiera, viene expresada por la fórmula*

$$P = \frac{n!}{r!\,n-r!}\,p^r \cdot q^{n-r},$$

siendo p y q las *probabilidades simples de los dos sucesos*". Es de advertir que la probabilidad q es la contraria de la p; es decir, igual a $1 - p$.

Esta fórmula puede recibir la expresión siguiente, que se obtiene dividiendo el numerador y denominador de la anterior por $n - r\,!$:

$$P = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots (n-r+1)}{r!}\,p^r \cdot q^{n-r}.$$

(La fracción equivale al número de combinaciones que se pueden formar con n elementos tomados de r en r.)

Conocida esta fórmula, podemos hacer patente el enorme error matemático a que podría conducirnos la aplicación de una regla de tres al cálculo del número de bombas cuando se desee más de un impacto. Por ejemplo, supongamos que $p = 0{,}99$; según la regla de tres, nos harían falta para obtener cuatro impactos 4,04 bombas. Tomemos en número redondos cinco bombas y apliquemos la fórmula anterior:

$$P = \frac{5!}{4!}\,0{,}99^4 \cdot 0{,}01^1 = 0{,}43.$$

Como vemos, solamente tenemos una probabilidad del 43 por 100 de conseguir los *cuatro* impactos, no obstante emplear casi una bomba más de las que nos había dado el cálculo de la proporción. (Como luego explicaremos, esta probabilidad se hace algo mayor al aprovechar la contingencia de que se puedan producir cinco impactos.)

Observación.—Se comprende que cuando el número de bombas n sea superior al número de repeticiones r que se desee, puede ocurrir que esta reincidencia tenga lugar, en realidad, porque se produzca otra mayor; así, por ejemplo, si con cuatro bombas queremos obtener dos impactos, es indudable que se producirá este acontecimiento, a los fines del tiro, e incluso nos lo favorecerá, siempre que caigan tres o las cuatro bombas dentro del blanco. Para la aplicación de este nuevo concepto hemos de fijarnos en que los hechos de que caigan una o dos o tres, etc., son sucesos que se excluyen entre sí, y por tanto, para hallar la probabilidad de que ocurra uno cualquiera de ellos habrá que *sumar* los de orden superior hasta el total del número de bombas lanzadas. Si a r le damos todos los valores comprendidos entre 0 y n, la suma de todas las probabilidades resultantes deberá ser igual a la unidad, es decir, a la certeza matemática, ya que en realidad hemos hecho todas las combinaciones de sucesos posibles.

Pongamos un ejemplo para aclarar los anteriores conceptos. Supongamos que tenemos el 50 por 100 de probabilidades de alcanzar un blanco con un impacto. Si dispusiésemos de cuatro bombas, ¿qué probabilidad tendríamos en los distintos casos siguientes?

a) *De que no cayese ninguna en el blanco:*

$$P_0 = (1 - p)^4 = q^4 = 0{,}5^4 = 0{,}0625 = 6{,}25\ \%$$

b) *De obtener solamente un impacto:*

$$P_1 = \frac{4!}{1!\,3!}\,0{,}5^1 \,.\, 0{,}5^3 = 4 \,.\, 0{,}0625 = 0{,}25 = 25\ \%$$

c) *De obtener solamente dos impactos:*

$$P_2 = \frac{4!}{2!\,2!}\,0{,}5^2 \,.\, 0{,}5^2 = 6 \,.\, 0{,}0625 = 0{,}375 = 37{,}5\ \%$$

d) *De obtener solamente tres impactos:*

$$P_3 = \frac{4!}{3!\,1!}\,0{,}5^3 \,.\, 0{,}5^1 = 4 \,.\, 0{,}0625 = 0{,}25\ \%$$

e) *De obtener los cuatro impactos:*

$$P_4 = p^4 = 0{,}5^4 = 0{,}0625 = 6{,}25\ \%$$

Como hemos hecho todas las combinaciones posibles que pueden ocurrir, es indudable que si sumamos las probabilidades, tienen que darnos la certeza matemática, o sea 1. En efecto:

$$P_T = 6{,}25 + 25 + 37{,}5 + 25 + 6{,}25 = 1.$$

Probabilidad de conseguir r o más impactos.

