Métodos Gráficos para Determinación Astronómica del Punto

Por el General JOSE M.ª AYMAT

Y... ¿qué es la verdad? La verdad no es de este mundo. Cuádrense al céntimo los balances de un Banco; pero al comprar con sus dineros dos kilos de merluza a ocho pesetas, ni las dieciséis monedas dejan de tener su tolerancia de peso y ley, ni los dos kilos tienen 2.000 gramos. Ni es tampoco necesario. El cálculo de resistencias de materiales, salvando, quizá, las construcciones aeronáuticas por lo que el peso pesa en ellas, basta hacerlo aproximado, ya que luego se le aplica un coeficiente de seguridad, cuya cuantía es discrecional dentro de amplios límites. Ni es posible la exactitud. Que todo cálculo es sólo aproximado, desde los astronómicos a la diez o cienmillonésima, al del coste de pavimentar una carretera o del rendimiento agrícola de una finca.

Por ello, cuando un cálculo, según principios rigurosos de la Matemática, resulta complicado o difícil, prácticamente se sustituye por esas tablas que contienen los manuales técnicos, y otras veces por gráficos o nomogramas.

Aparte de la rapidez de manejo, ofrecen estos últimos la ventaja de que nos dan la sensación del orden de aproximación del resultado; función no sólo de la indeterminación de los datos, sino también de los valores de éstos; como que nos presenta la expresión gráfica de las ecuaciones diferenciales. Basta oscilar ligeramente la recta que alinea los datos, para ver la amplitud con que varía el resultado, en operación mecánica equivalente a la deducción matemática de la derivada.

Son condiciones que favorecen la precisión del resultado, en oposición a las contrarias:

Que el resultado se encuentre sobre parte de la escala en que las divisiones vengan más amplias.

Que la intersección sobre esta escala resulte lo más normal posible.

Que la alineación determinante del resultado venga fijado por trozos de escala de los datos con divisiones más apretadas.

Que la escala del resultado venga colocada entre las de los datos, y cuando las divisiones de éstas sean diferentes, quede más próxima a aquella que los tenga más apretadas.

Que cuando el resultado quede en prolongación del segmento que une los datos, éste sea lo más largo posible y el resultado quede lo más próximo a los datos, y de éstos, a aquel cuyas divisiones estén lo más apretadas.

En una palabra, que la alineación determinante del resultado venga amarrada lo más fijamente posible, y que su posible indeterminación haga variar el resultado lo menos posible.

La navegación astronómica tenía que resolver en guerra no sólo el problema de la situación durante las largas travesías, sino incluso el mucho más delicado de la recalada, por tener que guardar silencio la radio, ya que podía dar una información que convenía sustraer al enemigo.

La delicadeza de esta operación exige una precisión grande en la situación, del orden de la del 1′ que se consigue en los barcos, imposible de alcanzar en los aviones, porque las fuerzas de inercia impiden asegurar precisión en las alturas que se aproxime a ese valor. Pero si la cuantía del error llegaba a reducirse a unos pocos minutos, del orden de los cinco, era necesario que los cálculos consiguientes para la determinación del punto no empeoraran esa ya tan precaria precisión. Por eso había de desistir de simplificaciones y emplear en el cálculo los métodos clásicos en la navegación marítima.

La paz ha vuelto a permitir la libre y amplísima explotación de la radiogoniometría, no ya en la medida en que se había perfeccionado antes de la guerra, sino acrecentada por la explotación de la maravilla del "radar", por lo cual el problema de la recalada se resolverá siempre radiogoniométricamente, y desde distancias del orden del centenar de kilómetros, o su doble, será el avión, en vuelo ciego o no, conducido a su destino por ese fiel y seguro lazarillo que son las ondas radioeléctricas.

Sólo a distancias mayores se necesitará el auxilio astronómico, porque estemos fuera de alcance de las señales radios o porque éstas tengan una imprecisión que al crecer con la distancia las haga poco aprovechables. Fijémonos en que tres grados de imprecisión difíciles de asegurar con los gonios, representa 1/20 de la distancia, y a 500 kms. son ya 25 de error, próximo al cuarto de grado de arco terrestre en la indeterminación astronómica. Y a esas distancias basta, porque ni los derivómetros dan mucha mayor precisión para asegurar nuestra ruta, ni será posible muchas veces observar deriva, con lo que la imprecisión del rumbo a seguir será aún mayor.

Queda con ello probado que en la parte central de las largas travesías transoceánicas, fuera del alcance, como estamos, de la radio, se presenta el problema de situarnos astronómicamente, y que nuestra situación no requiere precisión mayor que la del orden del cuarto de grado, que permite muy bien el empleo del cálculo gráfico, cuya sencillez, rapidez y comodidad no debemos, por tanto, desdeñar.

Y relacionamos este orden de precisión con la sencillez por referirnos a gráficos de un solo dibujo y en tamaño del de las cartas corrientes que se llevan a bordo, con dimensiones que se aproximan al metro. Porque no debemos ignorar que gráficamente es posible obtener mayor precisión; pero la división del gráfico en trozos requiere una complicación que desvirtúa la ventaja característica del cálculo gráfico.

En todo caso, la determinación de azimut, o del rumbo inicial de ortodrómica, aceptable aun a la aproximación del grado; la identificación de estrellas, la determinación de ortos y ocasos, crepúsculos, corrección por esfericidad de rumbos radiogoniométricos, de circunstancias favorables de observación, siempre se podrá hacer gráficamente.

