NAVEGACIÓN, AEROPUERTOS Y SERVICIOS

Un nuevo gráfico de navegación

Por el General JOSE MARIA AYMAT

Al querer resolver el problema de la navegación esférica por medio de un gráfico, se tropieza con la dificultad de unir a la par una claridad continua de divisiones amplias en toda la extensión de las escalas, al menos entre los límites prácticos de las incógnitas que se buscan, y facilidades de trazado y manejo. En una palabra, que es difícil hermanar precisión, sencillez y comodidad.

Hemos expuesto en anteriores artículos de los números de febrero y abril de esta Revista, como modelos de trazado fácil, los gráficos derivados de la fórmula de Pesci (suma y resta de cosenos de los dos lados del triángulo esférico), y de regularidad de divisiones, los derivados de la rotación del triángulo.

Hay, sin embargo, un medio de regularizar divisiones que al representar directamente en su valor las funciones en juego pueden resultar excesivamente irregulares, y es la aplicación de la homografía, propiedad geométrica que mantiene en las figuras las alineaciones de puntos homólogos, y por tanto, la correspondencia de las intersecciones de rectas homólogas. Más fácilmente se entenderá esto asimilándolo a la perspectiva (caso particular de la proyectividad) que produce divisiones homográficas. Si en una escala aparecen divisiones fuertemente decrecientes, bastará contemplarla acercándose al extremo en que se aprieten, con lo que al par que se aumentan las próximas, compensa la lejanía de las otras por su mayor tamaño.

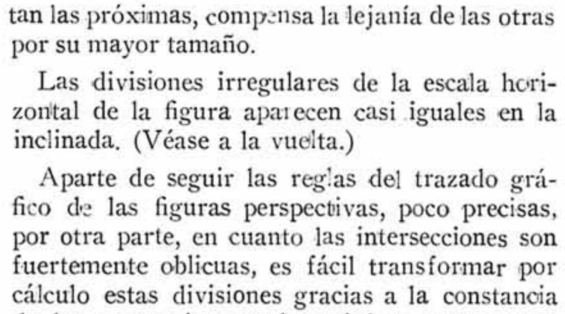
Las divisiones irregulares de la escala horizontal de la figura aparecen casi iguales en la inclinada. (Véase a la vuelta.)

Aparte de seguir las reglas del trazado gráfico de las figuras perspectivas, poco precisas, por otra parte, en cuanto las intersecciones son fuertemente oblicuas, es fácil transformar por cálculo estas divisiones gracias a la constancia de las proporciones anharmónicas entre cuatro puntos. En nuestra figura, entre los extremos fijos A y B, se da:

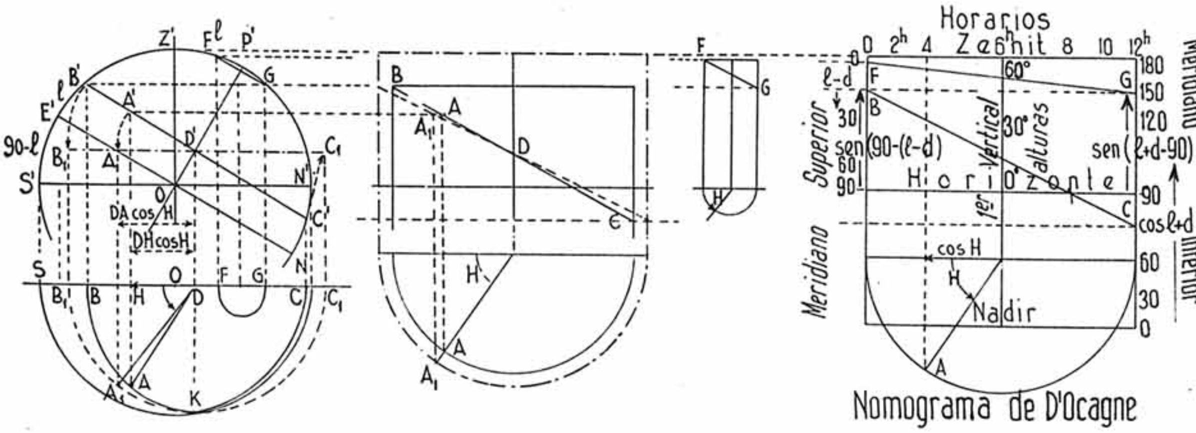
$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db},$$

que puede ponerse:

$$\frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} = \frac{ca}{cb} \cdot \frac{db}{da}.$$



Aspecto perspectivo de la transformación.



Doble proyección del triángulo de situación.

Aplicamos el principio en la transformación de la escala horizontal en otra cuyo punto central C venga en c, punto medio de $a\,b$, que suponemos de 10 cms. El punto d vendrá a una distancia $a\,d$, que se calcula aplicando los valores que conocemos en la igualdad anterior:

$$\left(\frac{3\times 8}{12\times 7} = \frac{2}{7}\right) = \frac{5\,.\,(10-x)}{5\,x}, \qquad x = \frac{70}{9} = 7{,}78,$$

que vemos difiere muy poco del punto 7 . 5, mitad de $c\,.\,b$.

En general, llamando L y l a las longitudes totales de las escalas, y M y m a las distancias a los orígenes, en correspondencia que exijamos, la distancia n de un punto que en la original dista N es:

$$n = \frac{N\,m\,(L-M)\,l}{N\,m\,(L-M) + (L-N)\,M\,(l-m)};$$

o poniendo en forma de primeras mayúsculas los valores constantes:

$$n = \frac{N\,A\,B}{N\,A + (L-N)\,C}.$$

Mientras formen una y otra serie de puntos sucesiones en el mismo orden, poco importa el sentido en que se tomen los segmentos, siempre que sea el mismo en cada pareja homóloga; pero cuando puede cambiar el orden, hay que considerar su sentido. Así el punto del infinito a la derecha de B vendrá sobre un punto e, de $a\,b$, importante punto de fuga de las imágenes de las paralelas a $A\,B$. Tomando como sentido positivo el de $A\,B$, $a\,b$, al considerar el punto del infinito, cuya relación de distancias a A y B es igual a la unidad, se tiene:

$$\frac{-\,c\,a\,(-\,e\,b)}{c\,b\,.\,(-\,e\,a)} = \frac{-\,C\,A}{C\,B},$$

que nos da:

$$a\,e = -\,e\,a = -\,\frac{C\,B\,c\,a\,e\,b}{C\,A\,c\,b} = \frac{C\,B\,a\,c\,.\,b\,e}{A\,C\,c\,b}.$$

Aplicando esta transformación al nomograma de D'Ocagne (*) para la resolución general del triángulo esférico, se logra la figura, en la que, no obstante la gran precisión y uniformidad con que aparecen las alturas hasta 80°, en las curvas de latitud y declinación bajas, se aprietan excesivamente las divisiones, por lo que, no obstante la absoluta generalidad del gráfico, decidimos estudiar la transformación del rectilíneo del mismo autor, que por su paralelismo de líneas y doble simetría presenta mayores perspectivas de utilización, a pesar de presentar unidas, por suma y resta de lados, dos de sus variables. Nos referimos al fundado en la fórmula de los cosenos

$$\cos a = {}^1/_2\left[\cos(b-c) + \cos(b+c) + \right.$$
$$\left. + \left(\cos(b-c) - \cos(b+c)\right)\cos A\right],$$

y que estudiamos ya en nuestro artículo de febrero de este año.