Como ya dejamos dicho, siempre que necesitemos r impactos para batir un blanco, nos beneficiarán, a los fines del tiro, los sucesos de que nos caigan $r + y$, pudiendo tener y los valores 1, 2, 3, ... $n - r$.

En el ejemplo expuesto anteriormente, si suponíamos que era suficiente para batir el blanco que nos cayesen dos bombas, es indudable que aún nos serían más útiles los casos en que obtuviésemos tres o cuatro impactos—suponiendo, como antes, que cuatro son las bombas a utilizar—, pues se cumpliría con exceso la condición requerida. En resumen: en el bombardeo, lo que se hace en realidad es fijar una *condición mínima;* pero para expresarla propiamente se deberá formular así: ¿Qué probabilidad tendremos de alcanzar el blanco u objetivo X con r bombas o *más?* De este modo queda sentado que el número mínimo de bombas que tienen que batir el objetivo es r. Naturalmente, el límite superior vendrá indicado por el número de bombas que lancemos.

¿Cómo calcularemos esa probabilidad? Pues, sencillamente, sumando las sucesivas probabilidades desde $y = 0$ hasta $y = n - r$; es decir, desde r hasta $r = n$. En el problema en cuestión, si quisiéramos ver la probabilidad que tendríamos de que cayesen *dos bombas o más* en el blanco, sumaríamos las correspondientes a los casos c), d) y e). Así:

$$P_2^n = p_2 + p_3 + p_4 = 37{,}5\ \% + 25\ \% + 6{,}25\ \% = \\ = 68{,}75\ \%.$$

Solución gráfica (Abacos).

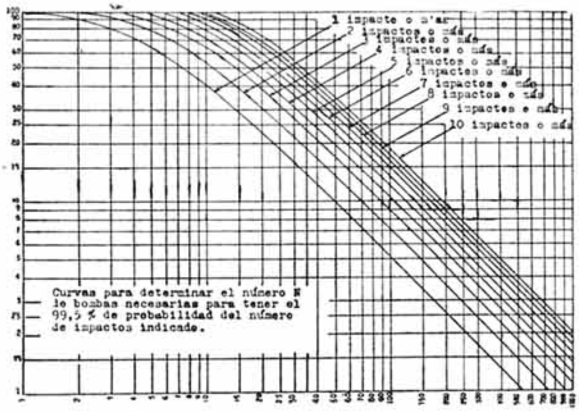
Calculados los sucesivos valores que tomaría P en función de una serie de ellos de p y n para cada valor de r, y una vez tabulados y referidos a dos ejes coordenados, y unidos los puntos correspondientes al mismo número de impactos o más por una línea, tendremos construídos los ábacos o gráficos de las citadas fórmulas. Tales son los 2, 3, 4, 5, 6, 7. Que están trazados sobre coordenadas logarítmicas para mayor claridad de la figura.

Manejo de los ábacos.—Su utilización es, como la de todos los gráficos, a doble entrada. Por uno de los ejes, "el de probabilidad de impacto útil", se entra con el argumento p (probabilidad simple que se tenga); por el otro eje, "número de bombas necesarias", con el número que se disponga. El punto de intersección nos dará, con su situación respecto a las curvas, el número de impactos que se pueden obtener con la probabilidad que con carácter general indica el ábaco.

Por ser cuatro las variables y fijar tres, este último número será el de los casos que se nos pueden presentar. De cada uno de ellos pasamos a exponer un ejemplo:

1.º Sabiendo que $p = 90$ por 100 y que se dispone de cinco bombas para sendos lanzamientos, calcular el número de impactos mínimo que conseguiríamos con una probabilidad $P = 99{,}5$ por 100.