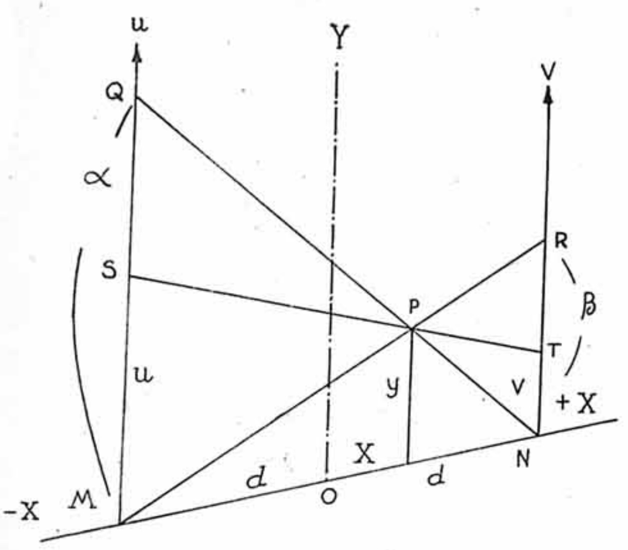
Veamos cómo se construye un ábaco o nomograma que resuelva nuestro problema de la situación astronómica, o más concretamente, el triángulo esférico de situación, caso particular del general de un triángulo esférico oblicuángulo cualquiera, y que desde nuestro punto de vista ignoraremos, escribiendo ya la fórmula que da la altura, *a*, de estima; de un astro en función de su declinación, *d*; de la latitud, *l*; de estima y del horario, *H*, consecuente a la longitud estimada:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d + \cos l \cos d \cos H.$$

Hemos de prevenir por adelantado que la explicación que sigue no tiene más objeto que indicar a aquellos lectores no versados en Nomografía cómo se aplican sus principios a un caso singular del tipo de los que se presentan frecuentemente; pero no deben asustarse los menos aficionados a las complicaciones del cálculo, pues a continuación damos cuenta de cómo con toda independencia de la Nomografía, y casi de la Matemática, con sólo los fundamentos de las reglas más elementales del movimiento diurno de los astros, puede construirse otro gráfico más sencillo de trazar, como constituído que está sólo por rectas.

Un gráfico que resuelva la mutua dependencia de cuatro variables deberá contener dos escalas lineales de dos de las variables y una serie de líneas representantes cada una de ellas de un valor singular, redondo, de una tercera variable, acotado con valores de la cuarta. Unidas las cotas iguales, se formará otra según la serie de curvas de valor singular de esa cuarta variable, resultando, del cruce de ambas series de curvas, una red, sobre la cual determinaremos el valor de las tercera y cuarta variables que resultará en la alineación de los valores tomados en las escalas de la primera y segunda. Con ello, de modo general, la recta tomada sobre dos valores cortará al valor singular del tercero en la cota o valor que resulte para la cuarta variable, considerada como incógnita.

Lo más sencillo será siempre que las dos primeras escalas sean rectas paralelas entre las que quede la red de puntos. Siendo en nuestra fórmula altura, *a*, y horario, *H*, los únicos que están en términos inde-



(Al pie de la ordenada de P póngase la letra H.)

Fig. 1.

pendientes, con la ventaja, además, de ser escalas análogas las funciones de sus valores sen a, cos H, que sólo variarán en ser complementarias sus cotas, y correspondiendo, además, a dar las diversas alturas de cada momento dentro de la constancia de lugar, latitud y astro, declinación, tomaremos estos valores sobre los soportes rectos, con valores sen $a = u$ y cos $H = -v$. Este, con signo —, ya que la altura crece al menguar el horario. A las características derivadas de latitud y declinación llamaremos $S =$ sen l, sen d, y $C =$ cos l, cos d, y resultará, abreviadamente, $u = S - Cv$, o, de otro modo, $u + Cv - S = 0$, que viene a ser un caso particular de la forma $Au + Bv + C = 0$, que vamos a ver cómo se resuelve.

Para definir el punto, P, que para cualquier recta ST que pase por él resuelva la ecuación $Au + Bv + C = 0$, basta conocer dos sistemas de valores u y v que la cumplan. Más fáciles de determinar para las NQ y MR, para los que $u = 0$ y $v = 0$, que dan los valores respectivos de: $v = \beta = -C/B$, y $u = \alpha = -C/A$.

Tomados $MQ = \alpha$ y $NR = \beta$, la intersección de NQ y MR da el punto P; pero para determinar las líneas que unan diferentes puntos P ha de fijarse su situación por coordenadas cartesianas, para lo cual tomaremos por eje de X la recta MN, que une los orígenes de las escalas u y v, y como eje Y la paralela OY a ellas por su centro, llamando d a la abscisa $OM = ON$ de las escalas.

