

Notas sobre Torbellinos Termoconvectivos

Por el Ingeniero Aeronáutico, Comandante **D. LUIS AZCÁRRAGA**

(Continuación.)

b) PARTE TEORICA

Una vez descritas las formas fundamentales que adquieren los torbellinos termoconvectivos, así como sus transformaciones y las leyes que las rigen, deducidas de observaciones experimentales, procede referir algunas de las verificaciones de la teoría que ha conseguido la experiencia de laboratorio.

No pretendemos relatar aquí la teoría, de sobra conocida, sobre los torbellinos termoconvectivos, pero sí recordar aquello que es indispensable para entender el alcance de la comprobación experimental. Esta comprobación se ha referido principalmente a los datos siguientes:

- I.—Valor del criterio de Rayleigh.
- II.—Campo térmico.
- III.—Dimensiones de los torbellinos.
- IV.—Líneas de corriente.

De acuerdo con la teoría matemática aplicada por Rayleigh a los torbellinos celulares, debe reconocerse un régimen preconvectivo estable, que precede al establecimiento de las corrientes termoconvectivas. El criterio que separa los dos regímenes está definido por la expresión

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} < \frac{27 \pi^4 \chi \nu}{4 g h^3}$$

en la cual ρ_1 es la densidad del fluido en la superficie superior; ρ_2 , la de la superficie inferior; ν , la viscosidad cinética; χ , el coeficiente de difusión térmica; h , el espesor de la capa fluida, y g , la aceleración terrestre. Las condiciones en los límites con las cuales se ha deducido esa expresión suponen que las dos capas del fluido son libres y buenas conductoras del calor. Si el primer miembro de la expresión es menor que el segundo, el fluido permanece en equilibrio estable; en el caso contrario las perturbaciones accidentales aumentan, y se originan las corrientes termoconvectivas.

Jeffreys extendió la teoría de Rayleigh al caso que las condiciones en los límites se asemejen a las experimentales, estudiando los casos en que los límites de la lámina fluida sean paredes rígidas, tanto buenas como malas conductoras del calor. Partiendo de las ecuaciones generales del movimiento de fluidos viscosos, de la

ecuación de continuidad, de la del calor y de la ecuación característica, se llega a la ecuación general si-

$$\text{guiente; es decir, si } \frac{\delta}{\delta t} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\beta} \chi \nabla^2 \right) \cdot (\nu \cdot \nabla^2) \cdot (\nabla^2 \Delta T) = -g \alpha \left(\frac{\delta^2 \Delta T}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 \Delta T}{\delta y^2} \right)$$

en la cual α es el coeficiente de expansión térmica, ∇ indica la laplaciana, β es el gradiente vertical térmico, T la temperatura absoluta, y el resto los valores ya conocidos.

Como solución particular del tipo

$$\Delta T = \Delta T_0 \cdot \text{sen } l x \cdot \text{sen } m y \cdot Z$$

con Z función solamente de la altitud z , y en la cual podemos tomar $a^2 = (l^2 + m^2) h^2$, se llega, finalmente, a la ecuación diferencial siguiente:

$$\left[\frac{\delta^2 (\Delta T)}{\delta \left(\frac{z}{h} \right)^2} - a^2 \right]^3 = -\Lambda \cdot a^2 \cdot \Delta T$$

cuya solución es la integral Z , que satisface a la siguiente relación:

$$\frac{d^6 Z}{d \left(\frac{z}{h} \right)^6} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \text{sen } n \frac{z}{h}$$

cuya integración da:

$$Z = B_0 + B_1 \left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{z}{h} \right) + \frac{B_2}{2!} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{z}{h} \right)^2 + \frac{B_3}{3!} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{z}{h} \right)^3 + \frac{B_4}{4!} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{z}{h} \right)^4 + \frac{B_5}{5!} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{z}{h} \right)^5 - \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{n^6} \cdot \text{sen} \left(n \cdot \pi \frac{z}{h} \right)$$

en la cual $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ son constantes arbitrarias, así como A_n , tomando para n números enteros.