En el ábaco número 7. Entrese con los argumentos $p = 90$ por 100 y $N = 5$, y el punto de encuentro nos indica que es de 2,9 impactos. Es

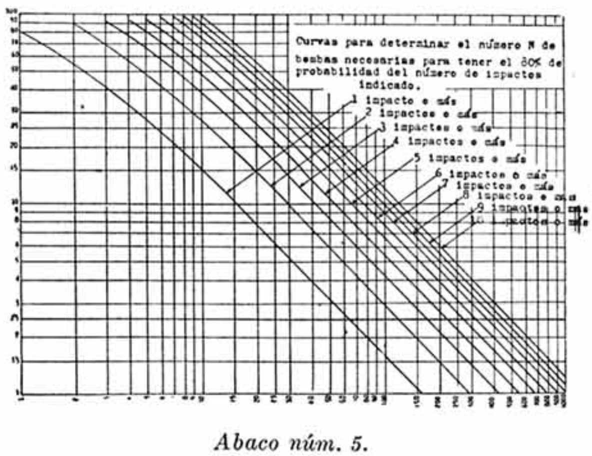


Abaco núm. 7.

decir, tendremos el 99,5 por 100 de probabilidad de batir el blanco con tres, cuatro o cinco impactos. Luego la solución son *tres impactos o más,* y el mínimo, tres.

2.º Se desean conseguir cuatro impactos o más con seis bombas y con una probabilidad para este suceso del 80 por 100. ¿Cuál debería ser la probabilidad de un impacto útil?

En el ábaco núm. 5. Entraremos con el argumento $N = 6$, y buscaremos el punto de encuentro con la curva de cuatro impactos o más; desde este punto, y siguiendo la perpendicular al eje de "probabilidad de impacto útil", en el

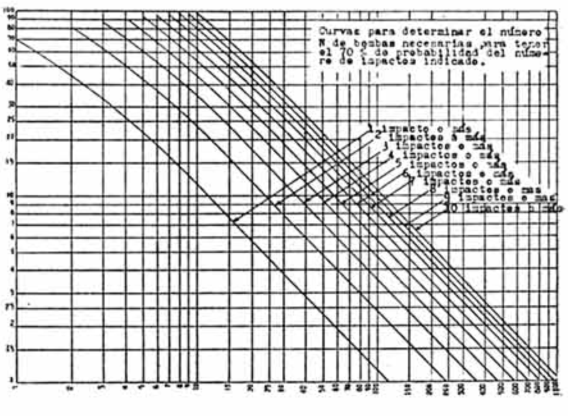


Abaco núm. 5.

punto de corte vendrá expresada. En este caso concreto sería $p = 71$ por 100.

3.º Sabiendo que $p = 80$ por 100 y que disponemos de seis bombas, ¿qué probabilidad tendremos de conseguir cinco impactos o más?

En este caso procedemos por tanteos entre todos los ábacos. Entramos en uno cualquiera, por ejemplo, en el 5, con el argumento $p = 80$ por 100; buscamos el punto de corte con la curva "cinco impactos o más", y vemos el valor que le corresponde a dicho punto en el eje "número de bombas necesarias". Si este valor es mayor, como nos ocurre con el ábaco 5, que nos da 6,5 bombas, nos indica que tendremos que buscar en otro ábaco de número más bajo, pues, como se puede observar, a medida que aumenta P las curvas se alejan del eje "probabilidad de impacto útil". Nos vamos, por tanto, al ábaco número 4, y en él vemos que con $p = 80$ por 100, a cinco impactos o más le corresponden seis bombas, y por haber hecho ya la coinciden-



Abaco núm. 4.

cia con los datos del problema, habremos encontrado P, que es la probabilidad del ábaco, o sea del 70 por 100.

Resumen de los casos concretos que se nos pueden presentar en el cálculo de bombardeo con un solo avión o con varios independientes entre sí; es decir, con un solo lanzamiento de una bomba en cada asalto.

