



# La progresión del avión sin motor, contra el viento

Por FEDERICO CANTERO VILLAMIL, Ingeniero de Caminos.

## I

### REPASO DE ANTECEDENTES

Allá en el año 1887, durante el último curso del Bachillerato, empezó a inquietarnos la idea de que el hombre, un día, llegaría a volar, puesto que otros seres vivientes—las aves—volaban.

Algo después, un buen amigo y compañero de carrera, en el primer año de la Escuela de Caminos, don Francisco Granadino (q. e. G. e.), a quien también preocupaba el vuelo de las aves, nos aconsejó leyésemos una obra de H. Marey, *Le vol des oiseaux*, que acababa de publicarse. Era el curso de 1890-1891.

Releímos con afán dicha obra y nos interesó sobremanera, admirando grandemente cuanto aquel meritísimo doctor francés (era un médico) decía y hacía observar en los capítulos de su libro, llenos de estudio y valiosísimo sentido de la realidad. Capítulos notables, con los que contrastaba un Apéndice, escrito por un ingeniero militar francés, lleno de erudición—eso sí—, pero tan vacío de acierto e intuición de las realidades, que basándose en los estudios y datos de H. Marey, llegaba en sus conclusiones, matemáticamente deducidas, a calcular... y fijar numéricamente en siete u ocho kilogramos por segundo la energía gastada, en su vuelo por una gaviota.

¿Cómo no se inquietaría y asombraría aquel técnico al establecer como una verdad, obtenida de las observaciones registradas por Marey, aquel resultado?

Pasaron los años y no dejamos nunca de seguir pensando, cuando nos era posible, en las cuestiones de aviación, y más todavía desde las históricas experiencias y demostraciones de los hermanos Wright en los años 1904 y sucesivos. Después comenzamos en Zamora una serie de investigaciones sobre aerodinámica, ayudados en las construcciones y realización de las experiencias por un antiguo amigo, don José María Espada (ex jefe de talleres del ferrocarril de Medina-Zamora), consiguiendo con su colaboración el éxito de la experiencia de "La hélice que se atornilla en el viento real".

Llegaron más tarde los años en que empezó a ponerse de moda el estudio y práctica de ensayos del *vuelo sin motor*, problema que nos hizo cavilar mucho.

Se sumó a ello en aquel mismo período la *moda* también de los estudios sobre la "Relatividad", del profesor Einstein, y como parecía que los "vuelos sin motor" (es decir, en el sistema en traslación: *Viento*) se entrelazaban de particular manera con los problemas de la "Relatividad", llegamos, como consecuencia de las indagaciones y cavilaciones, a escribir en 1922 una obrita que se editó en francés y en español a principios de 1923 con el título de *Aviación y Relatividad*.

El lector imparcial e indulgente encontraría en dicha obrita cosas nuevas e interesantes; pero cuando hemos vuelto a leer sus capítulos hoy (1944), nos damos cuenta, entre otras muchas cosas, de que en el capítulo V, "La energía del viento", sólo se estudia y analiza el problema del avión marchando en trayectoria ascendente. ¿Por qué no analiza-

mos a continuación y al propio tiempo, o sea dentro del mismo capítulo V, el problema complementario del avión marchando en trayectoria descendente?

Sin embargo, no quedó sin estudiar el problema; pero se hizo en el capítulo IV, enfocándolo deficientemente, de suerte que así no está expuesto con razonamientos semejantes a los del capítulo V, con lo cual el referido estudio de la marcha en descenso ("penetración en descenso", como lo titulamos en el capítulo IV) perdió claridad y exactitud, resultando aminorada su natural aplicación para los problemas considerados en los capítulos VI, VII, VIII y IX de la obra.

Pero mucho peor, sin duda, fué la enorme deficiencia cometida en los capítulos que la obra dedica a la "Relatividad".

En efecto: algo se dice en las primeras páginas del referido apéndice respecto a lo complejo que resulta el cambio, o paso, de un sistema de coordenadas a otro en traslación uniforme respecto al primero, en los casos en que no se trate simplemente de lo que al aspecto geométrico atañe, aun concediendo masa a los diversos puntos materiales o sus conjuntos (cuerpos).

Pero lo verdaderamente complejo aparece—como son los casos del *mundo real*—cuando el ambiente en que estaba, o rodeaba, al primer sistema de coordenadas, y en el que ha de moverse uniformemente el nuevo sistema, no es un ambiente libre y diáfano, desprovisto de todo obstáculo material ni de ninguna otra clase. Sino que hay o existe, invadiendo ambos sistemas de coordenadas, una gran masa gaseosa (el aire de nuestra atmósfera) y también un "campo de fuerzas", de gravitación o de otro género.