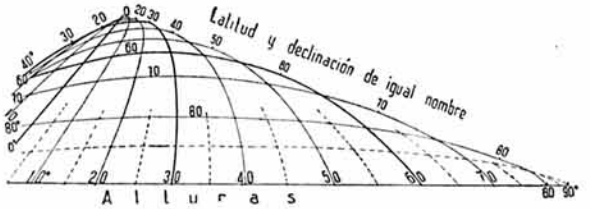
Pero como estimamos de gran conveniencia que los gráficos den, en su forma, una imagen geométrica de la disposición de los elementos que ponen en relación, vamos a exponer cómo vinimos a parar a él, por caminos independientes de la Nomografía, que por todas partes se va a Roma, descubriendo tal vez Mediterráneos.

(*) Maurice D'Ocagne, Ingeniero de Caminos, Profesor de la Escuela francesa de su especialidad y de la Politécnica, impulsor del progreso de la Nomografía, a la que dió ese nombre, y que ya en 1894 publicó en el *Bulletin d'Astronomie*, tomo XI, el *Abaque general de la Trigonométrie sphérique*, del que, en unión del rectilíneo, dimos cuenta en el número de febrero de esta Revista.

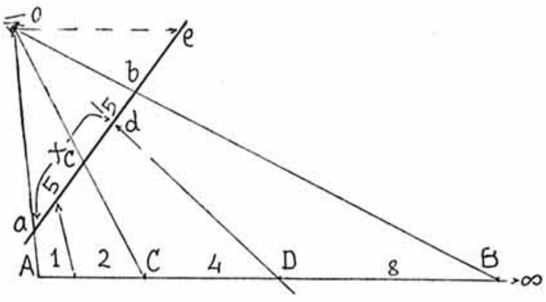
Acudimos al auxilio de la Geometría descriptiva para determinar, en la doble proyección de Monge, altura y azimut de un astro. Tomamos como planos de proyección uno horizontal y otro paralelo al meridiano: $n' s'$ será el horizonte, $O Z'$ la vertical, Z' el cenit, $O P$ el eje del mundo, $O' E'$ la proyección vertical del Ecuador, siendo los arcos $N' P'$, altura del Polo sobre el horizonte y $Z' E'$ distancia cenital del Ecuador, iguales a la latitud. $B' D' C'$ y $F G$, dos círculos de declinación, aparecen proyectados sobre el meridiano como rectas desde los pasos superiores B' (o F), con altura igual a $90 - l + d = 90^\circ - (l - d)$, e inferior C' (negativo), o G, con la de $l - (90 - d) = l + d - 90$. Dentro de esta oblicua la altura varía con el azimut desde la altura media entre las dos, proporcionalmente a las distancias $o A$, dependiente del horario.

Para fijar éste abatimos el círculo horario sobre el plano horizontal, transformando la elipse $B A K C$ en la circunferencia $E A_1 k C_1$, que lleva al astro A a A_1 sobre el horario $S D A_1$; $D B$ resulta proporcional al coseno del horario H, pero dada la proporcionalidad de ordenadas con la elipse, también lo serán las ordenadas $D H$. Luego la variación de altura que el movimiento diurno lleva sobre la oblicua $B' C'$ es proporcional al coseno del horario.

La altura misma en cualquier punto que la tomemos de la superficie esférica será el ángulo opuesto a la ordenada de A' sobre el horizonte $S' N'$ en triángulo rectángulo de hipotenusa,



Transformación homográfica del nomograma general de D'Ocagne.



Transformación homográfica de escalas.

constantemente igual al radio, que supondremos unidad, es decir, el ángulo cuyo seno sea $A' A'_2$. (A'_2 en el cruce de la vertical de A' con $S' N'$).

Si separamos a la derecha para cada círculo de declinación la construcción anterior, obtendremos figuras de alturas iguales, pero de extensión horizontal distinta, que nada nos impide unificar, haciéndola igual a la unidad vertical, y habremos obtenido el nomograma rectilíneo de D'Ocagne.