Las constantes arbitrarias de la integral general

pueden fijarse, según el problema físico particular, por tres condiciones límites para cada una de las dos superficies de la lámina fluida, tales como:

I. Constancia de temperatura en las superficies. Lo cual representa $Z = 0$, puesto que $\Delta T = 0$.

II. Conservación de forma plana de las superficies. Lo cual representa que se anula la componente vertical de la velocidad, o sea $w = 0$, que equivale a $\nabla^2 \Delta T = 0$, y por ello,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - (l^2 + m^2) Z = 0.$$

Resulta, juntamente con la condición I, que $Z'' = 0$.

III. Que las paredes ejerzan o no frotamiento sobre el fluido.

Si hay rozamiento, equivale a:

$$\frac{\delta w}{\delta z} = 0,$$

o bien:

$$\frac{d^3 Z}{d\left(\frac{z}{h}\right)^3} - a^2 \frac{dZ}{d\left(\frac{z}{h}\right)} = 0.$$

Si no hay rozamiento, equivale a:

$$\frac{\delta^2 w}{\delta z^2} = 0,$$

o bien:

$$\frac{d^4 Z}{d\left(\frac{z}{h}\right)^4} - a^2 \frac{d^2 Z}{d\left(\frac{z}{h}\right)^2} = 0,$$

que, juntamente con la II, resulta $Z^{IV} = 0$.

De las combinaciones posibles entre estas condiciones, particularmente con el distingo que señala la condición III, interesan dos casos de manera especial:

1.º El que sucede en el laboratorio: paredes planas con frotamiento, buenas conductoras del calor.

2.º El de la atmósfera libre, de una capa de aire húmedo, limitada por otras dos de aire seco: paredes libres sin frotamiento.

A estos dos problemas haremos mención en lo que sigue.

b) I.—DETERMINACION DEL CRITERIO DE RAYLEIGH

Se comprende que la primera preocupación, al tratar de verificar la teoría por medios experimentales, consistiera en la comprobación de si en efecto existe el régimen preconvectivo estable y cuáles son, como consecuencia, las condiciones que pueden advertirnos de la formación de los torbellinos termoconvectivos.

Tanto en la teoría de Rayleigh como en la de Jef-

freys, se llega a establecer, como condición necesaria para la organización de las corrientes termoconvectivas en un fluido viscoso, que la diferencia de densidades extremas debe alcanzar un valor suficiente, dado por la expresión

$$\frac{g \sigma \beta h^4}{\chi \nu} > \Lambda,$$

que equivale a la antes dada, si se recuerda que el gradiente térmico vertical es

$$\beta = \frac{T_2 - T_1}{h}$$

y que el coeficiente de expansión térmica es:

$$\alpha = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2 (T_2 - T_1)}$$

Por tanto, el criterio Λ , que separa los dos regímenes y nos marca el principio de los torbellinos, estará dado por

$$\Lambda > \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \frac{g h^3}{\chi \nu}$$

que si suponemos la presión constante y que la variación de volumen específico sólo depende de T, se convierte en

$$\Lambda > \frac{T_2 - T_1}{T_1 + 273} \cdot \frac{g h^3}{\chi \nu}$$

expresión general que nos dice que para cada caso particular Λ es una constante sin dimensiones, aumentando con los valores de T, la viscosidad cinética y la difusión calorífica, y disminuyendo rápidamente cuando aumenta el espesor de la capa fluida.

Los valores numéricos teóricos pueden ser fácilmente determinados para los dos problemas antes mencionados.

Para el primero, el más aproximado a las condiciones de laboratorio, la expresión de Λ , en el caso general, tiene la forma

$$\Lambda = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{\pi^2 + a^2} \right) \left(\frac{n^2 \pi^2}{(n^2 \pi^2 + a^2)^2} \right) \cdot (\pi^2 + a^2)^2}$$

cuyos valores vienen indicados en la tabla siguiente:

a	$\pi/2$	2,6	3,1	3,7	4,0
Λ	2900	1785	1710	1790	1885

cuyo mínimo es $\Lambda = 1710$, que corresponde con $a = 3,1$. Este resultado se refleja en la figura 16.