En estos casos que como ejemplo citamos no bastará para el cambio de coordenadas agregar a todas las "masas" observables la constante consiguiente a la traslación del nuevo sistema, sino que habrá que agregar además a cada "masa", según su forma (de su cuerpo), una cantidad variable de energía por unidad de tiempo, igual a la necesaria para vencer la resistencia en cada momento del movimiento del *cuerpo* contra dicho ambiente (ambiente atmosférico).

Y de la misma manera habrá que agregar a cada elemento de "masa" o cuerpo otra cantidad de energía por cada segundo de tiempo—equivalente a la "energía potencial", ganada o perdida dentro del "campo de gravitación" (o de fuerzas), anexo o unido al primer sistema de coordenadas.

Para apreciar bien esos dos ambientes, que deberán tenerse en cuenta, recordaremos y haremos aquí mención de unas experiencias que por aquellos años—1921-1923—hicimos, buscando comprobación a nuestros ojos de los problemas de la "Relatividad", o sea de unos mismos fenómenos colocados en distintos sistemas de coordenadas.

Los dos sistemas eran: uno el de "tierra firme", naturalmente, y el otro el interior de un vagón de un tren.

Destinados entonces en la Jefatura del ferrocarril de Medina a Zamora, nos fué posible realizar esas experiencias, muy interesantes, dentro de un vagón vacío (es decir, puesto a nuestra disposición para las experiencias), que se agregó a algunos trenes de mercancías en las oportunas ocasiones.

Concretándonos siempre, para dichas experiencias, a trayectos rectos y en los que la velocidad del tren era prácti-

camente uniforme, realizamos dentro del susodicho vagón, entre otras, las tres principales experiencias como sigue:

- 1.<sup>a</sup> La del movimiento del péndulo.
- 2.<sup>a</sup> La de saltos hacia adelante de la marcha y en sentido contrario.
- 3.<sup>a</sup> Comprobación del teorema de Torricelli, para salidas de filetes líquidos, de agua, por un orificio, hacia adelante de la marcha del tren y hacia atrás.

Repitiendo tales experiencias cuanto fué posible, aprendimos:

Respecto a la primera (disponiéndola de manera que el movimiento del péndulo estuviese en un plano paralelo a la marcha del tren), resultó en todos los casos que las amplitudes de las oscilaciones eran idénticas hacia el lado de la locomotora (o de la marcha) como en el sentido opuesto.

La segunda experiencia consistía en saltar a pies juntos, desde una raya trazada en medio del piso del vagón, primeramente en dirección hacia la locomotora y después en sentido contrario, haciendo en todos los casos el esfuerzo muscular máximo conducente a lograr límites en las longitudes de los saltos. Pues bien: el término medio de las longitudes de los saltos así verificados, en sentido hacia la locomotora, resultó igual al término medio de otros tantos saltos hechos en la dirección opuesta.

En la tercera experiencia: de la velocidad de salida del agua a través de un orificio en pared vertical de un depósito, en el que se conservaba el nivel constante, resultaron siempre iguales las longitudes de alcance, del chorro parabólico que emanaba horizontalmente, tanto cuando el orificio se disponía mirando hacia la locomotora, como cuando lo disponíamos mirando hacia la cola del tren.

Las experiencias así efectuadas eran, pues, concluyentes: Los fenómenos "físico-mecánicos" se manifestaban o cumplían en el sistema en traslación uniforme, "tren en marcha", conforme a las mismas leyes (contemplados desde el sistema "tren en marcha" con velocidad uniforme) que cuando tenían lugar y los observábamos en "tierra firme".

Pero para crear ese sistema de coordenadas, "tren en marcha uniforme", había sido preciso:

Primero: comunicar a todos los elementos (unidades) de masa del tren, y a sus contenidos interiores, la velocidad uniforme del tren; en segundo lugar: también había sido preciso incorporar al sistema "tren en marcha" para cada unidad de tiempo, el trabajo necesario para vencer las resistencias pasivas, y en particular la del aire ambiente, dentro de cuyo mar de masa flúida marchaba el tren, y en tercer lugar: asimismo el trabajo positivo o negativo resultante de la variación de energía potencial si el tren marchaba en rampa ascendiendo o en pendiente de descenso.

