NAVEGACIÓN ESFÉRICA

Gráficos por giro del triángulo de situación

Por el General JOSE MARIA AYMAT

En el número de febrero de este año, al dar cuenta a nuestros lectores del Gráfico de Navegación, aparecido en una Pilot Chart del Servicio Hidrográfico Norteamericano, nos ocupamos de las diversas maneras de enfocar el estudio de la representación gráfica de las relaciones existentes entre datos e incógnitas de los problemas de la Navegación, que, más que astronómica, debiéramos denominar esférica, ya que no sólo se refieren a observación celeste, sino, además, a la determinación, en la propia superficie terrestre, de nuestra situación por marcaciones radio, que vienen siguiendo arcos de círculo máximo, y que si provienen de distancias considerables, a poco alta que sea la latitud, tienen características de que no podemos prescindir, en línea ortodrómica, que, por más corta, necesitaremos seguir como ruta. La determinación de toda esta serie de problemas viene, a fin de cuentas, a constituir la resolución de un triángulo esférico oblicuángulo, o a considerar el mismo problema como un cambio de sistema de coordenadas esféricas pasando del eje del mundo a la vertical del lugar, mediante el giro de uno de ellos dentro del plano meridiano común a ambos ejes.

Si en una esfera en la que se hayan trazado meridianos y paralelos de la Tierra, situamos la vertical Z del observador, determinada por su longitud y por su latitud EZ, y el polo de iluminación del astro A, definido por su declinación BA y por un ángulo en el polo EPB o arco EB, igual al horario, el arco de círculo ZA medirá la distancia cenital del astro, y el ángulo EZA el azimut.

Para medir la distancia cenital ZA necesitamos llevarla sobre un meridiano o sobre el Ecuador. Si en la realidad de la esfera maciza, con un compás, tomamos la cuerda ZA, es sobre el Ecuador donde más cómodamente leeremos la medida angular del arco que comprende; pero si sobre una cubierta de celuloide hubiéramos marcado los puntos Z y A, lo mejor sería llevar Z sobre el polo P, para que el arco ZA se superpusiera en PA' a un meridiano y permitiera leer hasta el Ecuador el complemento $A'C$, que es la altura del astro. Por otra parte, al venir el cenit Z, vértice del azimut, a Z' sobre el Polo, este azimut vendría dado por el ángulo de los meridianos PZE y $PA'C$, y su medida se leería sobre el Ecuador en el arco EC.

Para medir las coordenadas CA' y EC, realmente no nos hace falta hacer el traslado de Z, sino situar respecto a un meridiano EP de origen el punto A, por sus horarios EB y declinación BA, y hacerle describir alrededor del centro O, polo del meridiano de origen, un arco AA' de amplitud igual al ZZ' o ZP, colatitud del lugar Z.

Para efectuar este giro hemos de medir el ángulo $y = EOA$ que el plano yAC forma con el Ecuador para aumentarle el $AOA' = ZP$ de la colatitud, obteniendo así el Y que nos da la dirección OA', sobre la que situaremos A' a una distancia $OA' = OA$.

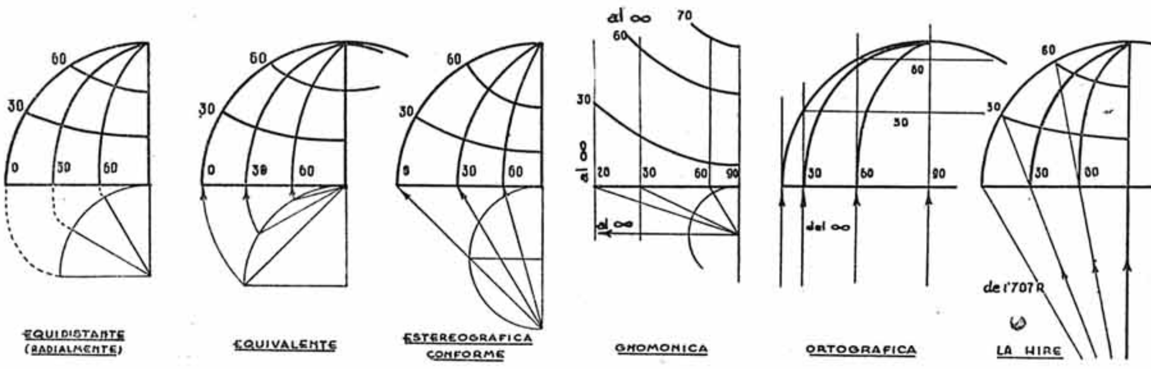
Estos ángulos y e Y realmente se miden sobre el meridiano $EY = Ey +$ (colatitud $yY = ZP$). Vemos además que los complementos $Py = 90 - y$ es la proyección de la distancia polar $PA = 90 - d$ sobre el meridiano. Es decir, que descomponemos el triángulo

de las cartas que se llaman azimutales de Lambert, en este caso azimutal ecuatorial.

Si las distancias se conservan a lo largo de los radios, da lugar a la que se llama equidistante, que si muy conveniente a nuestro fin, tiene el inconveniente de hacer difícil el trazado de la red de meridianos y paralelos.

Por el contrario, resultan ser arcos de circunferencia cuando se pretende que se conserven las formas, mejor dicho, los ángulos formados por elementos pequeños de las figuras. Es la proyección estereográfica la que goza, como la Mercator, de esa propiedad que califica de conforme la representación.