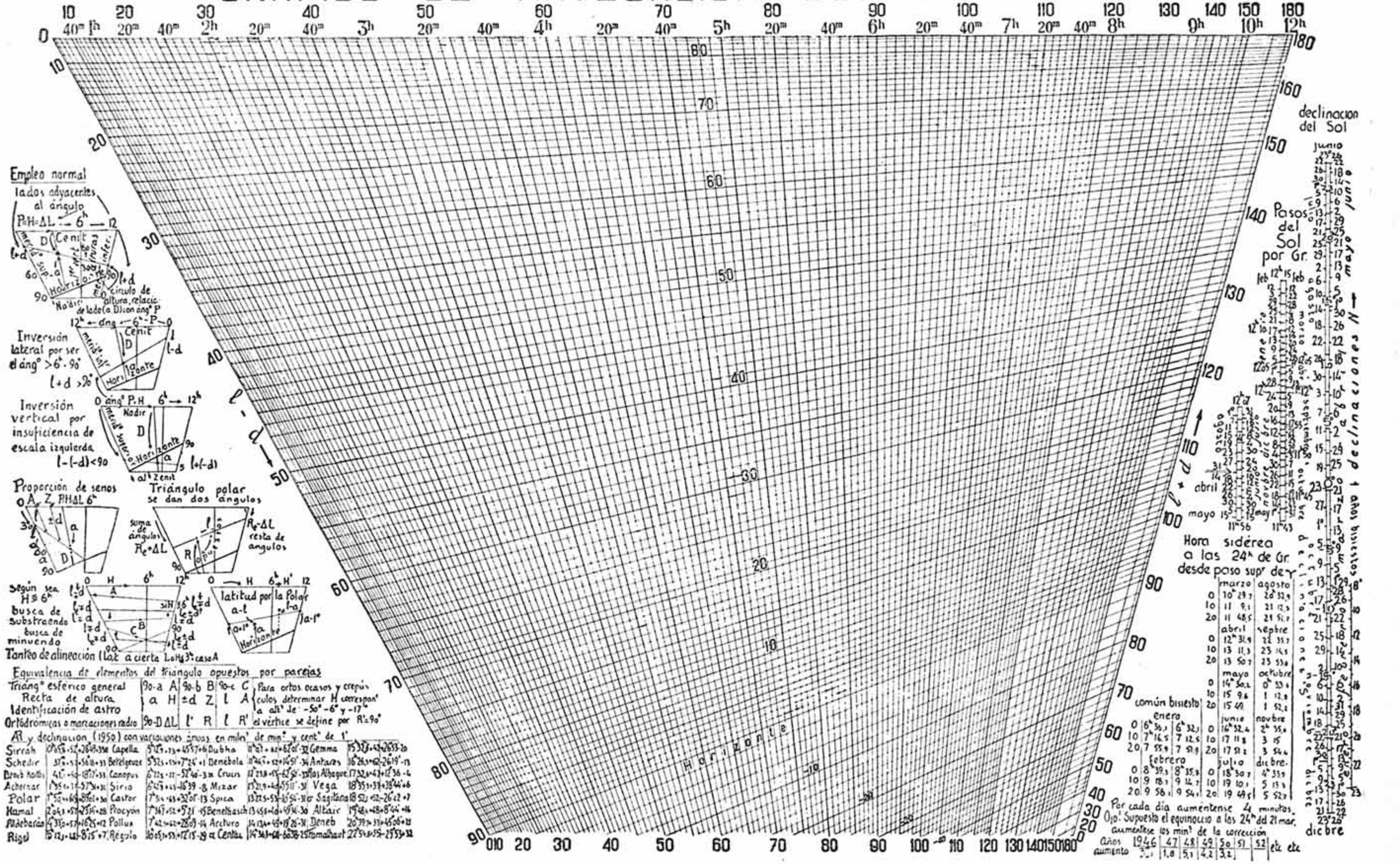
Veamos en él: en su eje horizontal, el horizonte; el cenit arriba, abajo el nadir, en la vertical izquierda el meridiano, superior por el costado del polo depreso, donde se producen las culminaciones con altura, cuyo seno representa la ordenada sobre el horizonte de valor $90 - (l - d)$; y que en graduación que parte del extremo superior lleva la cota $(l - d)$; en la vertical derecha el meridiano, inferior por el lado del polo elevado con los pasos inferiores a la altura $(l + d) - 90$, que puede indicarse por una graduación que nazca en el extremo inferior y se acote en la suma $l + d$; en las oblicuas (más o menos estiradas lateralmente, según la declinación) la declinación, en proyección de los círculos de declinación, la variación de la altura, tal como se proyectan ortogonalmente, sobre el meridiano, los horarios, es decir, según una escala de cosenos que empieza por $+1$ para $H = o$ en el origen izquierdo (el de las culminaciones con la diferencia $90 - (l - d)$, teniendo las $6^h = 90^\circ$ en su eje central y las 12^h en su extremo derecho.

Si para deducir el gráfico hubiéramos acudido a las leyes generales de la Nomografía, como expusimos en nuestro número de febrero (página 41), con toda sencillez; de la fórmula de los cosenos de Pesci

$$\text{sen } a = {}^1/_2 \cos (l - d) - \cos (l + d) + \\ + \cos (l - d) + \cos (l + d) \cos H,$$

separaríamos los términos en cos $(l \pm d)$ y nos conduciría a ecuaciones tan sencillas como son:

GRAFICO DE NAVEGACION D'OCAGNE — AYMAT



$x = -\cos H$ $y = \text{sen}\, a$, sistema ya eliminado y que representa la serie de paralelas a los ejes, características del nomograma.

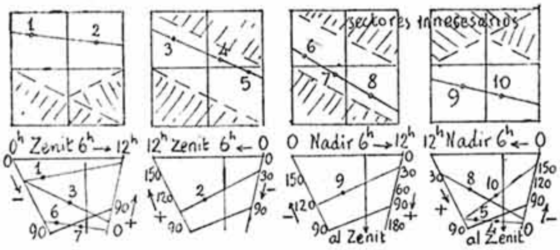
Pero habríamos perdido el recuerdo del significado geométrico de cada lugar y línea.

Claro es que, relacionado latitud, declinación y altura con el Horario, ángulo opuesto a la última, bastará, para obtener el azimut, operar de igual modo con sólo combinar, por suma y resta, latitud y altura, para que el ángulo que resulte, como opuesto a la declinación, sea el azimut.

Dos operaciones y dos rectas con cambio de elementos, a combinar para completar la doble determinación de altura y azimut, son un inconveniente del nomograma de D'Ocagne, relativamente a la simultaneidad de ambos elementos en la rotación de Alessio (*), pero veremos, más adelante, cómo lo obviamos.

Para no sólo regularizar las escalas que, dependientes de la función coseno de los ángulos que representan, se aprietan entre 0° y 30°, hasta comprender en 1/8 de la escala el tercio de sus valores, y aun la primera decena sólo quince milésimas, sino ampliar el conjunto aprovechando la doble simetría del gráfico original, con aumento del tamaño de uno de los cuadrantes, al que siempre se podrá llevar la lectura del resultado, hemos aplicado la transformación homográfica expuesta al comenzar este artículo. Como dentro de la disposición inicial la recta que relaciona lado y ángulo opuesto (altura y horario), se determina por suma y diferencia algebraicas de los elementos astronómicos, complemento de los otros dos lados y cualquiera que sea la combinación de igualdad u oposición de signos, una de ellas será siempre menor de 90°; eso nos permite, además, prescindir de la segunda mitad de una de las escalas, siempre que cuando llegue el caso supongamos invertido simétricamente el gráfico.

En efecto, la recta que une suma y diferencia de elementos sólo puede ocupar una de las cuatro posiciones que indica la figura, y el punto que conjugue tercer lado y ángulo opuesto, ocupar en ella una de las diez posiciones que se indican. Basta efectuar la medida en las escalas de los costados y sentidos que se indican debajo, para ver que siempre tendrá lugar en el costado izquierdo y dentro de los límites del no-



Posición directa. INVERSIONES. Lateral. Vertical. Doble.

Simetría de cuadrantes.

mograma, sin que, por otra parte, se perturbe la imagen espacial de su significado. Arriba, el cenit (o polo); horizontalmente, subiendo ligeramente a la derecha, el horizonte. La proyección general sobre el plano meridiano, con el semiplano del Polo elevado—zenit—al costado opuesto (casi siempre derecho) a aquel a partir del cual tomamos los ángulos, que es el mismo en que se tomó la diferencia algebraica de lados.

La regla de empleo será, pues:

Se determina cuando el ángulo es $\lesseqgtr$ 90°, y en el segundo caso corresponde inversión lateral del gráfico y tomar sobre el costado izquierdo, respectivamente, el valor de diferencia o suma algebraica.

Si el valor de la izquierda resulta $>$ 90°, se invierte verticalmente el gráfico, se toma el suplemento, y las alturas se leen hacia abajo del horizonte y declinaciones o latitudes de destino de hemisferio opuesto a la latitud por encima de ellas.