En suma: esas experiencias nos permitieron caer en la exacta cuenta de que una cosa es pasar sencillamente de un sistema de coordenadas a otro con traslación uniforme respecto al primero, cuando el segundo sistema ha de moverse en ambientes libres o "diáfanos", es decir, desprovistos de masas y de campos de fuerza (la "gravitación", por ejemplo), y otra es el caso, muchísimo más complejo, pero el verdadero y real para las experiencias sobre la superficie de la Tierra que el hombre pueda llevar a cabo, en las cuales, naturalmente, ha de encontrarse con el "am-

biente de masa atmosférica" y con el campo de fuerzas de la "gravidad".

Si cualquiera de esas experiencias—por ejemplo, la del "péndulo"—la hubiéramos realizado, no dentro del vagón y con todas sus puertas y ventanas cerradas, sino sobre el techo del mismo, al aire libre, sufriendo en consecuencia los efectos del *viento relativo* resultante de la marcha del tren, bien otros hubiesen sido los resultados observados; resultados que, además, hubieran variado indefinidamente para una misma longitud y masa (o peso) del "péndulo", según la forma que tuviere su extremo inferior o lenteja y las varias posiciones que ésta pudiese tomar (o la diésemos) al pasar por cada punto de la trayectoria del balanceo.

\* \* \*

Cuanto acabamos de exponer en el anterior examen de sucesos y consideraciones, persigue como fin principal en esta ocasión: patentizar, evidenciar, que los problemas mecánicos del "vuelo a vela", o vuelo sin motor de un avión en un ambiente de "viento" soplando respecto al suelo, no pueden estudiarse con sencillez ni acierto en un sistema de coordenadas en traslación con velocidad uniforme igual a la del "viento", pues para ello sería preciso tener en cuenta los efectos del ambiente atmosférico, y, por tanto, al pasar al nuevo sistema de coordenadas "viento", habríamos de comunicar en cada instante al avión una fuerza igual a la que estaría experimentando por efecto del "viento" en cada momento de su existencia real, o sea en el sistema "suelo" o de "tierra firme". Y pueden ser tan variables las dichas fuerzas actuantes sobre un avión (por cambio de incidencia de las alas, etc.), que estimamos mucho más práctico y menos expuesto a errores estudiar con mucho cuidado, eso sí, el problema directamente en y desde el sistema *real* para nosotros, o sea, el de "tierra firme".

Así, contemplando los movimientos de un avión libre o sin motor, desde nuestro suelo o "tierra firme", encontraremos al menos:

1.º Que el viento respecto a "tierra firme" es un *manantial de energía*.

2.º Que la "masa" del avión es un apoyo (un apoyo relativo) *contra el viento*.

3.º Que avión y masas del viento se mueven dentro de un "campo de fuerzas", como lo es el campo gravitatorio de la Tierra, cuya dirección es para nuestro caso o problema en estudio *perpendicular al viento*.

4.º Que las reacciones resultantes de la mutua corriente de aire entre el avión y el "viento" se aproximan mucho más a la vertical (dirección de la gravidad) que a la dirección paralela al viento.

5.º Que cuando un avión, mantenido por su inercia o fuerza viva, camina en trayectoria ascendente contra el viento, toma energía (potencial) de dicho "viento" y en proporción a la intensidad o velocidad del viento.

6.º Que cuando un avión sin motor desciende de cara al viento, y si la inclinación de la trayectoria es mayor que la correspondiente a su uniforme descenso, dicho avión *ahorrará camino y consumo de energía*; y al propio tiempo incrementará su energía cinética, tomándola del "campo gravitatorio", a pesar del inconveniente o efecto aparentemente opuesto por el "viento".

## II

### CONSIDERACIONES, CALCULOS Y UN EJEMPLO

En el libro de H. Marey antes citado (edición de 1890, página 313), se lee lo siguiente: "D'après Audubon, le Pétrél fulmar monte contre le vent, en affrontant la violence de l'ouragan."

Por consiguiente, cuanto venimos exponiendo y demostramos más, corresponde a un hecho real de antiguo observado, cuya circunstancia nos animó siempre a no abandonar nunca estos estudios.