De la semejanza de los triángulos PMH y RMN, y de los PNH y QNM se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d+x}{y} = \dfrac{2d}{\beta = -\dfrac{C}{B}} = \dfrac{-2dB}{C} \\[2ex] \dfrac{d-x}{y} = \dfrac{2d}{\alpha = -\dfrac{C}{A}} = \dfrac{-2dA}{C} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{dC + Cx}{-2dB} = \dfrac{dC - Cx}{-2dA} \\[2ex] Ad + Ax = Bd - Bx \\ (A+B)x = d(B-A) \end{array}$$

de donde se deduce $x = d\dfrac{B-A}{A+B}$

e
$$y = \frac{dC + dC\dfrac{B-A}{B+A}}{-2dB} = -\frac{C}{A+B}.$$

Aplicando esta norma a nuestro caso

$$u + \cos l \ \cos d \ \ v - \operatorname{sen} l \ \operatorname{sen} d = 0,$$

que da para nuestros símbolos $A = 1$, $B = \cos l \cos d$ y $C = -\operatorname{sen} l \operatorname{sen} d$,

$$x = d\frac{\cos l \cos d - 1}{\cos l \cos d + 1} \qquad y = \frac{\operatorname{sen} l \operatorname{sen} d - 1}{\cos l \cos d + 1}.$$

Hay que determinar las curvas definidas por una cota l ó d, que observamos son intercambiables dada la simetría de las fórmulas.

Eliminando d por medio de prolijas transformaciones (1), se obtiene la ecuación

$$\left(1 - \frac{1}{\cos^2 l}\right)x^2 - \frac{4d^2}{\operatorname{sen}^2 l}y^2 - 2d\left(1 + \frac{1}{\cos^2 l}\right)x + \\ + d^2\left(1 - \frac{1}{\cos^2 l}\right) = 0.$$

Cambiando l por d, resulta la ecuación definidora de la curva d.

La Geometría Analítica nos enseña a reconocer la clase de curva de que se trata y sus parámetros. Del examen de los coeficientes de esta ecuación se deduce: que se trata de elipses, toda vez que

$$0 + 4\,\frac{4d^2}{\operatorname{sen}^2 l}\left(1 - \frac{1}{\cos^2 l}\right) = -\frac{16\,d^2}{\cos^2 l} < 0,$$

cualquiera que sean los valores de l (o d) (2).

(1) Se hallan los cuadrados de $x \pm d$, los denominadores se deducen de y^2; el valor de sen $^2 d$ del primero se sustituye en el segundo y se simplifica.

(2) Si en la forma general de una curva de segundo grado

$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$; $B^2 - 4AC < 0$, es una elipse.

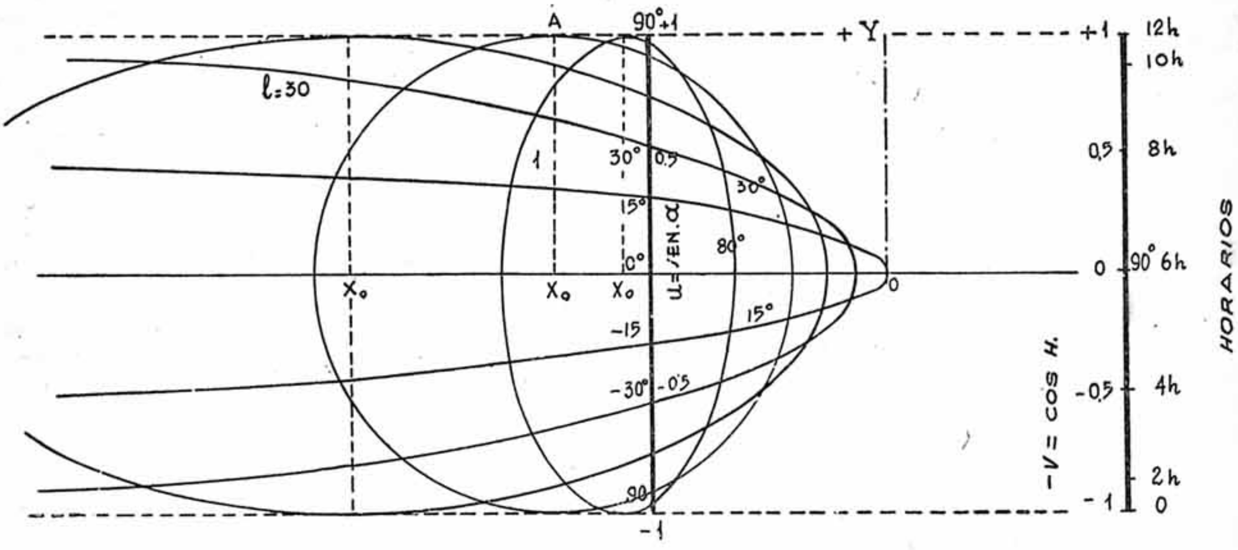


Fig. 2.—*Trazado de las elipses características de* 1 *o* d.

Carente la ecuación de término en y, el eje x de las elipses se confunde con el X del nomograma.

Los extremos de este eje se obtienen haciendo $y = o$, y tienen por abscisa

$$x' = d\,\frac{\cos l + 1}{\cos l - 1} \qquad x'' = d\,\frac{\cos l - 1}{\cos l + 1}$$

y su centro

$$x_0 = -\,d\,\frac{1 + \cos^2 l}{1 - \cos^2 l}\,.$$

El otro semieje de las elipses, ordenadas correspondientes a X_o, resulta constante e igual a la unidad. En consecuencia, todas ellas resultan tangentes a la paralela al eje X trazada por los extremos de las escalas de altura y horario.