Si los radios de giro de los puntos, o paralelos del eje OO', se toman iguales a las cuerdas de los arcos, se produce al crecer el radio una disminución del tamaño de su graduación justamente en la cuantía que aumenta la dimensión



Proyecciones azimutales que permiten el giro del triángulo.

de situación AZP en dos rectángulos yPA e yZA, cuya diferencia de catetos $Py - Zy$ es, sobre el meridiano precisamente, la colatitud PZ. Claro que sobre una proyección todo esto es mucho más rápido que su explicación.

Porque este giro, de medida angular determinada, es operación fácil de hacer con una tira de papel apoyada en el centro si una escala circular indica su amplitud, surge la solución del problema haciéndolo sobre una representación plana de la red de meridianos y paralelos. El centro, ya lo vemos, es un punto del Ecuador, y basta la condición de que los radios estén separados justamente los ángulos que los círculos máximos formen en él y que la ley de distancias, cualquiera que sea, se conserve en todos los radios. Esa es, justamente, la definición

periférica y se produce el trazado azimutal, calificado de equivalente porque conserva las superficies. También es difícil trazar la red de meridianos y paralelos, pues como en la equidistante, resultan curvas trascendentes.

Este trazado es más sencillo en las verdaderas proyecciones escenográficas sobre el plano meridiano PZE, desde un punto de vista situado en el eje de simetría OO', y de las que la estereográfica, conforme antes considerada, es caso singular. Pero el punto de vista puede ocupar cualquier punto del eje. Fuera de este caso, meridianos y paralelos, son elipses.

Desde el centro de la esfera se produce sobre un plano tangente a la esfera la gnomónica en que todo arco de círculo máximo es representado por una recta. No sirve para nuestro objeto, pues el meridiano de nuestra situación se nos va al infinito.

El punto de vista de la estereográfica está sobre la esfera en el punto E.

Desde puntos más alejados van adquiriendo las proyecciones escenográficas propiedades diferentes. Desde 1,6180 radios $= \frac{1}{2} (\sqrt{5}+1)$, la condición de mínima deformación lineal alrededor de una escala media.

Si el punto de vista se aleja al infinito, la proyección se llama ortográfica y produce una gran reducción de escala superficial y longitudinal radial en la periferia, los paralelos se rectifican apretándose en el polo y los horarios pequeños se estrechan enormemente. Tampoco nos sirve esta proyección.

Buscando la circunstancia de que el radio venga dividido lo más uniforme posible, que vimos tan conveniente en la azimutal equidistante, se sitúa el punto de vista de modo que el meridiano u horario de 45° venga a cortar en el punto medio del radio representativo del Ecuador.

La distancia es entonces de $1{,}7071 = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}$

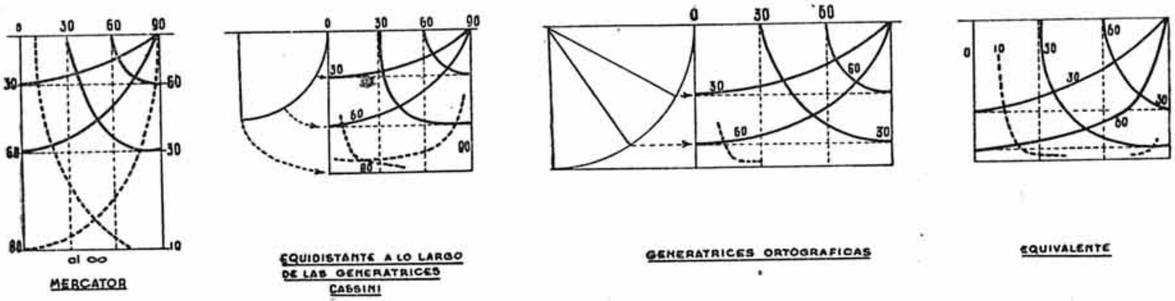
y produce la proyección de La Hire que ajustando las divisiones como muestra la figura, en la que sólo llega a percibirse una reducción periférica del tamaño en el último tercio del radio. Sólo hay deformación sensible en los ángulos cerca del Polo, donde el horario de 45° se arrima al de 90° unos 15° más de la cuenta. No obstante, como se ve, es muy armoniosa esta representación. Muy próximo a este punto de vista está el que tomó Alessio (1):

$$a \frac{2}{\pi - 2} = 1{,}752,$$

que viene determinado por la circunstancia de que el primer grado central venga a ser precisamente la 90 parte del radio. Con ello la división 45° sólo viene a separarse cuatro milésimas del centro del radio tomado como unidad.

Cualquier representación de este tipo resulta simétrica respecto a dos ejes: La línea de los Polos y el Ecuador, y por ello puede efectuarse la medida sobre un solo cuadrante, con tal que doblemos las graduaciones de los primeros, siempre que la graduación circular, que sobre el meridiano nos ha de medir el giro angular igual a la colatitud, retroceda sobre sí, para indicar el paso del astro al cuadrante vecino, estableciendo los oportunos convenios de correspondencia.

Con ello se logra, además, que dentro del tamaño, por fuerza limitado, de la hoja de papel donde venga trazado el gráfico, se aproveche toda su anchura para un radio dividido en 90° por partes casi iguales, con ventaja sobre otro tipo de gráficos que requieren en el mismo ancho la graduación completa angular de 0 a 180°.



Proyecciones cilíndricas que lo corren horizontalmente.