Y decíamos que una "masa" constituye apoyo relativo contra el viento, pues la masa  $M$  de un cuerpo, por efecto de su inercia, se apoya contra cualquier impulso, y si el valor de tal apoyo quisiéramos apreciarlo por la cantidad de energía que una fuerza  $F$  puede comunicar a la masa  $M$  en un tiempo  $t$ , encontraríamos calculando:

$$W = F \times \epsilon;$$

pero

$$\epsilon = \frac{1}{2} j \times t^2; \quad F = M \times j; \quad j = \frac{F}{M};$$

y, por tanto, sustituyendo:

$$W = \frac{1}{2} (F/M) \times F \times t^2 = \left( \frac{1}{2} \times F^2 \times t^2 \right) / M = (F \cdot t)^2 / 2M,$$

o sea, en definitiva, que para valores determinados de  $F$  y de  $t$ , la energía es inversamente proporcional a la masa  $M$ .

Cuando esta masa  $M$  crece mucho o es muy grande, la energía  $W$  es cada vez menor, es muy pequeña.

Bien podremos decir, en consecuencia, que una masa  $M$  es un apoyo relativo contra cualquier fuerza  $F$ , y tanto mayor relativamente, cuanto más grande sea  $M$ .

Toda "masa" también es un integrador o colector de energía cuando se mueve adecuadamente dentro de un "campo de fuerzas"; en el de la gravitación terrestre por ejemplo.

Y como el campo de gravitación terrestre es inseparable del suelo que pisamos, o sea del sistema de coordenadas "tierra firme", todo movimiento de una masa dentro del campo de gravitación terrestre, incorpora o recoge de ese "campo de fuerzas" la misma cantidad de energía para recorridos verticales o descensos de amplitudes iguales. La energía así recogida por una masa en trayectoria descendente, es la misma cuando desciende en aire en calma que cuando sopla viento. Lo único que hará este "viento" es variar las componentes o elementos *horizontales* de las trayectorias en descenso.

El efecto resultante del "viento" será acortar la trayectoria, y ello dará lugar, en general, a una *aminoración* de la energía consumida en recorrer la trayectoria en descenso (medido este descenso según su proyección vertical).

De suerte y en resumen: repetiremos, por su importancia para el problema que estudiamos, que un cuerpo con "masa" es un apoyo relativo; relativo en proporción a la cantidad de "masa" contenida en él, y proporcional, así-

mismo, a su peso, "peso" que une al cuerpo con el "campo gravitatorio terrestre", porque el peso es algo fundamentalmente unido y existente en el "campo de gravitación de la Tierra", es decir, unido a nuestro suelo, al sistema "tierra firme", debiendo entenderse de una manera general y comprenderse, sobre todo, que el avión libre o sin motor *existe* y han de estudiarse sus movimientos en el sistema de coordenadas "tierra firme", o sea desde *nuestro suelo* en suma, pues la masa y la inercia del avión están incluídas o sumergidas en el "campo gravitatorio terrestre"—campo de gravitación que no puede trasladarse al sistema "viento"—, como lo prueba, entre otras consideraciones, la de que mirando desde el sistema "viento", el centro de la Tierra *tendría una traslación*.

No cabe, por tanto, para el justo estudio del problema, admitir el paso al sistema "viento" del avión sin motor, más que en la parte geométrica que la cuestión tenga, o sea para trazar las "formas" de las trayectorias; pero todo cuanto a la parte mecánica del problema se refiere, habrá de calcularse y mirarse desde el sistema "tierra firme"—desde *nuestro suelo*—, pues como venimos repitiendo: el problema *mecánico* del "vuelo del avión libre" está incluído precisamente en el *campo de fuerzas de la gravitación terrestre*, y como este "campo de fuerzas" no es transportable sin deformaciones a ningún sistema de coordenadas en traslación, resultará claro e indiscutible para los problemas mecánicos del "avión libre", cuyos problemas de mecánica están unidos o ligados al "campo de fuerzas de la gravitación terrestre", resultará, decimos: que el viento es un manantial de energía respecto a todo lo que esté de algún modo enlazado o unido al suelo—a nuestro suelo—, como efectivamente lo está el *avión libre* a través del campo gravitatorio terrestre.

De todo lo anterior se desprende (apartando todo prejuicio) que un avión sin motor puede caminar contra un viento de velocidad constante (viento teórico). Y con mayor razón, sin duda, contra el viento real o "arrachado", como nuestra experiencia clásica (expuesta en las páginas 107 a 114 del libro *Aviación y Relatividad*, año 1923) lo presentó y demostró, desde entonces, de modo patente.

Pero vamos a hacer a continuación aún más, desarrollando los cálculos para un caso de dimensiones reales en pesos, velocidades, tiempos, etc., como sigue:

El ejemplo que vamos a explicar, refiriéndonos al dibujo de este artículo, es el de un avión libre (sin motor) que recorre una trayectoria sinuosa, en un plano vertical, para que al subir y bajar dentro del "campo de gravedad", recoja el tanto por ciento más elevado posible de la energía del viento actuante.