La figura de eje de simetría horizontal indica la construcción analítica del gráfico, que en la de eje vertical se da completa, limpia de escalas auxiliares de construcción y lista para su empleo, tal como aparece en nuestro Tratado de Navegación (1).

Buscando en la red de curvas declinación y latitud que nada impide se intercambien, con tal que se tome el cruce a la derecha o a la izquierda, según sean del mismo u opuesto hemisferio, si se apoya en él el borde de una regla que pase por el Horario, contado desde el polo depreso, se obtiene en la escala opuesta al pie del gráfico la altura de estima.

(1) *Navegación Aérea*, pág. 317, de la edición tercera, 1942. Editorial Labor. Barcelona.

Si en la red se cruzan altura y latitud, alineando el cruce con el valor de la declinación tomado en la escala inferior, se obtiene en la escala superior el azimut, ángulo opuesto a la declinación, graduado en sentido opuesto a partir del polo depreso, como externo, que es, en el triángulo de situación.

Para calcular una ortodrómica, se emplea la latitud de destino como declinación, la diferencia de longitudes en vez de Horario, y en la escala inferior, como distancia, 90° menos la altura leída, mayor de 90° cuando resulte sobre el costado negativo de la izquierda.

El Rumbo inicial se obtiene alineando latitud de llegada (equivalente a declinación) con el cruce del complemento de la distancia y latitud de origen.

Para identificar un astro alineamos azimut con el cruce de altura y latitud, y obtenemos al pie la declinación (lado opuesto al azimut). Para hallar *AR*, consecuencia de longitud y horario, éste resulta en la escala superior como alineación de altura (opuesta al horario) con el cruce de latitud y declinación antes hallada.

En los casos en que entre los datos figuraran un lado y su ángulo opuesto, la alineación la estableceríamos entre las escalas de cabeza y pie, y sobre la curva del segundo lado conocido leeríamos el valor del desconocido.

Tomando lados complementos de los acotados, resolveríamos cualquier triángulo esférico, incluso cuando hubiera como dato más de un ángulo, pues basta-

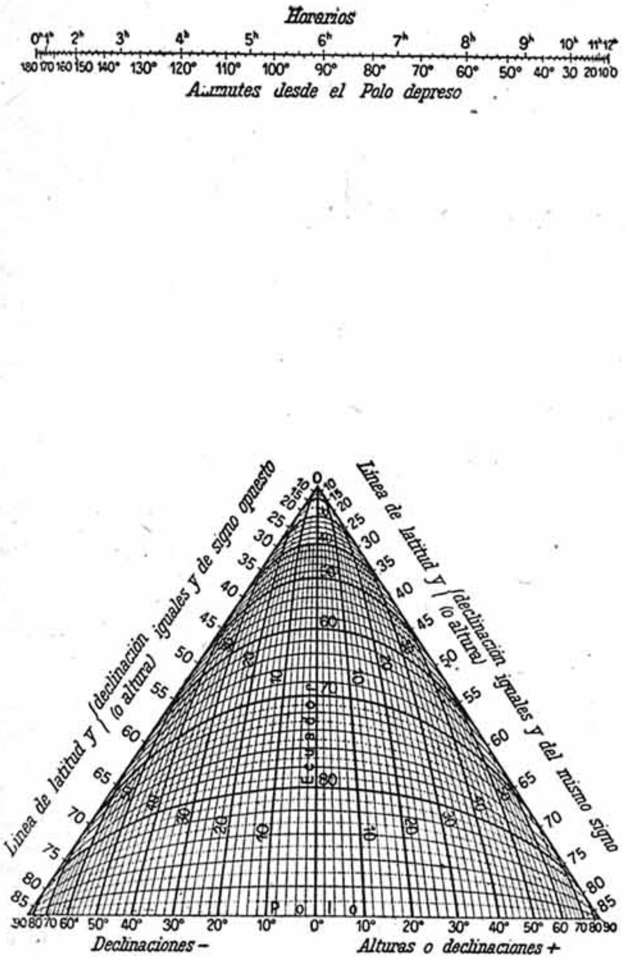


Fig. 3.

ría resolver el triángulo polar, cuyos elementos son suplementos uno del otro.

Unos ejemplos servirán para formarnos idea del manejo del gráfico.

Sea la observación de Sirio, cuya declinación 16° 37′ Sur, observado con un horario de 3 h. 04 m., en lugar de latitud N. de 36°.

Se toma a ojo el punto *A*, 16° 1/2, sobre las líneas que suben por el costado izquierdo (latitud y declinación de signo opuesto), hasta que en *B* cruza a la latitud 36 y se alínea con el *C* de horario, 3 h. 04 m., y leeremos en el costado derecho de la escala inferior el punto *D*, la altura de 22° (realmente, 21° 40). Subiendo por la curva 22°, desde *D* (altura del signo de la latitud) hasta *E*, latitud 36°, unido con *A*, $\delta = 16\ 1/2$, se obtiene sobre la escala de azimutes en *G* el de 48° (son 47° 50).

¿Qué altura tendrá en la latitud de Madrid, 40° 24, la estrella Vega, $\delta = 38°\ 44'$ N., cuando el ángulo paraláctico (Zenit Astro Polo) sea recto, y sea, por tanto, máxima su variación en altura? Este es el problema tipo, cuya solución basta encontrar aproximada, y que resuelve este gráfico y no el americano que presentaremos luego.