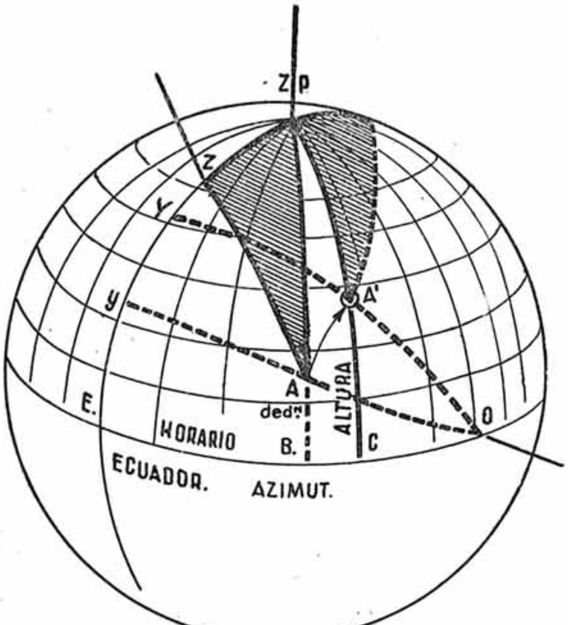
El modo de operar será, pues, el siguiente:

Sobre la representación del Ecuador OE, a partir de la periferia E, se toma el horario $H = EB$, y sobre su extremo B la declinación (que suponemos del mismo nombre que la latitud l) $d = BA$. Con una tira de papel alineamos el astro A con el centro, señalando sobre ella los tres puntos OAy y leyendo en la escala circular la graduación Ey del ángulo $y = EOy$. Sumamos a esta graduación la colatitud $90° - l$,

(1) Véase *Rivista Maritima*, suplemento al número de julio-agosto de 1908. "Nuova navigazione astronomica", por el entonces Teniente de Navío Alberto Alessio, luego profesor de Navegación en la Escuela de Liorna, muerto hace poco de Almirante.

Aunque el giro del triángulo de situación en proyección estereográfica aparece ya como idea de Keller en la "Astronomie practique", de Casperi (1888), su aplicación a la práctica de la náutica es de Alessio.

y anotamos la suma $EY = Y$. Volvemos a colocar la tira de papel sobre OY, radio de la suma hallada Y, y el punto A', giro del astro, nos permitirá leer sobre el cuadriculado la al-



Giro del triángulo de situación.

tura $a = A'C$ del astro y el azimut $Z = EC$, contado desde el polo opuesto a la latitud.

Suponiendo $H = 2^h$ y $d = 20°$ N., en y leeremos 23° (son 22° 50′). Si latitud es 50 N., la colatitud, 40. Sumado 40 a los 23° de y, obtenemos para Y 63°; corrida la tira, en A' leemos: $a = 52°$ (son 51° 40) y $Z = 49°$ (son 49° 20).

Si el horario hubiera sido mayor de 6^h, hubiéramos tenido que llevar el astro A_1 al cuadrante vecino, por lo que retrocederemos en la graduación del centro hacia la periferia; pero la lectura circular vendrá a ser mayor de 90°, bajando de nuevo desde el Polo.

Al sumarle la colatitud, esa graduación, naturalmente, crece aún más, y en ese sentido seguiremos, considerándola al colocar de nuevo la tira de papel. El azimut se contará como correspondiente al cuadrante de al lado, mayor de 90°. Con horario de 10^h y declinación 52, el astro vendría a A'; leeríamos en y: $y = 117°$; la suma, más 40°, da 157°; la nueva posición del astro vendría a A, y leeríamos: altura=20°, y $Z = 150°$.

Puede ocurrir que al sumar a y la colatitud resultaran para Y más de 180°. Ello sería muestra de que la rotación del triángulo llevaba el astro a A'_3, con altura negativa por debajo del horizonte, y azimut $> 90°$. Así, con $d = 20°$, $H = 10^h$, y da: $y = 157$; mas la colatitud 40,

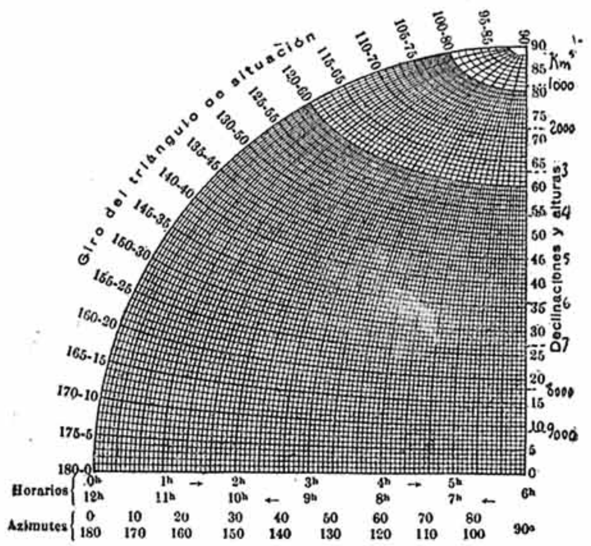


Gráfico altazimutal de Alessio.

$Y = 197$, por ser mayor de 180° nos indica que el astro, dentro del azimut de 151°, está 17° por debajo del horizonte, es decir, que si fuera el Sol, terminando el crepúsculo astronómico.

Si la declinación fuera de signo opuesto a la latitud, la situación del astro tomada por debajo del Ecuador vendría a la región A_2. Si el horario es menor de 6^h, al girar el triángulo el astro vendrá a la región AA' en una posición sobre el Ecuador igual a la colatitud $(90 - l)$ disminuída en y; es decir, $(90 - l) - y$; lo que equivale a tomar y de signo $\pm$, según sea ocasionado por declinación de igual u opuesto hemisferio que la latitud, dando así generalidad al procedimiento.

Claro que si con declinación opuesta a la latitud, el horario fuese superior a 6^h, el astro nunca puede hacerse visible, pero su situación se hace tan expresiva como antes. El giro llevaría al astro de la región A'_3 con valores de y entre -90 y -180, a los que, sumada una colatitud comprendida entre 0 y 90°, produce en la región, a la izquierda de A'_3, valores siempre negativos de Y, que al poder variar entre 0 y 180, admite el azimut de igual cuadrante que el del valor de Y.