La trayectoria supuesta es sencilla, componiéndose de una curva circular de arranque y enlace a la rampa ascendente, seguida de dicha recta ascendente hasta el punto *H*, siendo el punto inferior, *O*, el origen de la trayectoria.

Después de una pequeña curva superior parabólica enlaza el final *H'* de la recta ascendente con el punto *A*, cumbre de la repetida trayectoria.

Y a continuación de este punto *A* hemos adoptado, para lograr la mayor sencillez en los cálculos y estimaciones, una trayectoria que, comenzando el descenso y hasta el punto *X*, la seguirá el avión en régimen de proyectil, o sea sin sustentación en ese recorrido.

Hubiéramos podido elegir y estudiar para la trayectoria en descenso aquella en que la distancia en horizontal alcanzada fuese óptima o, en otro caso, que fuese un mínimo el desplazamiento vertical necesario para la recuperación de la energía existente en el origen *O*, pero se ha preferido otra en pro de una mayor claridad de exposición, logrando al mismo tiempo la máxima convicción para el problema.

Los datos o supuestos admitidos que consideramos dentro de la realidad, son:  $P = 1.000$  kilogramos.

Velocidad del avión en el punto de origen *O* de la trayectoria: Veinte metros por segundo (contados respecto al suelo).

Velocidad del viento que sopla horizontal y de frente: Veinticinco metros por segundo (velocidad respecto al suelo y constante).

Radio de la curva de la trayectoria en su origen *O*, condicionada a que la fuerza centrífuga resultante no exceda del peso *P* del avión.

Finura (coeficiente de "penetración" del avión), con valor medio = 20; es decir, que el coeficiente de  $K_v/K_n$  pueda conservarse alrededor de esa cifra o valor 20 para los tramos principales de nuestra trayectoria o del ascenso.

Supondremos, finalmente, que el piloto del avión es suficientemente hábil y rápido en sus maniobras para lograr esa condición de aproximarse lo más posible en cada oportunidad y punto de la trayectoria a que la "finura o coeficiente de penetración" del avión sin motor en la masa atmosférica se mantenga prácticamente con el valor 20 en el período ascensional, y asimismo variarlo adecuadamente en los períodos del descenso.

El radio de la curva de arranque lo determinaremos calculando como sigue, para cumplir la condición antes citada.

Fuerza centrífuga:

$$F = (M \cdot V^2) / R; \quad M = P / g; \quad F = (V^2 \cdot P) / (R \cdot g);$$

pero si  $F = P$ , resultará:

$$R = (V^2 \cdot P) / (P \cdot g);$$

o sea

$$R = V^2/g$$

(independiente, como vemos, del peso *P*).

Obteniéndose, en definitiva, para nuestro caso y supuestos:

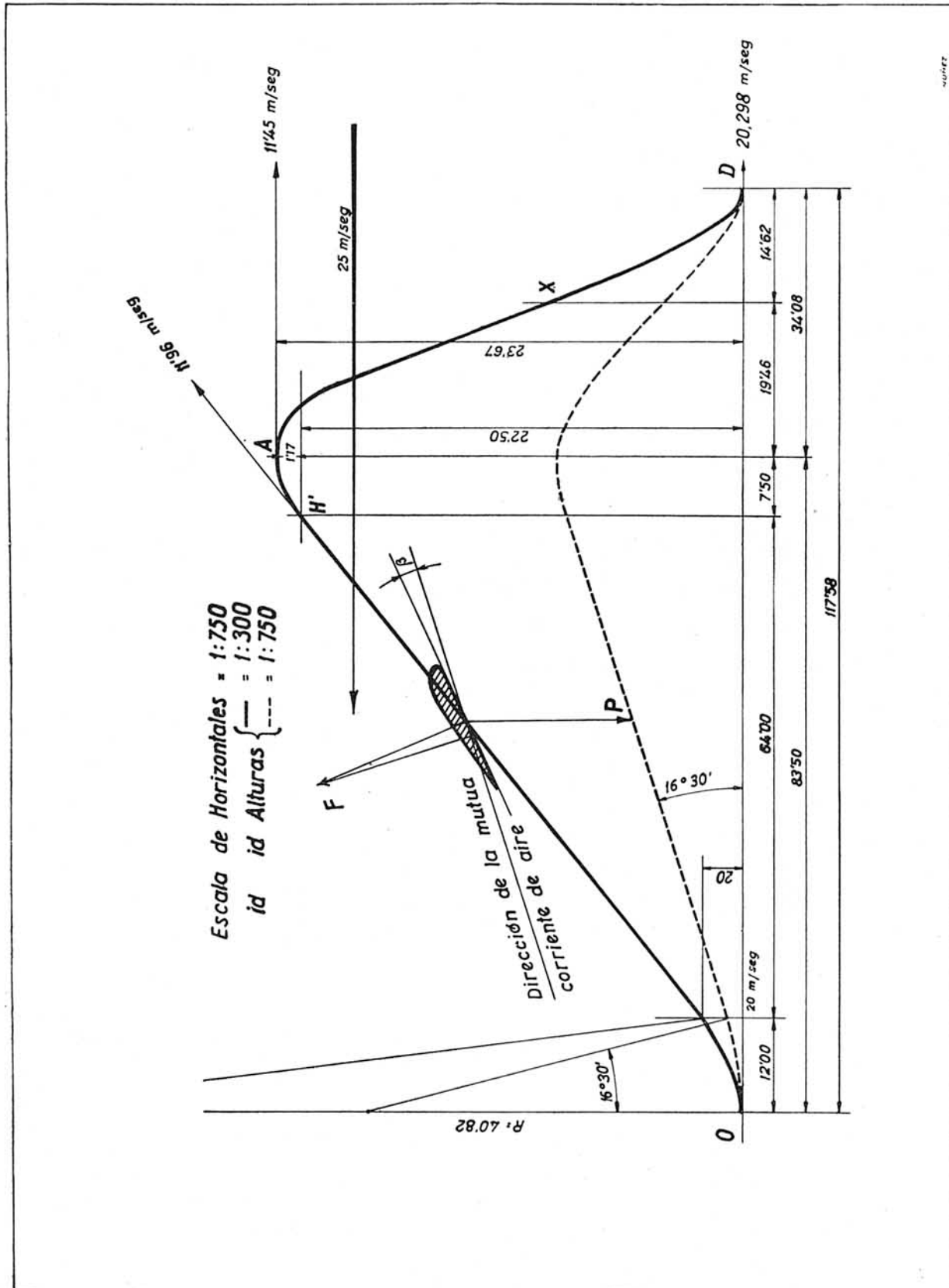
$$R = 400/9,8 = 40,82 \text{ metros.}$$

La energía suplementaria consumida en el trayecto de esa curva, por causa de la fuerza centrífuga, se calculará análogamente como sigue:

$$W = (F/20) \cdot R \cdot c = (F/20) \cdot (V^2 \cdot g) \cdot a^\circ/57,5^\circ,$$

$$W = 50 \cdot 40,82 \cdot (16,5^\circ/57,5^\circ) = 586 \text{ kilográmetros}$$

(designando por *c* el recorrido unitario en curva, y por  $a^\circ$  el ángulo en el centro de la misma, e igualmente  $57,5^\circ$  el ángulo del arco de longitud *R*).



Como antes hemos dicho, al llegar el avión al extremo  $H'$  de su recta ascendente, que está situado a 22 metros y medio de altura sobre el punto de origen  $O$ , deberá maniobrase rápida y adecuadamente por el piloto para anular la sustentación, es decir, para que el avión desde la cumbre  $A$  de la trayectoria camine como mero proyectil, sujeto solamente a su peso y a una resistencia mínima de penetración ( $K'_{\nu}$ ) en la trayectoria; resistencia que, indudablemente menor que cuando hay sustentación, la evaluaremos en 25 kilogramos.

El avión, a partir del punto  $H'$ , ascenderá de ese modo hasta  $A$ , cumbre de la trayectoria, y desde  $A$  descenderá, según línea parabólica, hasta un punto (marcado en el dibujo con la letra  $X$ ), cuya situación explicaremos después.