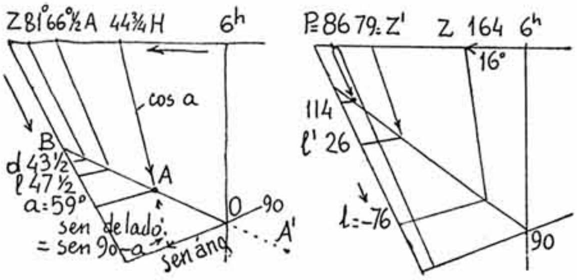
En la escala de la derecha se toma siempre el resultado de la otra operación, suma o diferencia, y en sentido contrario al que se tomó el de la izquierda.

El lugar en que aparece el punto pone a cubierto de toda equivocación.

Hemos de hacer notar, además, que el empleo en forma normal cubre todos los casos de astros realmente observados, y sólo requiere el cambio de costado al observar astros en la cuña esférica debajo del Polo, y limitado aún por abajo por el amilcantarad de 10° de altura, o sea, para nuestra latitud media de 40°, en 1/7 de los casos, que, habida cuenta la falta de astros brillantes en 28° alrededor del Polo Norte, se reducen a 1/11, y aun en latitud de 60° 1/5.

Consecuencia de todo ello es que la escala de alturas se ha podido tomar en sentido vertical, sólo entre 0 y 90°, regulada entre los límites prácticos de 10° y 80°, y de modo que la central, 45°, venga al punto medio entre 10° y 80°.

(*) Véase *Los gráficos por rotación del triángulo de situación,* en el número de abril de esta Revista.



Proporción de senos.

Esta es la causa de la convergencia de verticales hacia abajo.

El no considerar alturas mayores de 80° obedece a que no son de fácil explotación, por la gran curvatura del círculo de altura, de tan corto radio, que impide asimilar un arco, a poco largo que sea, a un segmento de recta, por lo que cuando no hubiera otro astro que observar es preferible prescindir de todo cálculo, colocando en la Carta el, próximo, polo de iluminación, por su latitud igual a la declinación, y longitud, respecto a la estimada, igual al horario, y trazar el arco con el compás o por dos o tres puntos con una tira de papel.

La escala angular de horarios, como ha de comprender los 180°, se toma a lo largo de la mayor dimensión del papel, y no se regula tan fuertemente, tanto por no exagerar la convergencia sobre la derecha, que produciría sobre la anterior intersecciones ya muy oblicuas, cuanto porque reduciría sobre horarios próximos a 6^h la escala de alturas. Ni hace falta tampoco, porque los ángulos, prácticamente, no requieren tanta precisión como las alturas, y porque se desarrolla en la mayor dimensión del gráfico, tanto que el cuadrante entero de 0 a 6^h sólo se reduce a los 9/10 de la escala de alturas. La regulación produce una convergencia al doble de su longitud, y lleva la graduación de $3^h = 45°$ del 1/15 al cuarto de la longitud total.

La ampliación de escalas, comparada con las del gráfico cuadrado original, son las siguientes:

La escala total de alturas es 5/3 mayor, sus mayores divisiones hacia los 45° son 4/3 de las de los 10° primeros, y, sobre todo, la decena, entre 70 y 80 sufre una dilatación de tres veces, igualándose casi en los 5/6, a la de 10° a 20°. Estas mismas relaciones, referidas a la escala de ángulos, son: total, 3/2, las mayores hacia las 4^h, 8/7 de la hora 6.ª, y las divisiones próximas a 1^h, 8/5 mayores.

En resumen, aparte de la mayor regularización, el área de nuestro cuadrante ampliado es más del doble que el del gráfico original. Grabado el gráfico en dimensiones de 36 por 50 centímetros, el promedio de los grados entre 10° y 80° viene representado por 3,6 mm., entre un máximo de 5 y un mínimo de 2,3.

Este gráfico, en la forma en que lo hemos deducido, extiende directamente su empleo a que se tengan como datos dos lados y se relacione el tercero con su ángulo opuesto, pero no cuando los tres datos y la incógnita formen dos parejas de elementos opuestos. La necesaria proporcionalidad de senos de lados y ángulos opuestos del triángulo esférico, que al venir a ser latitud, declinación y altura, complementos de los lados efectivos del triángulo formado por cenit, polo, astro, se transforma en proporcionalidad de cosenos de elementos lineales a senos de ángulos. Viene expresada gráficamente por el propio nomograma, ya que a partir del centro, cruce de graduaciones 90°, las rectas están separadas los valores (o sus transformados) de los senos sucesivos. Así, pues, en cuanto se disponga de dos valores opuestos, tales como horario y altura, definiremos por una recta de origen en el centro 90°, una recta que relacionará ángulos y lados. Ejemplo: Si con l 47° 1/2 y d 43° 1/2, hemos obtenido para el horario $H = 2^h\,57' = 44°\ 3/4$, $a = 59°$ para altura, tomaremos el punto A, determinado por el ángulo H, y altura de 59 a partir de abajo (pues los cosenos se toman desde los bordes) y la alineación $O\,B$ nos dará, correspondiendo a d y l, el azimut Z 81 y el ángulo paraláctico o de posición A_2 66° 1/2.

Para fijar bien la recta, cuando A quede próximo al origen O y los nuevos puntos aparezcan en su prolongación, se puede determinar en su prolongación el punto A' de graduaciones simétricas.

Es de advertir que a los ángulos mayores de 90° corresponden senos que retroceden en la escala, y que al leer los resultados pudiera resultar anfibológica la lectura del ángulo mayor o menor que 90°. Respecto a los cosenos, ellos no varían al cambiar el signo. El conocimiento de la forma real del triángulo, y el recuerdo de que a mayor ángulo se opone mayor lado, realmente menor elemento lineal del triángulo de situación, complemento que son de los auténticos lados, resuelve la duda.

Supongamos ahora una ortodrómica que con latitudes de salida y destino de 26° N. y — 76° S., con diferencia de longitud $P = 86^\circ$, nos ha dado una distancia de 114°, y queremos averiguar los rumbos inicial y de llegada. Tomaremos el ángulo $P = 86^\circ$ arriba, y la distancia 114°, que ya no es complemento de lado, sino lado mismo del triángulo de situación, a partir de la horizontal 90 (senos) hacia arriba, volviendo a bajar después de los 90° los 24 que faltan, obtenemos el punto A.

Las horizontales 26 y — 76 nos llevan a graduaciones que distan del eje vertical 79° y 26°. Se ve, desde luego, que al punto austral se llega con rumbo 79° a contar del N (polo elevado en nuestro origen), pero que los 26° no nos conducen hacia el Sur; por eso leemos el suplemento 164, verdadero rumbo inicial; también lo vemos por el orden de los lados el complemento de — 76 es mayor que 114 y el de 26 y menor; luego el orden creciente de los ángulos debe ser Z' P y Z.