Los podemos resumir en tres casos:

— Con una sola bomba, un impacto.
— Con varias bombas, un impacto.
— Con varias bombas, varios impactos.

Primer caso: *Con una sola bomba, un impacto.*

Lo primero que calcularemos serán las probabilidades en dirección y en alcance; después su producto nos indicará la probabilidad buscada. Así:

$$\left.\begin{array}{l} fp_x = \dfrac{L_x}{2 \cdot r_x}\text{; de aquí } p_x \\[2ex] fp_y = \dfrac{L_y}{2 \cdot r_y}\text{; de aquí } p'_y \end{array}\right\} \quad P = p_x \cdot p'_y$$

Las variantes que se nos pueden presentar serán:

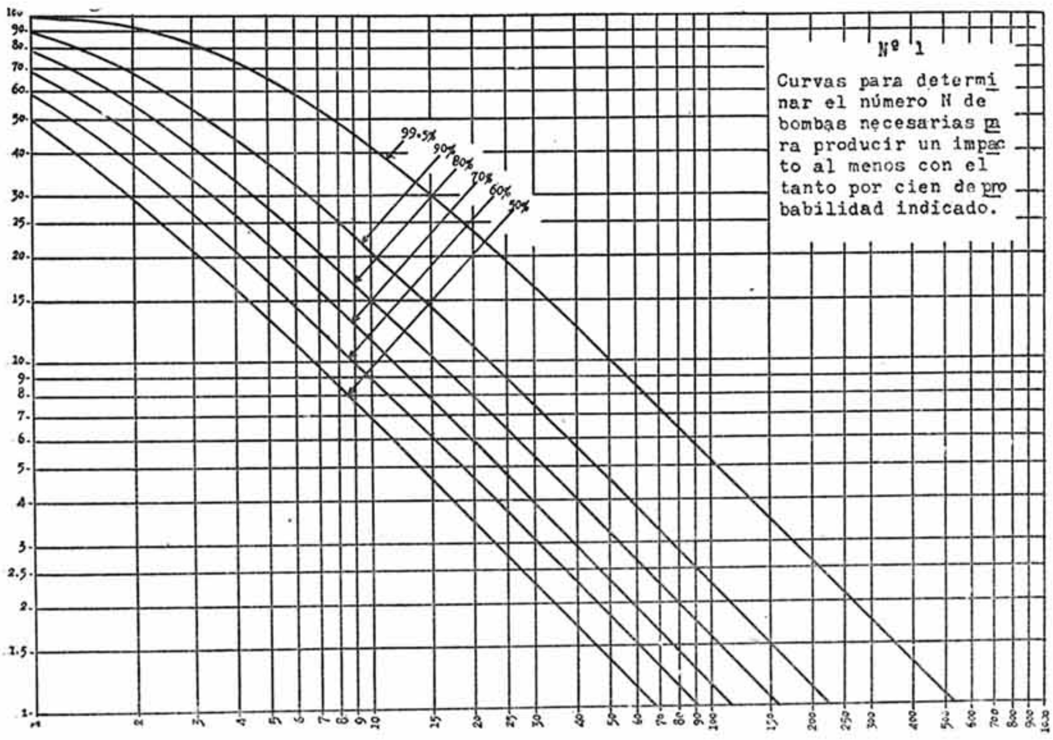
a) Calcular la probabilidad que tendremos de colocar un impacto conocidas las dimensiones del blanco y altura de bombardeo.

b) Calcular las dimensiones mínimas que podría tener el blanco para poder obtener un impacto con la probabilidad P desde una altura también dada.

c) Calcular la altura a que deberemos llevar a efecto el bombardeo para batir un blanco dado con una probabilidad también dada.

El primer caso ya sabemos cómo se resuelve. En el segundo caso nos será preciso primeramente fijar los valores de p_x y p_y que deseemos elegir, dado que podremos hacer infinitas combinaciones de pares de factores cuyo producto sea P. Fijados p y p' por la Tabla de Probabilidades (R. de A., núm. 64), determinaremos fp_x y fp_y, y como conocemos r_x y r_y, despejaremos los valores correspondientes de L_x y de L_y.