Un astro de 20° de declinación austral con horario de 2^h en lugar de latitud 4° N., da lugar a situarlo en el punto A; pero al leer y le daremos signo negativo: $y = -23$. Al sumarle la colatitud 86°, nos dará: $Y = -23 + 86 = 63°$, y el astro, en su giro, nos llevará a A' con la misma altura del primer ejemplo: $A = 52°$ y azimut de 49°.

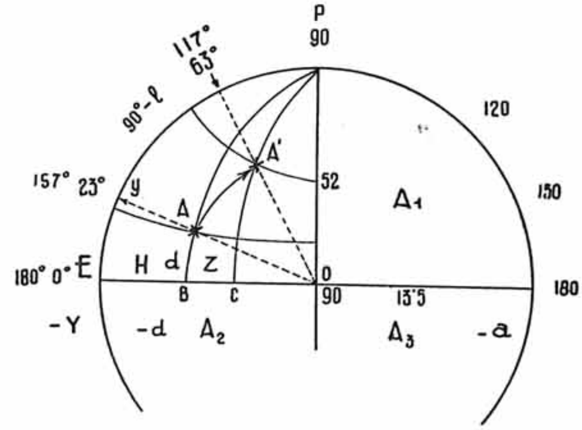
Si el horario hubiera sido de 10^h, la lectura de y para el mismo punto A hubiera tenido que ser: $y = -157°$, $Y = -157 + 83 = -74°$; y esto nos indicaría que el astro está unos 58° por debajo del horizonte y en azimut a 61° del Sur.

De aquí se deriva la Regla general de valores.

Tómese siempre el astro en su horario y declinación absoluta.

Para valor de y: $\pm$ según signo {igual / opuesto} de latitud y declinación; $\lesseqgtr$ 90°, según sea el horario $\lesseqgtr$ 6 h.

Al valor de y, con su signo, súmesele siempre el valor de la declinación para obtener el de Y, en cuyo radio se sitúa el astro.



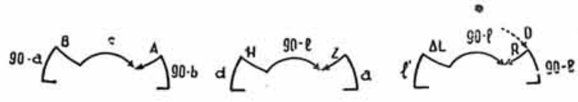
Simetría de los cuadrantes.

La altura será {sobre / bajo} {el horizonte, / según que Y} {entre 0 y 180°; / negativo o mayor de 180°,}

tomando en este caso el radio en la dirección del complemento a una vuelta, ó $360 - Y$.

El azimut estará más próximo al Polo {depreso / elevado} {según que Y} {entre 0 y $\pm$ 90°. / entre 90 y 270°.}

Nótese que el gráfico relaciona dos posiciones de puntos, definidos cada uno por un ángulo del triángulo de posición y un lado adyacente; elementos que en cada punto son los opuestos por el vértice de los del otro, y que la distancia angular (giro del triángulo), que los separa, es el tercer lado, que en relación con el ángulo definidor de cada posición le es el segundo adyacente. Por tanto, la maniobra expuesta resolverá directamente cualquier caso que se presente de tener un ángulo y los lados que le forman, con el cuidado de que el lado que conjuguemos con el ángulo para definir el primer punto sea el opuesto al ángulo que busquemos, pues el tercer lado aparecerá siempre como opuesto al ángulo dado.



Esquemas de empleo.

De otro modo: habida cuenta que el orden de los datos o resultados que definen los puntos señalados en el diagrama es indiferente, podemos enunciarlos así: a, B, c, A, b; es decir, cinco en sentido circular, en que aparecen los tres lados del triángulo, e indicarlos en esquemas tipo y de los diversos casos con los símbolos acostumbrados en el triángulo de situación, y que además pueden leerse en sentido contrario.

La colección completa sería: para observación de astros,

dPlZa, dAaZl, lPdAa, lZaAd, aZlPd, aAdPl,

en que A representa el ángulo paraláctico, que se forma en el astro, interior al triángulo cuando se toma como dato, exterior cuando sale como resultado. La primera da altura y azimut de estima; altura que la tercera comprueba, lo que es muy conveniente; la quinta identifica el astro. Las otras aseguran las circunstancias en que se produce un paraláctico dado, o nos lo averiguan.

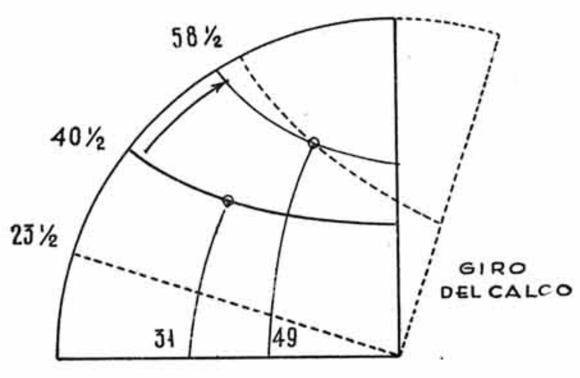
Para navegación ortodrómica son llamados l

y R a la latitud y Rumbo inicial, y l' R' a los de arribada:

$$l' \, (\Delta \, L) \, l \, R \, (90 - D), \qquad l \, R \, (90 - D) \, R' \, l',$$
$$(90 - D) \, R' \, l' \, (\Delta \, L) \, l.$$

La primera da la distancia y rumbo inicial a nuestro destino, y tomada inversamente, el punto a que se va a parar después de recorrida cierta distancia en el *mismo plano vertical* definido por el rumbo de partida. La segunda comprueba la latitud de llegada anterior y nos da el rumbo con que lo hacemos, y tomada en sentido opuesto invierten los términos de partida y llegada. La última invierte estos mismos conceptos, pero en la primiera.