Opuesto al ángulo en el astro es el lado $PZ =$ Polo Zenit o colatitud. Debemos, pues, entrar en las escalas extremas con 90° y 40° 1/2, determinando la recta *HI*. Nos encontramos con que esta recta no corta la curva de declinación 38° 44, lo que demuestra que en el cielo de Madrid no se alcanza ese valor máximo. Para ver cuál sea, hacemos girar la recta alrededor de $I = 40°\ 1/2$, hasta tangentear en *IL* la curva $d = 38°\ 3/4$. Entonces en la escala de ángulo leemos 5 h. $= 75°$, y comprobamos que la tangencia tiene lugar para alturas entre 70° y 80°. Leemos el ángulo en la graduación superior, y no 105 en la de azimutes, teniendo en cuenta que éstos son ángulos externos.

Si se tratara de Deneb (α de la Cruz del Cisne) $= 45°\ 5'$, como la intersección con la curva $JK = 45°$,

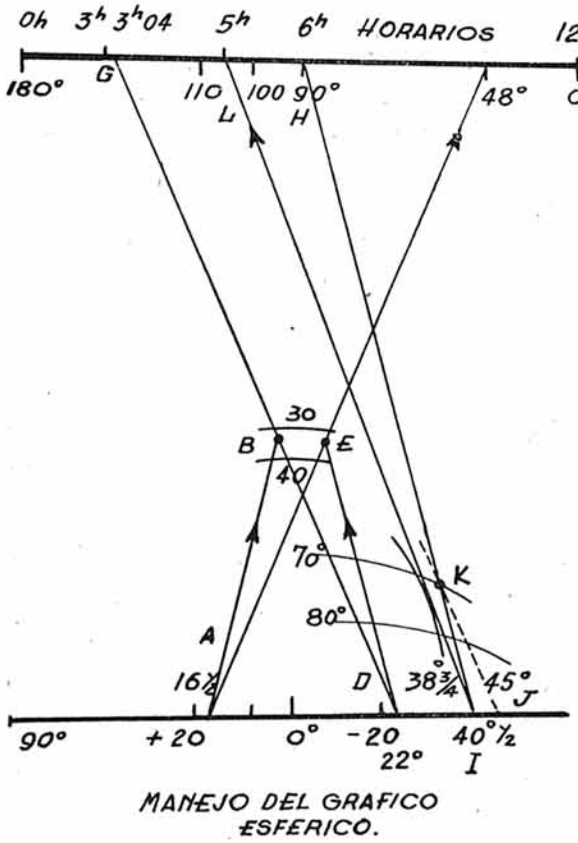


Fig. 4.

tiene lugar hacia la 70°, ésa será la altura alrededor de la cual ocurre la máxima variación buscada.

Este gráfico, no obstante su tipo clásico y de datos puros sin combinar, tiene los inconvenientes de la dificultad de su trazado y de que empleado en los casos corrientes, la alineación se fija por puntos que pueden estar próximos, y que sólo por su prolongación, que puede llegar a ser muy imprecisa, da el valor buscado.

Estos defectos los evita el llamado "Diagram for solving Navigational Problems", que sin indicación de autor, ni fundamentos, aparece en el revés de la "Pilot Chart" para conocimiento de la atmósfera sobre el Atlántico Norte, y que, correspondiente al mes de junio, publicó en 1941 el Servicio Hidrográfico Americano, que la guerra hizo no llegara a nuestro conocimiento hasta hace poco, y que reproducimos una vez transformados los símbolos usados por aquellos a que en España estamos más habituados, aparte de duplicar la graduación de escala única de distancia ortodrómica en otra de alturas dentro de los límites empleados, y sobre todo, doblar la de ángulos por la graduación de tiempos con que directamente se deducen los horarios.

Si enfrentamos dos escalas de altura y horario, al crecer éste disminuye la altura con una cierta ley que vamos a examinar a través de casos singulares.

En el Ecuador un astro ecuatorial tiene por altura el complemento del horario. Luego desde el punto 00 que representa ese caso $l\,d$, deben resultar semejantes las escalas, salvo lo complementario de sus graduaciones.

En los pasos Meridianos, la altura resulta también $90° - a = l - d$ y $l + d$, según se trate de paso superior o inferior. Luego líneas acotadas $l - d$ y $l + d$ serán rectas concurrentes en la graduación de horarios 0 y 12 h. Esto es lo que facilitará lo rectilíneo del trazado de este gráfico, sin que sea complicación el sustituir las cotas l y d de latitud y declinación (lados que forman el ángulo H considerado) por su suma y diferencia, tan fácil de calcular.