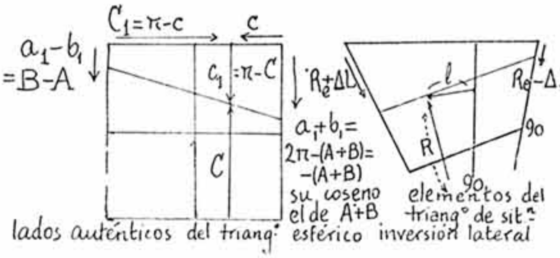
Es de notar que si la proporcionalidad de senos nos permite a veces determinar un cuarto elemento que complete doble pareja de datos, cuando se emplee después de haber conseguido ya una previa determinación, por suma y resta, de cuarto dato, el hallar el sexto elemento no debe hacerse por la proporcionalidad de senos más que cuando el elemento lineal y ángulo opuesto no esté próximo el primero y alejado el segundo de 90°, porque entonces la proximidad al centro deja muy indefinida la alineación y produce error considerable en los resultados alejados. Es preferible entonces volver al sistema de suma y resta con los elementos ya conocidos.

En cambio, sí es conveniente su empleo, como comprobación de los resultados obtenidos por el camino de suma y resta, estableciendo la alineación por el punto más alejado y comprobando los intermedios.

Podemos, además, considerar el caso en que entre los datos figuren dos ángulos, tal como cuando nos llegan noticias de que un radiofaro nos ha señalado en una cierta dirección de la que, por ser próxima al primer vertical, nos interesa conocer la intersección con nuestro meridiano de estima; los datos son ahora el lado colatitud de la emisora y los ángulos adyacentes, rumbo y diferencia de longitudes.

La consideración del triángulo polar nos lleva al conocido caso de un ángulo con los lados que le forman.

Llamemos a los datos A B c, y C al resultado; los elementos del polar serán



Triángulo polar.

$a_1 = \pi - A$, $b_1 = \pi - B$, $C_1 = \pi - c$ y $c_1 = \pi - C$,

con lo que dispondremos el esquema gráfico; en el primero aparecen los valores sub-uno del polar, sus valores equivalentes en función del lado y su nueva manera de contar cuando son suplementos, y en segundo lugar la disposición, habida cuenta que los ángulos reales del triángulo son los del de situación, pero que, en cambio, al lado c del triángulo corresponde, en el de situación, la colatitud $90^\circ - l$, que por ello obliga a contar la latitud hacia arriba y a partir el eje horizontal, opuesta al rumbo R o marcación que hubiéramos marcado.

Una vez determinados los tres ángulos, combinando la alineación $R \pm \Delta L$ con la marcación R_e, obtenemos la latitud buscada.

Ejemplo: Estando próximos a $l = 42^\circ$ N. y $L = 20^\circ$ W., la emisora de Finisterre, $l = 42^\circ$, 53 N., $L = 9^\circ\ 16'$ W., nos señala por un QDR que nos está marcando a su rumbo magnético 285°, que corresponde a R_e verdadero de 273° del N. por el E., o lo que es lo mismo, 87° al W. de su N., que es el ángulo del triángulo de nuestra situación, del que tenemos dos ángulos, ΔL y R_e, y el lado comprendido, colatitud de Finisterre. Como la marcación nos debe llegar casi del E., nos interesa conocer nuestra latitud, o al menos determinar aquella con que corta a nuestro meridiano de estima 20 W. opuesta que es al rumbo R_e, para cuya determinación directa nos falta o la distancia o nuestra marcación propia. Vamos, pues, a determinar este tercer ángulo, opuesto a la latitud de Finisterre. Hagamos la suma y resta de los ángulos $87 \pm 10^\circ{,}44$, $s = 97^\circ{,}44$, $d = 76^\circ{,}16$. Por resultar $s > 90$, suponemos invertido verticalmente el gráfico, y tomamos, de abajo hacia arriba, 97 3/4 y 76 1/4 para determinar la alineación. Tomando el punto A 42°, 9 a la izquierda del eje vertical, dista del borde alto 85° 1/2, que es, a partir del N. y hacia el E., el rumbo con que nos llegaría la marcación.

Teniendo los tres ángulos pudiéramos determinar la latitud que buscamos, como opuesta al ángulo 87°, por suma y resta de 85° 1/2 y 10°,44, en forma idéntica a la expuesta; pero como por un lado nos interesa conocer la distancia a Finisterre, y la alineación de los senos ha de venir bien determinada por el valor 85 1/2, opuesto al lado conocido, está indicado el método.

Así, pues, tomaremos el punto *B*, definido por 85 1/2 — 42°,53. Unido este punto con el centro 0, da para 87°, 42° 3/4, para latitud de corte al meridiano 20° W., y para 10°, 44, el punto *C*, que dista del horizonte el auténtico lado o distancia 7°,9 = 870 kms.

Los valores calculados al minuto resultan ser: 85° 31′, 42° 45′ y 7° 52′.

Por el punto 42°,45 N., 20° W., una marcación, 85° 1/2, es recta de nuestra posición.

Salvo el problema, en todo igual, de conocer la latitud a que corta a los diversos meridianos la ortodrómica determinada por su origen y rumbo inicial, no se presentarán casos de manejar como datos más de un ángulo; pero lo presentamos porque, aunque sea excepcionalmente, puede ocurrir y para mostrar las posibilidades de generalización del gráfico.

Consideradas las tres construcciones expuestas:

I. Recta determinada por suma y resta de dos lados, que relaciona el tercero con el ángulo opuesto.

II. Recta determinada por suma y resta de dos ángulos, que relaciona el tercero con el lado opuesto; disposición que llamaremos Polar.

III. Proporcionalidad de senos.

Las dos primeras conjugan los tres elementos de cada clase del triángulo, para determinar el de otro nombre opuesto a uno de ellos. Precisa, no obstante, que los dos elementos que no se oponen aparezcan como datos.

En la III, para definir la proporción, se requiere entre los datos una pareja de lado y ángulos opuestos; pero tampoco despeja más incógnita que el elemento opuesto, quedando sin posible determinación los elementos de la letra que no figura entre los datos.

Es decir, quedan sin resolver los casos típicos que representan las combinaciones de: dados *a b C*, hallar *A* o *B* (1), o su polar de *A B c*, hallar *a* o *b* (2), y hallar *c* o *C* dados *a b A* (3) o *a A B* (4), que pudiéramos llamar, para 1 y 2, hallar el cuarto elemento en la serie sucesiva de los del triángulo, y para 3 y 4, elementos de letra que no figura entre los datos.

El camino a seguir en los casos 1 y 2 es tomar la recta determinada por suma y resta de los lados (o ángulos) dados para hallar el tercero, entrando luego ya en el caso I o II.