Si en el supuesto de tener horario, latitud y declinación, si en vez del azimut (opuesto a declinación) buscamos el ángulo paraláctico, que se forma en el astro, combinamos horario y latitud para, girando un ángulo codeclinación, o distancia polar del del astro, obtener altura como antes, comprobándola, y ángulo en el otro. Insistimos en que el ángulo de salida venía dirigido hacia el polo opuesto al Cenit; es decir, es ángulo externo del triángulo de situación, y que deberemos tomar suplemento a 180° para que sea el interno. Cuando sea horario el que se deduzca debe tenerse más cuidado, pues siendo éste, ángulo que se cuenta de 0 a 12^h, en el sentido único del polo depreso, saldrá con su valor si partimos de azimut externo a partir de ese polo, o su complemento si en nuestro hemisferio se hubiese considerado a partir del N.



Caso de darse los tres lados.

Consecuencia de ello es que para identificar astro basta seguir exactamente y en sentido opuesto el camino que nos lleva a conocer altura y azimut de estima.

Para determinar distancia y rumbo inicial de ortodrómica sustituiremos declinación por latitud de arribada, y girado el triángulo, en vez de altura leeremos su complemento, contado desde el polo, como distancia, mayor que 90° cuando resultara Y' negativo o mayor de 180°. Al borde de la graduación lineal señalamos, a la altura de los múltiplos de 90°, los millares de kilómetros equivalentes, cuyo pico es fácil de considerar a razón de 111 por grado.

El rumbo inicial verdadero en hemisferio N. lo tomamos como suplemento de lo que leeríamos como azimut astronómico.

El diagrama de Alessio resuelve con más generalidad cualquier problema astronómico, pues da la solución aun en los casos en que los tres datos no sean el descrito $A \, b \, c$ de dos lados y el ángulo que forman.

Supongamos que además de un ángulo y un lado adyacente, llamémosles $A \, b$, que nos permita situar el punto inicial en el diagrama, el tercer dato sea el lado a, opuesto al ángulo dado, o el otro ángulo B, adyacente al lado dado. Es decir, los $A \, b \, a$ y $A \, b \, B$, que en esencia son el mismo: dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

En ambos casos la solución es idéntica. Determinado el punto definido por $A \, b$, se describe con su radio (o se gira la tira de papel) hasta que el punto corte a la curva de altura acotada según a, o a la de ángulo acotado en B. Leyendo en el borde circular la graduación Y de esa dirección, restada de la y de partida, nos dará la amplitud del giro efectuado por el triángulo, que es la longitud del tercer lado, o el complemento de su nombre si se trata del triángulo de situación.

Es de advertir que la anfibología que se produce en la resolución de estos casos viene aquí indicada por el doble significado de los puntos en que la curva expresiva del tercer dato es cortada, o por no serlo en el giro del punto previamente señalado, porque no alcance curvas de cota próximo al polo, o porque el giro se produce dentro sin alcanzar a la elipse representativa de un ángulo demasiado exterior.

Vemos, pues, que las fórmulas esquemáticas se pueden ampliar con las que resultan de cambiar el tercer dato por cualquiera de los dos siguientes.

Ejemplo: Estimando nuestra situación inmediata al meridiano 30 W. se reciben marcaciones 60° al E. del N., procedentes de un radiofaro que suponemos situado en Finisterre, 42° 50 N. — 9° 18 W. Queremos saber a qué latitud la marcación corta al meridiano.

Equivale el problema a averiguar con qué latitud un punto (astro o lugar de destino) definido por su ángulo en el Polo, ahora diferencia de longitudes, 20° 42′ y distancia al Ecuador, ahora latitud de 42° 50, nos dará el azimut astronómico de 180 — 60 = 120°.

Definida su situación, $P = 20° 42$, $l = 42° 50$, en el diagrama, la señalamos en la tira de papel, y leemos en el borde circular: $y = 45°$ (son 44° 46′). Giramos la tira hasta la línea de azimut 120°, y leemos en el borde: $Y = 81 — 99$ (son 98° 55′), de cuyo par de graduaciones tomamos la mayor, 99, por serlo el azimut. Restando 99 — 45, obtenemos la colatitud 54°, y por tanto, la latitud buscada, 36° (son realmente 35° 50′). Además de esto, como añadidura, habremos podido ver que el corte de la curva, $Z = 120°$, tenía lugar de altura 72 1/2, lo que equivale a la distancia cenital 17° 1/2, o distancia ortodrómica de $17.5 \times 60 = 1.050'$, ó 1.940 kms.

Queda el caso de que los tres datos sean lados. Faltos de ángulo, no podemos situar el punto definidor del astro o punto de destino; pero como tenemos trazadas las curvas representativas de dos de los lados, y el giro que hay que dar por el tercero, basta dibujar en un papel de calco el trozo conveniente de una de ellas, referida al centro y a una graduación del borde, para, girándola un ángulo igual a otro lado, ver en qué puntos corta a la curva acotada según el tercer lado.