Estos dos valores, suma y resta, serán el mismo cuando la declinación se anule en los astros ecuatoriales; pero en ellos, al valor del Horario aún no considerado de 6 h. = 90°, corresponde una altura precisamente 0. El punto representante de $d = 0$, o de $l + d = l - d$, está en el eje horizontal de simetría del gráfico, y la relación entre altura y horario en cualquier momento vendrá dado por lo rectilátero del triángulo en el lado Polo-Astro, por la relación sen $a = \cos (90 - a) = \cos l \cos H$; lo que nos indica que las escalas de distancias cenitales y horarios

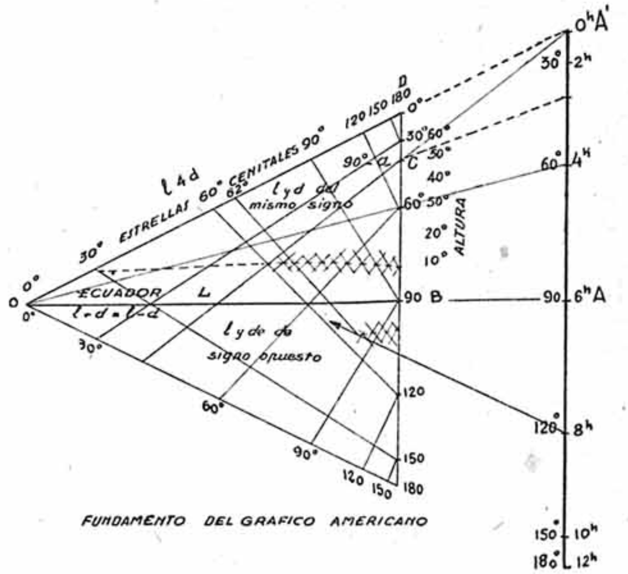


Fig. 5.

deben medir sus cosenos, lo que nos confirma su semejanza y nos señala además los puntos sobre el eje de simetría en que deben cortarse las rectas acotadas en el valor $l + d = l + d = l$. La situación de estos puntos viene determinada gráficamente por la alineación del horario 0 (paso meridiano) y la altura $= 90 - l$; y si se quiere por distancias, LB, a la escala de alturas, por la relación que se deduce de los triángulos LBC' y LAA' semejantes.

$$\left.\begin{aligned} \frac{LB}{LA=LB+BA} &= \frac{BC=BD\cos l}{AA'} \\ BD &= AA'\,\frac{OB}{OA} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{LB}{LB+AB} &= \frac{AA'.OB\cos l}{AA'.OB} \\ LB.OA &= LB.OB\cos l + AB.OB\cos l \end{aligned}$$