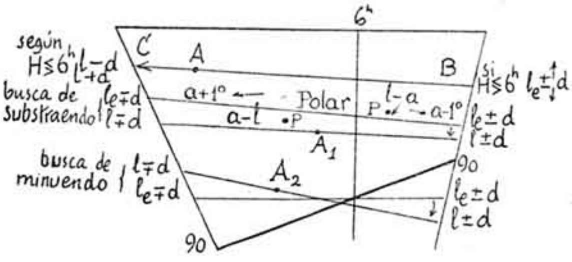
En los 3 y 4 se precisa un tanteo, conducido, por lo demás, muy rápidamente. Ahora, lado y ángulo opuesto nos fijan un punto en el reticulado del gráfico, y hay que determinar la posición de la alineación que pasando por él nos dé la suma y resta, de las que sólo conocemos uno de los términos. Si es ése el elemento que se busca, ya está resuelto el problema. Si es de la clase (lado o ángulo) del que sólo se tiene uno entre los datos, deducidos por el tanteo los tres de nombre opuesto, se deduce el buscado por la proporción de senos o por el método normal I-II.

Tanteo. — Cuando el ángulo es pequeño, el punto *A*, definido por lado y ángulo opuestos, queda muy próximo a una de las escalas de suma y diferencia, y como siempre se tiene una idea, aunque sólo sea groseramente aproximada, del valor que se busca, se combina por suma o resta con el tercer dato, y ésta fija el punto *B* de la escala alejada. La recta *B A* determina sobre la escala próxima la graduación *C*, que, sumada o restada al lado, da la primera aproximación del valor buscado. Si éste difiere poco del considerado en *B*, se acepta, y si no, se lleva a la escala alejada, para segunda y casi siempre satisfactoria aproximación.

Cuando el punto A_1 cae hacia el centro del gráfico, la posición de la recta debe ser tal que la suma, si es el valor conocido el más alto en valor absoluto, o la diferencia en caso contrario, dé las graduaciones *B* y *C*, leídas lateralmente, valga el doble del dato.

Si se busca el minuendo, supuesto un valor de estima (l_e), se coloca la recta por suma y diferencia, que luego se hace girar para que aumente o disminuya por ambas escalas, para que se conserve su diferencia = dos sustracciones, hasta que pase por el punto *A*, definido por *H a*. Si no se tuviera idea, y para mejor ver el sentido del giro, se coloca horizontal a una distancia, sobre el horizonte, correspondiente al sustraendo.

Si se busca el sustraendo, hay que subir o bajar la recta determinada, ganando en una graduación la misma amplitud que se pierde en la opuesta, conservando con ello el valor del minuendo.



Tanteo de alineación.

Con un sustraendo aproximado se determina la alineación por suma y diferencia; se ve a qué altura queda el punto A sobre la alineación, y ese número de grados se avanza sobre ambas graduaciones; si no coincidiere con el punto, se repite el afino.

Cuando la recta viene determinada por suma y resta de ángulos que se toman en el mismo sentido, el traslado se efectúa en la busca del sustraendo, y el giro, en la del minuendo. No hay, por otra parte, peligro de equivocación, ya que las lecturas comprueban los resultados de la maniobra.

En todo caso, la lectura de suma y resta en sus escalas nos da, por su semisuma y semidiferencia, el valor buscado, y como comprobación, el ya conocido.

A veces, cerca del centro se produce cierta indeterminación en el valor del elemento buscado; pero ello es consecuencia del problema mismo. Así, la latitud en que un astro ecuatorial pasa por el horizonte o cruza el primer vertical a 6^h de horario, puede ser cualquiera.

Un caso singular de este tanteo, pero de uso frecuentísimo, es el de determinar las latitudes con que corta a dos meridianos la recta de altura que nos produce la observación de la Polar en la dirección sensible de los paralelos, cualquiera que sea su horario.

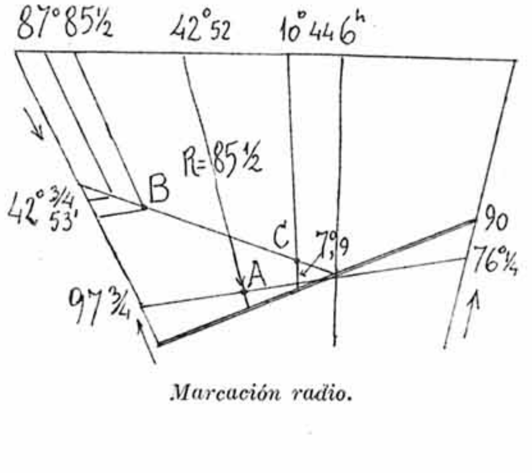
Téngase en cuenta que si en el transcurso del tiempo varía fuertemente (aunque con muy escasa trascendencia) su AR, por estar próximo a su mínimo, la distancia polar permanece casi invariable, por lo que podemos considerarla a nuestro objeto como igual a su valor actual de 1°, con error que apenas alcanzará unos pocos minutos en trescientos años. Suponer como latitud de estima la propia altura observada de la Polar, y determinar la suma y diferencia de latitud y declinación $89 \pm l_e = 89 \pm a$, para llevarlas a partir de los extremos de las escalas, equivale a tomar directamente, a partir del horizonte, las alturas $a + 1°$ y $a - 1°$; en los pasos meridianos, respectivamente, al N. y S., origen éste del horario, esta recta pasará sensiblemente por a en el horario 6^h-18^h, y en cualquier otro quedará muy próximo al punto que con altura a hayamos tomado a lo largo del horario del momento. El corrimiento casi paralelo de la recta en cuantía igual a la distancia del punto a la recta, nos indica la corrección a la latitud estimada como igual a la altura, para aumentarla cuando el punto haya quedado bajo, y al contrario si por encima de la recta.

Es interesante este caso; pero será normalmente el único de tanteo, bien sencillo, como se ve, pues determinada así la latitud, para nuestra situación sólo necesitaremos una recta de altura en sentido de los meridianos, cuya intersección con dos latitudes vendrá fijada por las longitudes sobre latitudes que comprendan nuestra estima, por observación de un astro que no se separe mucho del primer vertical. Esas longitudes $L = H_{Gr} - H_l$ son diferencias de horarios locales (que determinaremos por la altura corregida, sobre la recta, suma y resta de latitud y declinación) y el que el cronómetro nos da para Greenwich.

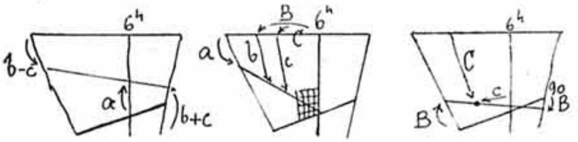
Y aún más: si se traza primero esta recta, se tiene ya en la longitud, con aproximación suficiente para que la Polar nos dé la latitud sobre ella, sin determinar dos puntos de su recta de altura.

Claro está que si se cuenta con Almanaque que contenga tablas de latitud por la Polar, no hay nada que hacer.

Si el gráfico resuelve todos los casos de triángulo oblicuángulo, claro es que resuelve los esféricos rectángulos con sólo considerar tercer dato el ángulo recto. Aceptando que los lados



Marcación radio.