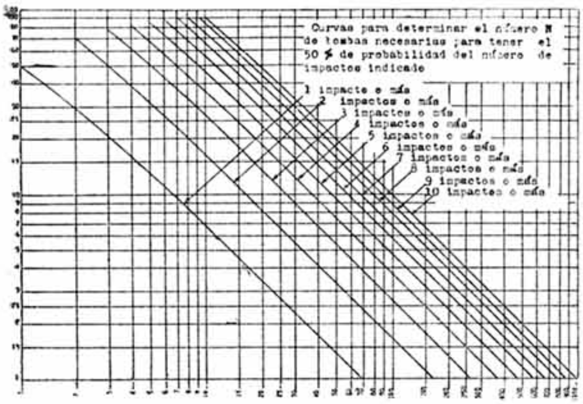
En el tercer caso procederemos igualmente a fijar p_x y p_y, y después despejaremos r_x y r_y. Pero teniendo en cuenta que los valores de r_x y de r_y deben corresponder a una misma altura, para cuya comprobación nos referiremos a la Tabla de Desvíos (R. de A., núm. 63), comprobaremos allí si los valores hallados son aceptables; de lo contrario, tendremos que proceder por tanteos hasta encontrar el par de ellos (de p_x y p_y) que satisfagan a dicha condición. Sin gran error, y siempre que las dimensiones del blanco sean aproximadamente iguales, podemos escoger dichos factores iguales, $p_x = p'_y$, y en las alturas halladas tomar la media. En efecto, supongamos que las dimensiones del blanco sean $L_x = 100$ m. y $L_y = 100$ m., y que deseamos tener una probabilidad del 51 por 100 de obtener un impacto. ¿Cuál sería la altura a que deberemos efectuar el bombardeo? Fijamos los valores de p_x y p'_y en la raíz cuadrada de P, es decir, en $p = 72$ por 100 y $p' = 72$ por 100;



Abaco núm. 1.

con estos datos calculamos las alturas en dirección y en alcance así:

$$r_x = \frac{100}{2 \cdot 1{,}61} = 31, \text{ que corresponde a } h_x = 2.900 \text{ metros,}$$



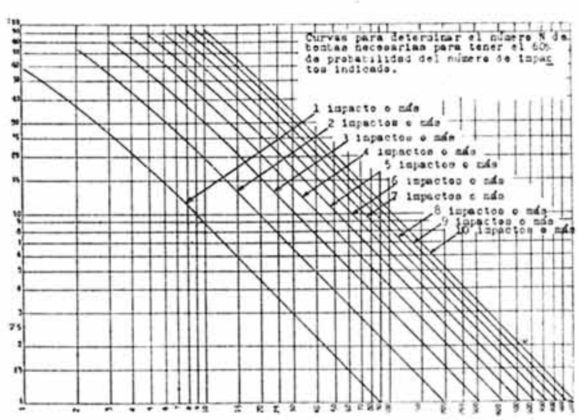
Abaco núm. 2.

$$r_y = \frac{100}{2 \cdot 1{,}61} = 31, \text{ que corresponde a } h_y = 4.000 \text{ metros,}$$

y la media entre estos valores es 3.500 metros. Esta es, por tanto, la solución.

Segundo caso: *Con varias bombas, un impacto.*

Como muchas veces nos resultaría para P un valor pequeño (no es admisible en la práctica menor del 82 por 100), es indudable que es necesario aumentarlo hasta una cifra tal que no haga inútil el desgaste y peligro a que se someta personal y material. Para esto, como ya sabemos, acudimos a la repetición del ensayo, cuyo cálculo nos lo facilita el ábaco núm. 1.