Sirva de ejemplo el averiguar en qué longitud corta a cierto paralelo (el círculo polar ártico, $l' = 66° 33'$) la distancia de 3.500 kms. = 31° 5 a Cuatro Vientos, $l = 40° 22$ N., $L = 3° 47$ W. El ángulo en el Polo que se busca es adyacente a cualquiera de las dos latitudes; luego el giro habrá de hacerse de una amplitud de la colatitud de una de ellas, para ir a parar al tercer lado, que tiene una longitud de 31° 5. Calcaremos la curva de latitud inferior 40 1/2, menos expuesta a salirse del gráfico, señalando centro y extremo del radio horizontal. La haremos girar la colatitud 23° 1/2, y veremos dónde la curva calcada corta a la curva 58 1/2 ó 31° 1/2, a partir del Polo. Esto tiene lugar en un ángulo de 49°, que es el azimut con que llega al círculo polar la distancia. Llevado de nuevo el calco a su posición primitiva, vemos sobre el fondo que el ángulo en el Polo, o diferencia de longitudes correspondiente, es de 31°. Son, pues, éstas 35 W. y 27 E.

Los casos de tener como datos los tres ángulos (poco frecuente en verdad) y el de lado y ángulos adyacentes, se resuelven por el triángulo polar (ángulos y lados de igual nombre suplementarios entre sí), por los tres lados o dos que comprendan el ángulo dado.

Como se ve, todas estas últimas operaciones, si bien completan la colección de problemas posibles de resolver, es a costa de una complicación que, sobre trabajosa y expuesta a confusión, hace perder precisión.

Sin embargo, bien se ve que los problemas corrientes: identificación de astro, altura y azimut de estima y distancia y rumbo inicial de ortodrómica, se resuelven con toda felicidad y sobre proyección que conserva muy bien la figura y extensión de las graduaciones.

Queda por considerar otro modo de trazar la recta de altura por dos latitudes, en meridianos que comprendan la zona de estima, cuando el astro está próximo al meridiano, o por dos longitudes sobre dos paralelos, en otro caso. Ello facilita el trazado sin necesidad de considerar el azimut ni requerir el empleo de transportador, pues se opera con la altura realmente observada.

Cuando se pretende hallar latitudes (caso de astros circunmeridianos), el problema es fijar el astro por su declinación y los horarios de las dos longitudes y medir el giro de cada punto hasta cortar la curva de la altura observada. Es la operación análoga a la que hemos hecho para determinar la latitud en que nos llegaba la radio-marcación de Finisterre.

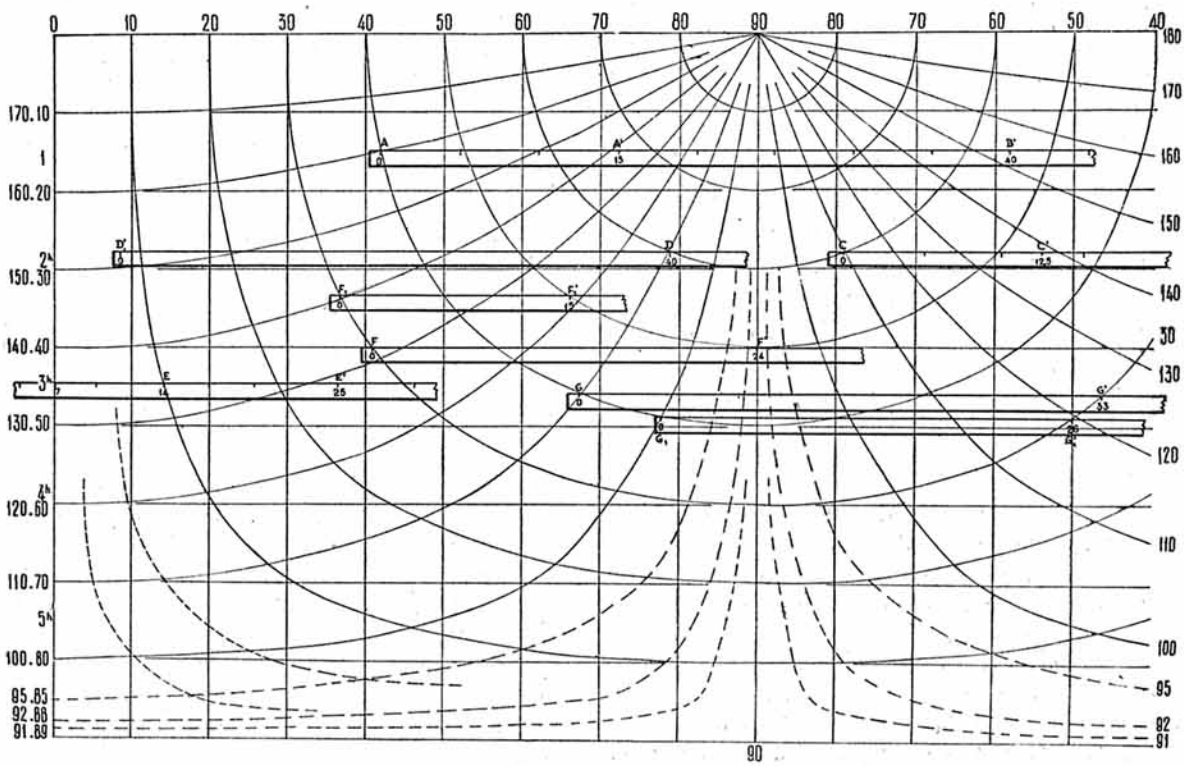
En cambio, el caso, mucho más frecuente, de astros atravesados al meridiano, la determinación del ángulo horario que nos ha de dar las longitudes se apoya en el conocimiento de los tres lados: declinación, altura y latitud, y tiene toda la complicación que vimos, y que trataremos de resolver por otro camino.