Triángulo rectángulo.

sigan siendo complemento de sus nombres, el esquema general vendrá a simplificarse en esta forma.

Teniendo en cuenta que de 0 a 20° los senos son sensiblemente proporcionales a los arcos, puede extenderse el uso a triángulos rectángulos rectilíneos. Puede tomarse dentro de la zona como divisiones arbitrarias de la unidad, con lo que cabe hacer los productos de números por senos o cosenos.

Pensado el gráfico para determinar altura y azimut de estima, por medio de las alineaciones $l \pm d$, con H, y $l \pm a$ con d, cambiando la combinación a $a \pm d$, se obtiene con l el ángulo paraláctico o de posición del astro, A.

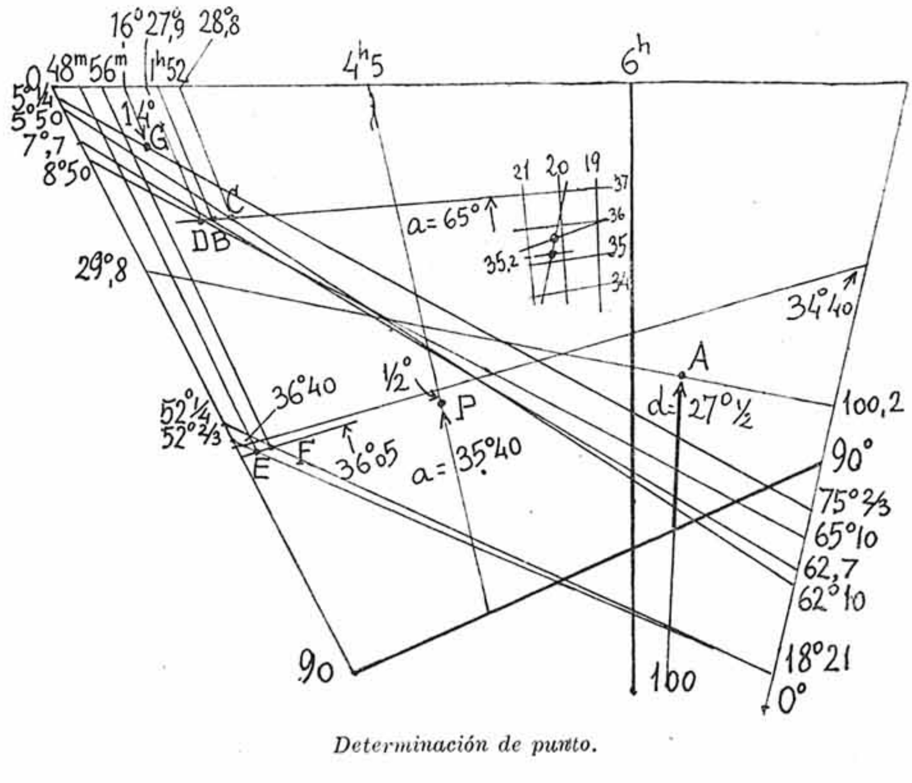
Este ángulo, sin interés *a posteriori* de la observación, en cambio entra en la consideración de las circunstancias favorables para hacer una observación determinando el horario en que se produce con valor (si llega a él) de 90°; para ello, por el punto $90° - l$ se tantea la alineación $a \pm d$, que nos da la altura de observación, y luego, con $l \pm d$ se determina el horario H correspondiente a la altura.

Son también circunstancias favorables las de corte del primer vertical o $Z = 90°$. También es este caso de tanteo. Por el punto 90 d se determina la alineación que dé $l \pm a$, y de igual modo, con la altura se halla el horario por $l \pm d$.

En la ortodrómica, la declinación viene sustituída por la latitud l' de destino; el horario, como ángulo que es en el Polo, por la diferencia de longitudes ΔL, y los azimutes y ángulo de posición, por rumbos inicial e inverso del de llegada.

El alcance a cierta distancia D en el plano vertical del rumbo inicial R, viene definido por una latitud l' de llegada sobre la alineación $l \pm (90° - D)$, que sirvió para determinar, con la D total, el rumbo inicial, pudiéndose hacer con varias distancias parciales, correspondientes a intervalos diversos de tiempo. La diferencia de longitud ganada sobre la alineación $l \pm l'$ por cada distancia.

La diferencia de longitud a que corta cierta distancia un paralelo de latitud l', se determina



Determinación de punto.

por la alineación $l \pm l'$ respecto a la distancia D opuesta a ΔL.

El corte de un meridiano ΔL requiere determinar el punto $\Delta L, D$, y por él tantear la alineación $l \pm l'$, que da la latitud l' del corte.

El vértice (latitud máxima) viene definido por la rectitud del ángulo de llegada $R' = 90^\circ$.

No se olvide que las distancias se leen en el gráfico desde el cenit y no desde el horizonte, como lados auténticos que son del triángulo esférico.

La determinación de hora es la del horario correspondiente a una altura sobre alineación $l \pm d$.

Cuando esa altura es la media verdadera de 50′ por debajo del horizonte, se tienen las horas de ortos y ocasos de cualquier astro. Hay que advertir que esa depresión ha de bajarse aún más por altura de vuelo, tantos minutos como la raíz cuadrada de los pies de altura: a 130 m. = 400 pies; 20′, A 3.300 m. = 10.000 pies: en total, 50 + 100 = 2° 1/2.

Para el comienzo o fin de los crepúsculos, los —6° ó —17°, aumentados discretamente en parte de la depresión del horizonte.

La amplitud ortiva no es más que la diferencia a 90° del azimut, determinado por la declinación sobre la alineación $l \pm a$, con el valor a negativo, correspondiente a depresión de horizonte por altitud y refracción.

Las marcaciones radios son sencillamente ortodrómicas, en las que en general se conocen antes los rumbos que la distancia, y habrá que hallar ésta antes, como escalón de más fácil determinación del elemento buscado. Ya lo hemos visto en su ejemplo.

Completamos el estudio con la exposición de un caso concreto y completo de Navegación.

El día 2 de enero de 1945, en situación próxima a 35° N., 20° W., con cielo encapotado, logran hacerse una serie de observaciones de la Polar de una estrella brillante a una cuarta al Sur del Este, cuyos promedios corresponden a 35°,40, y 65°, que se refieren a un momento medio que corresponde a las $0^h\ 25'$ de Greenwich.

Comenzamos por determinar nuestra hora sidérea. Es, en el momento, en Greenwich, según el *Almanaque Aeronáutico*, 19^h 10, a contar del meridiano inferior, o 7^h 10, desde el Mediodía. La de nuestro meridiano de estima,

$$T_{SL} = T_{SG} + L_E = 7^h\,10 - 1^h\,20 = 5^h\,50.$$

Ahora determinemos la latitud por la Polar. Su horario $H = H_s - AR = 5^h\,50 - 1^h\,45 = 4^h\,05$. Fijamos en el gráfico el punto P, determinado por su horario, 4^h 05, y altura, 35°,40. Como P resulta muy centrado en el gráfico, tomamos en los bordes las alturas meridianas de 36°,40, 34°,40 (uno más y menos que la supuesta latitud igual a la altura); P queda por debajo de la alineación medio grado. Luego la latitud será sólo de 35° 10′.