Las pérdidas de energía en los trozos de trayectoria recorrida por el avión desde el punto de origen  $O$  hasta la cumbre  $A$ , serán las siguientes:

	KILOGRÁMETROS
1. <sup>a</sup> Pérdida <i>suplementaria</i> en la curva de arranque ascendente .....	586
2. <sup>a</sup> Pérdidas en la propia trayectoria, desde $O$ hasta $H$ , evaluadas a razón de $P/20 = 50$ kilogramos por metro lineal y para 79,30 metros que aparecen en el dibujo: $50 \cdot 79,30$ .....	3.965
3. <sup>a</sup> Pérdidas por energía potencial, o sea deduciendo las ganadas por causa del viento de velocidad constante de 25 metros por segundo: $[(22,5/40,18) \cdot 15,18 = 8.542] \cdot 1.000$ .....	8.542
4. <sup>a</sup> Pérdidas en la corta trayectoria parabólica $H'A$ (según más adelante calculamos) ...	225
5. <sup>a</sup> Pérdidas por altura alcanzada desde $H'$ a $A$ (según veremos también más adelante)....	369
SUMA TOTAL.....	13.687

los cuales, deducidos de la energía de origen en el punto  $O$ , que valían:

$$W = \frac{1}{2} \cdot M \times V^2 = \frac{1}{2} \times P/g \times V^2 = 20.400 \text{ kilogramos,}$$

dejarán un saldo de existencia de energía en el punto de la cumbre  $A$  de  $20.400 - 13.687 = 6.713$  kilogramos, correspondiendo a una velocidad que se obtiene de la expresión:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot V^2 = 6.713; \quad V = \sqrt{6.713/51} = \sqrt{131,6} = 11,45.$$

La altura del punto  $A$ , cumbre de la trayectoria, se calcula teniendo en cuenta que en ese breve recorrido,  $H'A$ , la sustentación ha de ir reduciéndose hasta anularse en  $A$ , y, por tanto, tendrá por término medio el valor  $1.000/2 = 500$  kilogramos, con una aceleración retardatriz de  $g/2 = 9,8/2 = 4,9$ .

Como la componente de la velocidad, según la vertical en  $H'$  es  $3,39 = (11,45 \text{ sen } 16,5^\circ)$ , el tiempo de ascensión para anular esta velocidad será:  $t = v/j = 3,39/4,9 =$

$= 0,692$  segundos, y  $t^2 = 0,4788$ ; de manera que el espacio recorrido se deducirá de:

$$e = \frac{1}{2} \cdot j \cdot t^2 = 2,45 \cdot 0,4788 = 1,17 \text{ metros.}$$

Y los 1.170 kilogramos correspondientes a esa ascensión, hasta la cumbre  $A$ , se descompondrán en proporción a las respectivas velocidades: horizontal, 11,45 del avión, y a la del viento, 25,00, correspondiendo perder al avión

$$(1.170/36,45) \cdot 11,45 = 369 \text{ kilogramos.}$$

La proyección horizontal del trayecto  $H'A$  valdrá  $11,96 \times \cos 16,5^\circ = 7,70$ , de manera que la longitud del trozo de trayectoria (descontando pérdidas) resultará de 7,50 metros, con merma de energía por ese recorrido de  $7,50 \cdot 30$  kilogramos = 225 kilogramos.

(Esa velocidad, 11,96, se deduce de la cifra de 7.300 kilogramos de energía existente al llegar el avión al punto  $H'$ .)

A partir de ese punto cumbre  $A$ , hemos dicho que el avión marchará en régimen de *proyectil* a lo largo de su trayectoria, ya en descenso, y supondremos así lo efectúa durante un tiempo de un segundo y siete décimas de segundo (1,7).

Al cabo de ese tiempo (despreciando por el momento las relativamente pequeñas pérdidas a lo largo del tramo de trayectoria realizado en esas condiciones) el espacio vertical descendiendo estará dado por la ecuación:

$$E = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 4,9 \cdot 1,7 \cdot 1,7 = 4,9 \cdot 2,89 = 14,161 \text{ metros,}$$

y el recorrido horizontal, por otra parte, será:

$$E = 11,45 \cdot 1,7 = 19,46 \text{ metros.}$$

Las velocidades del avión al llegar a ese punto  $X$ , situado a 1,7 segundos de la cumbre  $A$ , deberán ser:

$$\begin{aligned} \text{Velocidad vertical} \dots \quad V &= g \cdot t = 9,8 \cdot 1,7 = 16,66 \text{ metros.} \\ \text{Velocidad horizontal} \dots \quad V &= \dots \dots \dots = 11,45 \quad - \end{aligned}$$

Al llegar el avión al punto  $X$  habrá incrementado su energía en lo correspondiente al descenso vertical de 14,161 metros, o sean:

$$14.161 \cdot 1.000 = 14.161 \text{ kilogramos;}$$

pero habrá perdido en el transcurso de trayectoria  $A X$ , de longitud apreciada, según el dibujo, en 24 metros,

$$24,00 \cdot 25 = 600 \text{ kilogramos;}$$

de suerte que la energía existente en el avión al llegar al punto  $X$  será:

$$6.713 + 14.161 - 600 = 20.274 \text{ kilogramos;}$$

y, en consecuencia, el déficit hasta recuperar los 20.400 del origen valdrá:

$$20.400 - 20.274 = 126 \text{ kilogramos.}$$

A seguido del punto  $X$  el avión deberá describir la trayectoria en viraje descendente, que ha de restituírle a la horizontal pasando por el origen  $O$ .