La operación de hacer girar una tira de papel asegurando los extremos del radio que determina para señalar en su giro el astro o punto de destino, no carece de inconvenientes, por lo molesto para quienes no estén acostumbrados a este singular manejo de un gráfico; pero ello se remedia transformando el movimiento circular en un desplazamiento rectilíneo de una misma dirección en cualquier caso. Si consideramos nuestro gráfico dibujado en un abanico abierto, bastaría quitarle el clavito para poner paralelas las varillas, logrando que las circunferencias que describen los puntos se transformaran en rectas paralelas al borde, y sobre las que los desplazamientos serían siempre proporcionales a las amplitudes angulares de nuestros anteriores giros.

Vimos que la observación de este giro la hacíamos desde el eje que, en el plano del Ecuador, era normal al meridiano del lugar. Nada impide que en vez de proyectarlo sobre este plano meridiano, o uno paralelo, lo hagamos sobre un cilindro, o aun un cono, cuyo eje fuese el que situamos en el Ecuador. En el primer caso los radios de nuestras proyecciones azimutales se transforman en rectas paralelas, como son los meridianos de la tan conocida proyección Mercator, cuyos paralelos representarán los arcos de círculo a lo largo de los que se mueve el astro en su giro. Pero la ley de distribución de los paralelos puede ser cualquiera, y surge así el empleo de las diversas proyecciones cilíndricas. Las dibujamos en cabeza, con las planas, para facilitar su comparación. Respecto a las cónicas, que también admiten cualquier ley para los radios, equivaldría en el abanico de nuestro símil a soltar el clavillo sin acabar de desplegar. No resuelven ningún problema, ya que subsistiría el giro circular y se perdería la facilidad del trazado.

Es de advertir que planos horarios y círculos de declinación (o meridianos y paralelos) son en las proyecciones cilíndricas curvas trascendentes que exigen un difícil trazado por puntos y que en cambio, y por ello precisamente, se pueden adaptar a cualquier distribución de paralelos cilíndricos, y aun de los meridianos, si la traslación que representa el giro se hace por suma de cotas leídas en el cuadriculado; pero es mejor conservar la uniformidad en la distribución de los meridianos cilíndricos.

Si pensando en lo conocido de la proyección Mercator se emplea, como hace Veater, para este fin, se encuentra el inconveniente de que la es-



Proyección cilíndrica Cassini de la rotación del triángulo de situación.

fera no tiene completa representación, pues las inmediaciones del eje del giro del triángulo se van al infinito; por eso es preferible la equidistante (a lo largo de los meridianos), llamada de Cassini. Tal vez conviniera para aprovechar los formatos alargados del papel, alargar una de las dimensiones para beneficiarse de un aumento de escala. Incluso distribuir los paralelos en ligera progresión aritmética que ampliara algo las dimensiones de la zona polar.

El trazado de las curvas de declinación y altura, en cualquier sistema de cuadriculado, es siempre

$$\cos y = \sec x \operatorname{sen} d,$$

y el de los círculos horarios

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{sen} x' \operatorname{tg} H.$$

Como un cuadriculado uniforme que haría constantes los valores de x e y, facilita el trazado, juzgamos más conveniente aceptar pura la proyección de Cassini y aprovechar la mayor extensión de un sentido del papel para dibujar parte del cuadrante vecino, de tal modo, que al exceder la extensión de x en más de radio y medio, hay siempre posibilidad de que el traslado del punto se haga directamente sin cambio de cuadrante.

Dibujado el gráfico en tamaño 45 por 70 centímetros, correspondería a cada grado precisamente medio centímetro, con lo que el traslado del punto se haría con la simple aplicación de una regla graduada.

Si la escala no fuera ésa o no se contara con regla milimetrada suficientemente larga (45 centímetros), el canto de una tira de papel permitiría tomar la colatitud en la escala superior del gráfico.

Además, un conjunto de horizontales relativamente próximas asegura la dirección precisa de la traslación.

Veamos cómo:

Caso A.

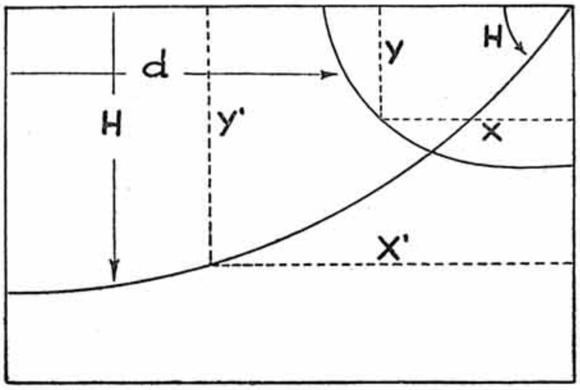
$l = 60$ N. $\quad H = 1^h\ 20^m \quad d = +40°$.

Oriéntándolo horizontalmente se lleva el O del doble decímetro al punto A. H 1^h 20, d 20; se señala el punto A' correspondiente a 15 centímetros de regla graduada (15 = 1/2 (colatitud = 30) y se lee altura 66° 1/2 y azimut 41°.

Caso B.

Con igual H y d. $l =$ sólo 10°.

El punto B' viene a 40 centímetros de A, y en el sector derecho leemos: $A = 55°$, Z 153.



Cálculo de las curvas.

Caso C.

$l = 65°$. $\quad H = 7^h\ 20^m \quad d = 60$.

El punto C viene en el cuadrante derecho y alcanza a los 12,5 = 1/2 (25° de colatitud) en C' $a = 45°$ 1/4, $Z = 138$.

Caso D.

Si el mismo astro C, $H = 7^h\ 20'$ y $d = 60$, se observó en $l = 20°$, los 35 centímetros a la derecha de C se salen del dibujo, invertimos el trazado a la izquierda, ponemos 40 centímetros en D, el O de la regla viene a D', donde leemos $a = 7°$ 3/4 y $Z = 152°$, suplemento de 28°.