Como no logramos identificar la estrella observada, vamos a hacerlo. Determinamos la alineación $l - a$ o $l + a = 65^\circ - 35^\circ{,}2 = 29^\circ{,}8$, y $a + l = 65 + 35{,}2 = 100^\circ{,}2$, y tomamos el azimut, apreciado en 100°, a partir del N., ángulo interior del triángulo de posición (sin invertir lateralmente el gráfico, tanto por lo próximo a 90° como por la escasa precisión que necesitamos por lo erróneo de longitud de estima), y en el cruce A leemos la declinación aproximada $d = +27^\circ$ 1/2.

Para calcular la AR calcularemos el horario con la alineación $l \mp d$, 7°,7 y 62°,7. Veremos el corte con la altura 65°, y leeremos en B un horario de 1^h 52, que hemos observado oriental. La AR será, pues, $AR = H_s - H = 5^h\,50 - (-1^h\,52) = 7^h\,42$. Buscada la lista de estrellas más notables, nos coincide con ésa Pollux, cuya verdadera declinación, 28°,10, difiere en menos de un grado de la calculada, 27° 1/2. Además, comparado con el planisferio de identificación de estrellas, comprobamos que la algo más alta y débil debe de ser su gemela, Cástor.

Ahora, con las ya precisas, declinación = 28°,10 y $AR = 7^h\,42$, se determinan las alineaciones con dos latitudes 34 y 37°, que comprendan ampliamente la de estima; se determinan las alineaciones $l \mp d$, 5°,50 y 62°,10, para la primera, y 8°,50, 65°,10 (tres grados más), para la otra.

Se ve en qué horarios C y D se produce el corte por la altura observada de 65°. Son éstos:

$$H_{34} = 28^\circ{,}8 \qquad H_{37} = 27^\circ{,}9 \quad \text{orientales.}$$

Como el horario de Pollux en Greenwich resultó ser de

$$H_G = H_{SG} - AR = 7^h\,10 - 7^h\,42 = -32^m,$$

o sea 8° oriental, las dos longitudes de la recta de situación son

$$L_{34} = 28^\circ{,}8 - 8 = 20^\circ{,}8 \text{ y } L_{37} = 27^\circ{,}9 - 8 = 19^\circ{,}9\ W.$$

En una cuadrícula cualquiera (que puede ser parte central del propio gráfico) puede trazarse esa línea que corta a la latitud 35,2 a los $20^\circ \, ^1/_2$ de longitud W., y ésa era nuestra posición a las 0^h 25, a medio grado de la estimada.

Si por no verse la Polar hubiéramos observado en el Meridiano a Sirio ($d = 6^\circ,39$ Sur y AR 6^h 42), que se adivinaba poco al E. del Sur, con altura de $36^\circ,05$, la recta de altura se determinaría así:

Horario $= Ts - AR = 5^h\,50 - 6^h\,42 = -\,0^h\,52$ oriental.

Ensayaremos dos longitudes que comprendan la de estima un grado o cuatro minutos a cada lado, o sean 0^h 48 y 0^h 56, que corresponden a longitudes 19° y 21°, con ellas y la altura corregida de $36^\circ,03$, se colocan en el gráfico los puntos E y F, y como aparecen muy al borde izquierdo, sobre el derecho con la latitud de estima, se señala la suma algebraica $l + d = 35^\circ + (-16^\circ,39) = 18^\circ,21'$ que proyecta los puntos E y F en la $l - d$, en valor absoluto por el signo de d, $l + d$, en 52° 2/3 y 52° 1/4, a las que si se resta los $16^\circ,39$ de la declinación, dan las latitudes de 36° y 35° 1/2, que sobre los meridianos 19 y 21 nos dan la recta de altura que cortaría a la de Pollux en $35^\circ,40$ N. y $20^\circ,15$ W.

Ahora, para determinar la distancia a nuestro destino, Barajas ($40^\circ,28$ N., $3^\circ,34$ W. Gr.) y rumbo inicial a seguir con las latitudes de origen y destino, por suma y resta, 5° 1/4 y 75° 2/3, determinamos la alineación que con la diferencia de longitud = 16° 1/3, nos da un punto E que dista del borde superior (pues es lado efectivo del triángulo de situación) de 14° ó 1.550 kilómetros.

Con latitud y complemento de la distancia determinamos otra alineación, y ésta, a la altura de la latitud de Barajas, nos da en el rumbo inicial 64° de la ruta ortodrómica.

Finalmente vamos a presentar un cuadro comparativo de los principales gráficos que hemos ido estudiando, supuesto que se imprimen en un tamaño de 33 × 50 cms., que, con bordes, representan 43 × 60 de las proporciones de las hojas de papel.

	D'OCAGNE			E. B. Calloway	GIRO DEL TRIANGULO DE SITUACION	
	Esférico general	RECTILINEO		(Pilot Chart)	Circular de Alessio	Cilíndrico de Cassini
		Original	Modificado			
¿Reflejan la figura?	No.	Si.	Sí.	No.	Sí.	Sí.
Carácter de las líneas	Elipses.	Rectas.	Rectas.	Rectas.	Elipses.	Cs. trascends.
Determinan a y Z	En dos operaciones.			En dos.	Unica.	Unica.
Generalidad de empleo	Completo.	Con tanteo.		Difícil.	Difícil.	Simplificada.
Dimensiones en mm. de alturas de 10 a 80° en mm	127	127	330 a 270	127	270	270
Relación de mayor a menores	6	6	1,8	6	1,7	1,5
Mayores grados	3	3	5	3	6	4
Menor grado de a < 80.	0,6	0,6	2	0,6	3,3	3,5
Situación de la escala de altura	Extrema.	Central.	Central.	Central.	Interior.	Interior.
¿Permiten trazar las rectas de altura por dos puntos?	Con poca precisión.	Sí.	Preciso.	Poca precisión.	No.	Complicado.
Menor grado de horario para longitudes entre 2 y 10 horas	2,5	2,5	5	2,5	3,7	3,5
Situación de la escala	Extrema y lejana.	Central.	Central.	Extrema y separada.	Interior difícil.	Interior.

En prensa este artículo, averiguamos que el autor del gráfico de la Pilot Chart, reproducida en junio de este año, es Mr. E. B. Calloway, del Hydrographic Office, de Wáshington.

También que Alfonso el Sabio, en su V libro del Saber de Astrología, describe la "Azafeha" del moro español Azarquiel, Astrolabio que empleaba ya en el siglo XIII el giro del astro para que sirviera para cualquier latitud. Conste "ad majorem Hispaniae Gloriam".