Para mejor comprensión del asunto, supondremos momentáneamente que la mutua corriente de aire que el avión recibe a partir del punto  $X$  es debida a su propia velocidad, y, por tanto, como si caminase en aire en calma.

En tal supuesto, su velocidad horizontal sería:  $11,45 + 25,00 = 36,45$ , y la velocidad vertical  $16,66$  metros, de manera que la inclinación de la trayectoria en ese punto  $X$  inicial del viraje enderezador tendría por tangente trigonométrica el valor  $16,66/36,45 = 0,454$ , correspondiente a un ángulo de  $24,5^\circ$ .

Si quisiéramos dibujar la curva partiendo con esa inclinación del punto  $X$ , y terminado tangente a la horizontal prolongada del origen  $O$ , encontraríamos que su radio era de  $106$  metros, y, por tanto, la fuerza centrífuga en el punto  $X$  valdría:

$$M \cdot V^2/R = 102 \cdot 1.604/106 = 1.543 \text{ kilogramos.}$$

De análoga manera la fuerza centrífuga, al llegar el avión al punto final  $D$ , valdría:

$$M \cdot V^2/R = 102 \cdot 2.025/106 = 1.950 \text{ kilogramos.}$$

Añadiendo el peso del avión,  $1.000$  kilogramos, al valor medio de esas fuerzas centrífugas, obtendremos la cifra  $2.747$ , y aplicando a esta cifra un coeficiente de "penetración" =  $15$  (por corresponder a la parte superior de la polar del perfil), obtendremos una resistencia al avance del avión en ese trayecto final de la trayectoria, de  $1.747/15 = 183$  kilogramos; y como el desarrollo total de esa curva-trayectoria es  $45,16$  metros, el consumo de energía durante el total recorrido del viraje en descenso rectificador, será:

$$183 \cdot 45,16 = 8.263 \text{ kilogramos.}$$

Por otra parte, al recorrer ese trayecto descendente, el avión habrá ganado por desnivel y conversión de la energía potencial lo correspondiente a:

$$23,67 - 14,161 = 9,50 \text{ metros, o sean } 9.500 \text{ kilogramos.}$$

El saldo de energía recuperada valdrá  $9.500 - 8.262 = 1.238$  kilogramos.

Pero el viraje real no se ha realizado en esas condiciones momentáneamente supuestas, sino soplando viento, y al apoyarse el avión en tal viento para cumplir su recorrido (según la trayectoria curva deducida geoméricamente de la de aire en calma para cuando sopla viento de  $25,00$  metros de velocidad constante), se habrá dividido la energía lograda en dos partes: una en proporción a la propia velocidad del avión, que en él quedará, y otra en proporción a la velocidad del viento, que se la llevará dicho "viento". Por tanto, los  $1.238$  kilogramos habrán de repartirse entre la velocidad media energética del avión, que es  $15,00$  metros, y la del viento, que es  $25,00$  metros; resultando  $1.238 / (15 + 25) \cdot 15,00 = 464$  kilogramos para el avión y  $774$  kilogramos que se perderán en el viento.

La existencia de energía en el avión al llegar al punto  $X$ , vimos era  $20.274$  kilogramos, de suerte que habrá incorporado al llegar a la horizontal, pasando por el origen  $O$  (punto  $D$  del dibujo), esos  $464$  kilogramos, y poseerá, en consecuencia,  $20.274 + 464 = 20.738$  kilogramos, es decir, más de los  $20.400$  del origen  $O$ .

Queda, pues, demostrado que un avión puede caminar contra un viento de velocidad uniforme y constante, si su piloto actúa acertadamente según las maniobras antes fijadas. Y claro es que si el viento fuese "arrachado", o sea con intensificación periódica de velocidad, que aprovecharíamos para la trayectoria ascendente; y aminoración de la "racha", que utilizaríamos para el descenso y viraje enderezador, los resultados serían ampliamente más ventajosos y expresivos.

NOTA. — La mayor parte de las operaciones aritméticas se han hecho con la regla de cálculo.