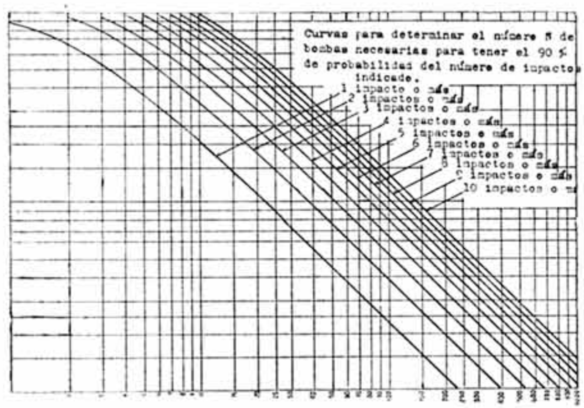


Abaco núm. 3.

Ejemplo: Se desea tener la certeza práctica de alcanzar con un impacto un blanco. Las dimensiones de éste son $L_y = 59$ m. y $L_x = 132$ m. Si la altura de bombardeo fuese la de 3.000 metros y consideramos para P el valor del 90 por 100, ¿cuántas bombas o pasadas serían necesarias?

$$\left.\begin{array}{l} f p_x = \dfrac{132}{2 \cdot 33} = \dfrac{132}{66} = \\ \quad = 2 \ldots\ldots p_x = 83\,\% \\ f p_y = \dfrac{59}{2 \cdot 24} = \dfrac{59}{43} = \\ \quad = 1{,}23 \ldots\ldots p_y = 60\,\% \end{array}\right\} P = p_x \cdot p_y = 49\,\%.$$

Con este valor vamos al ábaco núm. 1, y hallamos un valor para $N = 3{,}4$ bombas; es decir, que tendríamos que dar cuatro pasadas, lanzando una bomba en cada una. Este valor sería el mismo que nos arrojaría su cálculo analíticamente.



Abaco núm. 6.

Este caso admite el mismo número de variantes que el caso anterior.

Tercer caso: *Con varias bombas, conseguir* r *impactos o más.*

Es el estudiado en este artículo, y por tanto no necesita más aclaración que poner otro ejemplo para comparar los resultados obtenidos analíticamente y con los ábacos, que indudablemente han de ser iguales.

Ejemplo: Supongamos que con una sola bomba tenemos el 50 por 100 de probabilidades de alcanzar un blanco de dimensiones determinadas. ¿Qué probabilidades tendríamos de encajarle tres o más bombas con cinco lanzamientos?

Bombardeo por la 8.ª Fuerza Aérea americana de la fábrica de aviones Fieseler, donde se construían gran número de cazas "FW-190".

Con el ábaco: Procedemos a buscar el ábaco en el cual se verifica la concurrencia de los datos, y vemos que es en el ábaco núm. 2, lo que nos dice que tendremos la probabilidad del 50 por 100.

Analíticamente: Aplicaremos las fórmulas ya conocidas:

$$P_3 = \frac{n!}{r!\,n-r!} p^r q^{n-r} = \frac{5!}{3!\,2!} 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 =$$
$$= 10 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}25 = 0{,}3125 = 31{,}25\ \%$$

$$P_4 = \frac{5!}{4!\,1!} 0{,}5^4 \cdot 0{,}5 = 5 \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}5 =$$
$$= 0{,}15625 = 15{,}625\ \%$$

$$P_5 = 0{,}5^5 = 0{,}03125 = 3{,}12\ \%$$

$$P_T = 0{,}3625 + 0{,}15625 + 0{,}03625 = 0{,}50 = 50\ \%$$

Solución al problema núm. 2:

$$\left.\begin{array}{l} f p_x = \frac{70}{60} = 1{,}166 \ldots p_x = \\ = 56{,}840 \\ f p_y = \frac{40}{44} = 0{,}909 \ldots p_y = \\ = 46{,}025 \end{array}\right\} P = p_x \cdot p_y = 26{,}160\ \%$$

Entramos con el valor hallado y con el de ocho bombas en el ábaco núm. 1, el que nos da una probabilidad del 71 por 100.