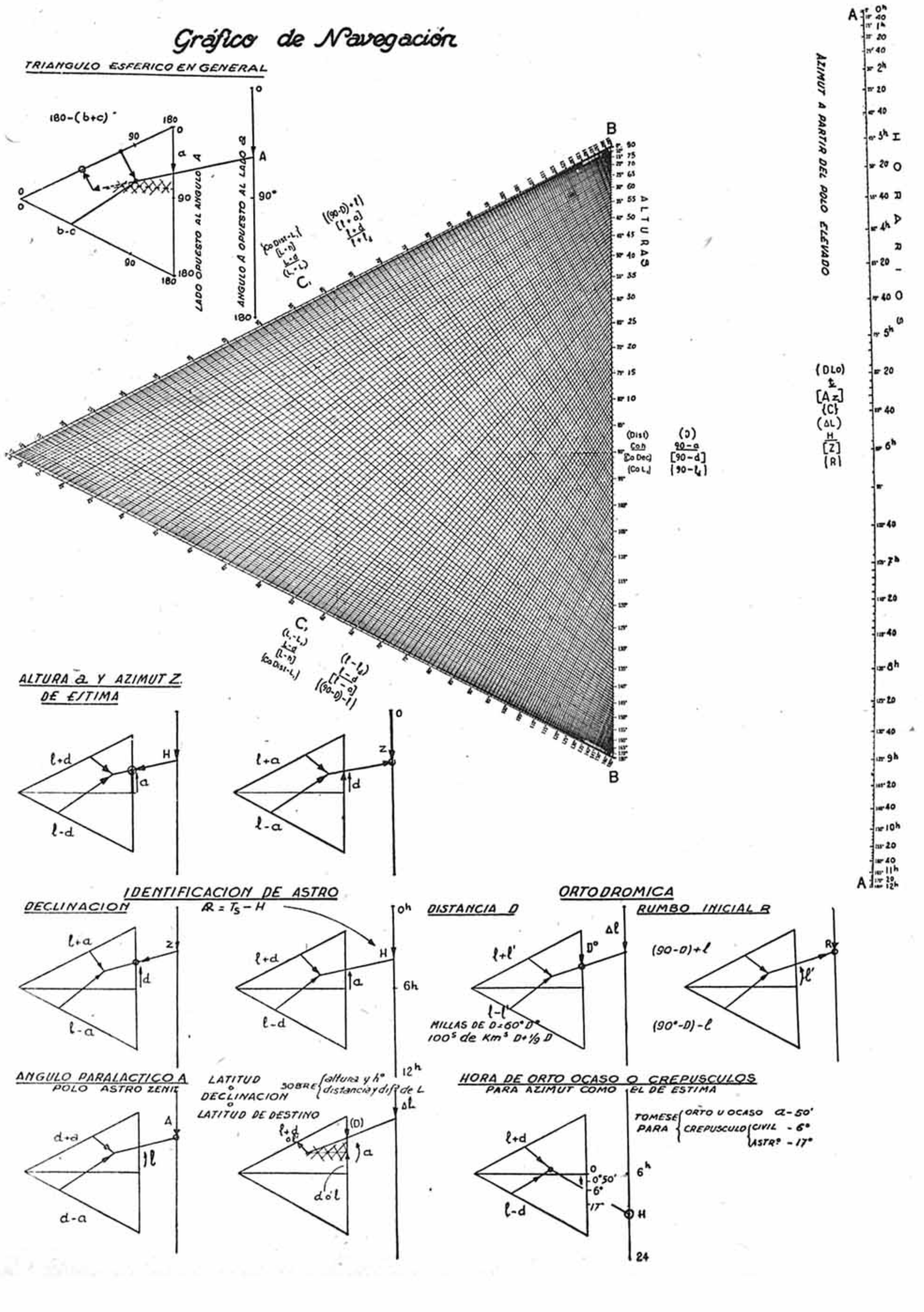
de donde

$$LB = \frac{AB\,.\,OB\cos l}{OA - OB\cos l}.$$

El uso del gráfico, que en sus dimensiones originales mide 60 × 60 cms., es idéntico que el antes descrito, con la ventaja de que distancia y altura ortodrómica, e incluso declinación al identificar astro, vienen siempre situados entre los extremos fijos en Horario, diferencia de longitud o azimut, y la combinación de los lados que forman el ángulo. Sólo éste viene en prolongación de la alineación, aunque menos lejos que en el gráfico anterior y sin grave daño, pues azimut y rumbos no requieren aproximación mayor.

No debe olvidarse que en todo caso hay que hallar previamente la suma y diferencia de los lados opuestos al ángulo; que estas sumas y diferencias deben

Gráfico de Navegación



hacerse algebraicas, y que no se puede hallar directamente un lado adyacente al ángulo dado.

En la figura en que lo reproducimos van indicados con símbolos, con comentario tipográfico análogo, los valores correspondientes a cada uno de los cuatro problemas que resuelve, en doble colección, según las letras usadas en N. A. (L = latitudes $D\ Lo$ = diferencia de longitudes, C = Course = Rumbo inicial de ortodrómica), y los nuestros (l, ΔL, R, l_d = latitud de destino) y unos esquemas recordatorios del manejo, que juzgamos más expresivos que el desarrollo de ejemplos.

Dijimos que este gráfico no resolvía directamente el problema de hallar uno de los lados adyacentes al ángulo, cuando entre los datos figuraba con el ángulo el lado opuesto, y vamos a indicar el procedimiento de resolverlo, si bien sea indirectamente.

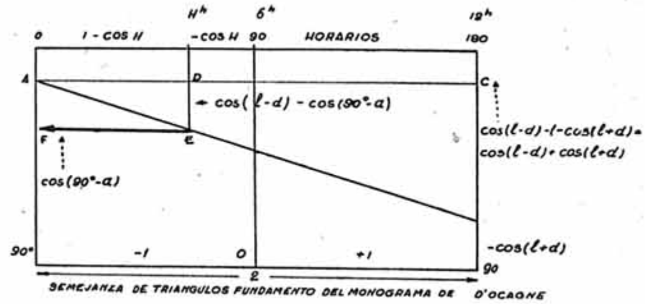
Si a partir de una cierta graduación de altura, 0° en el centro y $\pm$ 90° en los extremos alto y bajo, de la escala vertical, imaginamos una línea curva sensiblemente horizontal, que corte diagonalmente los cuadros, manteniendo constante la diferencia entre suma y diferencia de valores, que hace constante el substraendo d, y representa una declinación (o latitud) del valor indicado, pues supuesto X corresponde a valores $l + d = 90 + X$ y $l - d = 90 - x$, de los que se deduce $d = x$.

Así, pues, basta ver la cota de $l + d$ en que la alineación determiniada por ángulo y lado opuestos corta a esa curva en diagonal, para deducir, restándole el valor d, el valor de l.

Ejemplo: Queremos determinar varios puntos distantes 1.200 kms = 108° de Panamá, situado en latitud austral de 9°, y de modo especial la latitud sobre los meridianos separados 120° de longitud. Siendo el ángulo de 120° en el Polo opuesto a la distancia, alineamos 120° de la escala de horarios con 108° de la de distancia. Fija la regla, tomamos 9° por debajo del centro de la escala de distancias, y con la punta del lápiz recorremos diagonalmente hasta cortar la alineación, y leemos en la escala $l + d$ (realmente, $l + l'$) = 62° para ese punto. Como $l = -9°$, $l' = 62 - (-9) = 71°$, que es la latitud buscada.

Otro modo de enfocar la solución gráfica de esta misma fórmula de Pesci, que da la altura en función de las sumas y restas de los cosenos naturales de las suma y diferencia de latitud y declinación (1), fundamento del nomograma que acabamos de describir, es el ya clásico de D'Ocagne, que en Norteamérica se conoce con el nombre de Litlehales.

(1) Puede verse en la página 301 de la *Navegación Aérea*, antes citada.



Al final derecho de la oblicua póngase una B, y entre A y F: cos ($l - d$).

Fig. 7.

De la fórmula

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d + \cos l \cos d \cos H,$$

se deduce:

$$\cos H = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} l \operatorname{sen} d}{\cos l \cos d};$$

si se ponen los productos en función de una suma y diferencia

$$\cos H = \frac{\operatorname{sen} a - {}^1/_2\,[\cos(1 - d) - \cos(1 + d)]}{{}^1/_2\,[\cos(1 - d) + \cos(1 + d)]};$$

como el horario tiene que disminuir para que crezca la altura, haremos

$$1 - \cos H =$$

$$= \frac{{}^1/_2 \cos(1 - a) + {}^1/_2 \cos(1 + d) - \operatorname{sen} a + {}^1/_2 \cos(1 - d) - {}^1/_2 \cos(1 + d)}{{}^1/_2 \cos(1 - d) + \cos(1 + d)};$$

de donde, reduciendo términos, multiplicándolos por 2 y unificando la función circular a considerar, poniendo el seno de la altura como coseno de la distancia cenital, se deduce la proporción

$$\frac{1 - \cos H}{2} = \frac{\cos(l - d) - \cos(90 - a)}{\cos(l - d) + \cos(l + d)},$$

que puede presentarse en forma de triángulos semejantes ABC y AED, cuyos lados sean los de la figura.