Este salto a la posición simétrica se hace siempre que en latitudes menores de 40° el corrimiento del astro se salga de la extensión del gráfico. Corresponde a una extensión de 1/8 de bóveda celeste entre azimutes de 40° del N. y altura en este meridiano de 40°, zona además poco estrellada.

Caso E.

Astros de declinación opuesta a la latitud.

La representación del astro corresponde a zona no trazada a la izquierda del gráfico, y se lleva a esa región el O de la regla, $l = 40°$ N., $d = -20$, $H = 3^h$. Señalaríamos el punto E, mediríamos los 700 mm. que lo separan del borde izquierdo, correríamos la regla a la izquierda esos 70 mm. (o pondríamos 140 bajo el punto), y en la graduación $25 = 1/2\ 50°$, leeríamos el punto E'. $a = 25°$ y $Z = 51°$.

Esta disposición permite, además, más fácilmente, trazar la recta de altura por dos puntos.

Supongamos en $l = 30$ N., observado hacia el NE., un astro de $d = 40$ una altura de 30°, calculado el horario correspondiente a la longitud estimada, nos resulta de unas 5^h. Para determinar dos latitudes de nuestra recta de altura, tomamos sobre el círculo de declinación 40, los puntos G y G_1, de H 4^h 40′ y 5^h 20′ que comprenden (ampliamente para seguir el dibujo) al de estima, seguimos las horizontales hasta que corten en G' G_1', a la curva de altura 30°, realmente observada. Medimos con la regla las distancias GG', G_1G_1', que nos dan las dos colatitudes correspondientes, 33 y 26 cms., ó 66° y 52°, y las latitudes 24° y 38°.

Un astro circunmeridiano da lugar a esta maniobra. Supuesta una latitud de 60°, declinación de 30° y altura de 50°. Hay que ver a qué altura del gráfico las curvas 30 y 50 distan 15 centímetros $= 1/2$ (colatitud $= 30$). Colocamos la regla tangente en F' a la curva 50 y apoyando el O en F sobre la 30. Vemos que hay unos 24 centímetros, la corremos hacia arriba, apoyado siempre el O en la 30 hasta F_1 F_1', en que F_1 $F'_1 = 15$ cms., nos da el horario 39° 3/4, ó 2^h 39, que sirve para deducir la longitud correspondiente a los tres lados a d y l. Con la segunda latitud que se tiene señalada, simultáneamente se determina el segundo horario y longitud correspondiente.

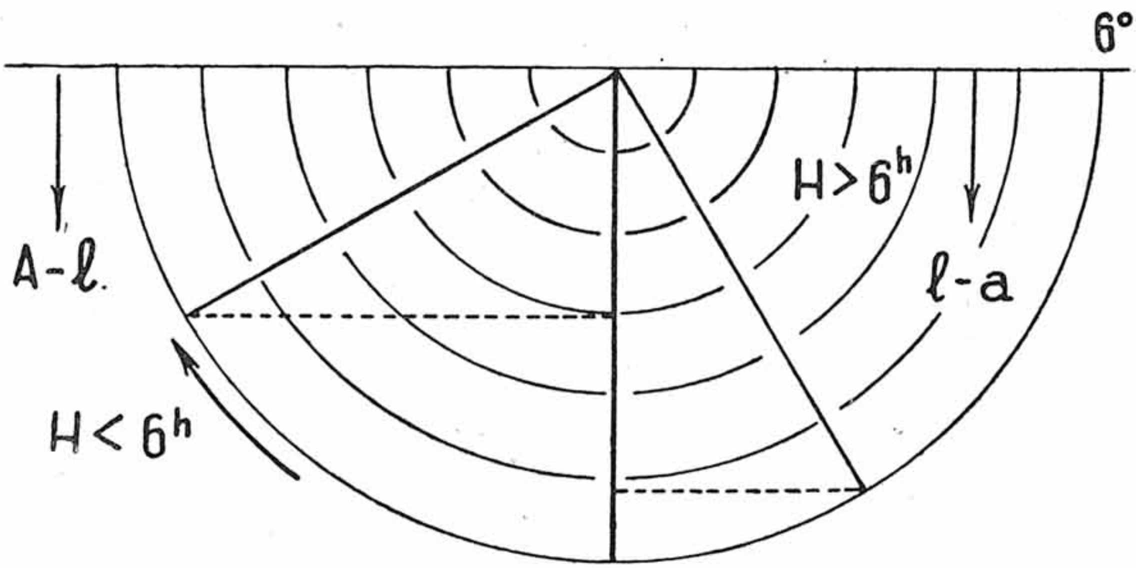
Algo complicado resulta esto, pero mucho menos que con el gráfico circular original.

Sin embargo, lo normal será determinar más fácilmente la latitud por observación de la Polar, correspondiendo a un valor que (dado lo grosero de nuestras determinaciones gráficas) apenas varía con la indeterminación del horario de estima.

La distancia polar de la estrella de este nombre es ahora de un grado justo o sesenta minutos, y aunque disminuye, en más de tres siglos apenas alcanzará la mengua unos siete minutos. A nuestro fin podemos suponer la declinación constante.

En el gráfico tenemos un haz de radios y una serie de rectas horizontales que nos permite determinar la diferencia entre latitud y altura, proyección que es de la distancia polar sobre el meridiano, o en nuestro gráfico del punto que suponemos recorre el círculo a 6° del Polo sobre la vertical central. Así, con horario de 2^h, habrá que restar a la altura 30′ para tener la latitud, y con otro de 10^h sumarle 52′.

Con ello se evita el engorroso modo de determinar Horario.



Latitud por la polar.