Lo que prueba que si sobre dos escalas paralelas, separadas dos unidades (que además es el desarrollo de la escala de cos H desde l a $-l$, para el intervalo O a 12 h), se toman en sentidos opuestos los cosenos de las diferencias y sumas $l - d$ de latitud y declinación, se obtiene una recta donde estarán en proporción los excesos de la unidad sobre cos H, y el del coseno de diferencia de latitud y declinación, sobre el del complemento de la altura. Una paralela a la base nos dará, pues, ese valor.

El gráfico comprende, pues, un cuadro de dos unidades de lado, graduados en cosenos con sentido conveniente para que correspondan al que hemos dado a nuestro triángulo.

Se unen con el filo de una recta las graduaciones laterales de suma y resta de latitud y declinación. Bajando por la vertical correspondiente al horario, la intersección con la oblicua hace leer en la escala izquierda el complemento de la altura; del propio modo, si se repite la operación con latitud y altura, que forman el azimut, y se entra lateralmente por la izquierda con la distancia polar o complemento de la declinación, bajando a la escala inferior de azimutes, se lee éste, contando tal como está graduado, interiormente al triángulo de situación, a partir del polo elevado.

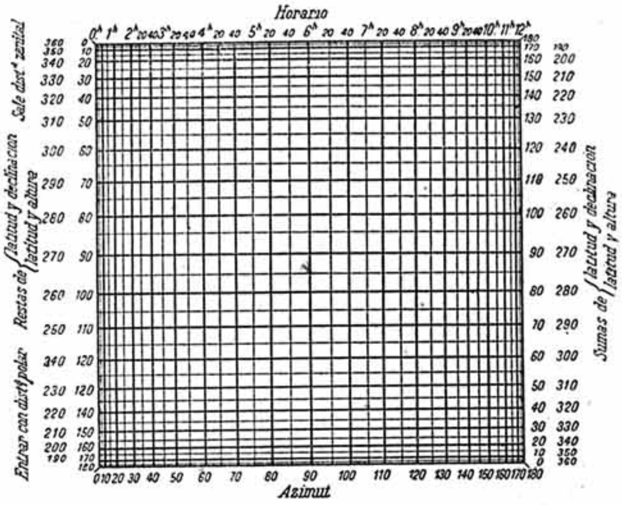
Esta forma de gráfico, notable por su doble simetría, si bien no permite leer el valor buscado directamente en escala, tiene la bella cualidad de que permite aprovechar muy bien el formato rectangular del papel, y es hasta más fácil de trazar que el de la Pilot Chart.

Obsérvese la correspondencia:

En { la Pilot Chart: / el D'Ocagne: } se determina { un punto / una recta } por dos { rectas / puntos } acotados por suma y diferencia de lados adyacentes. Este { punto / recta } con otro { punto / recta } acotado en ángulo (o lado) da sobre otro { punto / recta } el lado (o ángulo) opuesto.

En todos estos gráficos se producen porciones en que las líneas aparecen sumamente apretadas, y si al tomar en ellas los datos es indicio de la escasa variación que su indeterminación ha de producir en los resultados, muestra, por el contrario, que si allí tuviéramos que leer resultados, ésos serían muy erróneos, como ocurre al querer determinar alturas próximas al cenit, distancias muy chicas o a la región antípoda o los azimutes de astros próximos al meridiano.

Hay un gráfico de excepcional regularidad, el ideado por Alessio en 1908, fundado en la rotación del triángulo de situación (1), y que se ha reproducido por



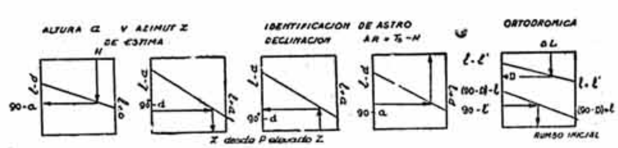


Fig. 8.

Bertin, Litlehales y Veater; pero sobre no constituir realmente nomograma, por ser ya muy largo este artículo, lo dejamos para otra ocasión.

Pero no terminaremos sin hacer una advertencia. Al amparo del encanto del graficismo, para ahorrar trabajo y estudio previo de la Matemática y la Astronomía, se han ideado soluciones respecto a las cuales hemos de poner en guardia al lector. Son aquellas que resuelven casos singulares. Así las que por la intersección de las curvas de una cuadrícula, correspondientes a alturas simultáneas de dos astros, dan el punto. Toda su facilidad se desvanece en cuanto fallan las circunstancias de la singularidad, y entonces hay que acudir al método general, menos practicado o incluso tal vez no llegado a aprender. Y para ese viaje no necesitábamos alforjas, que nos habrán lastimado inútilmente con su peso al aprender los singulares métodos.

(1) Puede verse en la página 311 de la *Navegación Aérea*, repetidamente citada.