Si se considera un número n suficientemente gran-

de de circuitos, uno sobre otro, el valor mínimo corresponde con $a = n \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, y es:

$$\Lambda = n^4 \frac{27 \pi^4}{4}$$

Para el problema segundo; es decir, condiciones de la atmósfera libre, el valor característico es:

$$\Lambda = n^4 \frac{27 \pi^4}{4}$$

análogo al del problema primero si n es suficientemente grande, lo cual prueba que la influencia de las superficies límites (o paredes) desaparece cuando aumenta el número de circuitos. En el caso de un solo circuito, en el problema segundo, el mínimo es:

$$\Lambda = \frac{27 \pi^4}{4} = 657'5$$

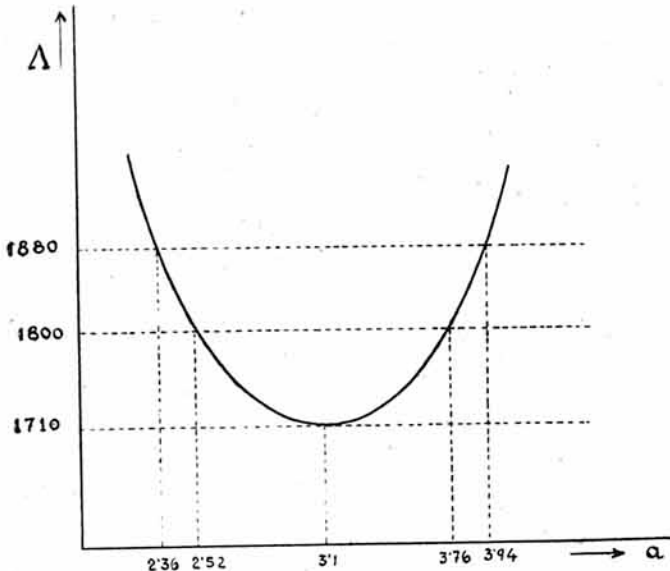


Fig. 16.—Variación del criterio Λ según los valores de α .

Con estos valores teóricos de Λ puede deducirse el valor límite de diferencia de temperaturas en función del espesor de la capa fluida, puesto que se deduce de la expresión general anteriormente dicha:

$$T_2 - T_1 = \frac{\Lambda}{g h^3} \gamma \nu \cdot (T_m + 273)$$

Recordando que

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \gamma = \frac{\lambda}{C_p \rho} \quad \text{con:}$$

$$\mu = \text{Viscosidad} = 0,0001824 - 0,000000493 (23^\circ - T_m)$$

$$\rho = \frac{1'29}{10^3 (1 + 0'0037 T_m)}$$

$$\lambda = \text{Conductibilidad térmica} = 0,000057 (1 + 0,0027 T_m)$$

$$C_p = \text{Calor específico a la presión atmosférica} = 0,24 + 0,0000095 T_m$$

tenemos el cuadro siguiente:

T_m GRADOS C	$(T_2 - T_1)$ CRÍTICO	
	Primer problema	Segundo problema
0°	4°42	11°5
10°	5°1	13°6
20°	6°16	16°1
30°	7°2	18°6
50°	9°5	24°7

que nos muestra la importancia del valor de la temperatura media T_m .

La comprobación experimental ha sido hecha por Ausec y Chandra, independientemente, sobre aire, y por Schmidt y Milverton, sobre agua. La apreciación del observador influye notablemente en estas experiencias, cuyo mecanismo no tiene medios demasiado concretos de apreciación. Por ello es de recomendar que se observe tanto el momento en que aparecen las corrientes convectivas aumentando el calentamiento como el momento en que desaparecen por un enfriamiento progresivo.

Los resultados han comprobado la esencia de la teoría, si bien el espesor máximo de aire en el que ha podido comprobarse el régimen preconvectivo ha sido no mayor de 60 mm., a causa del límite de precisión en la medida de la diferencia de temperaturas, cuyo valor crítico es menor con el aumento de espesor.

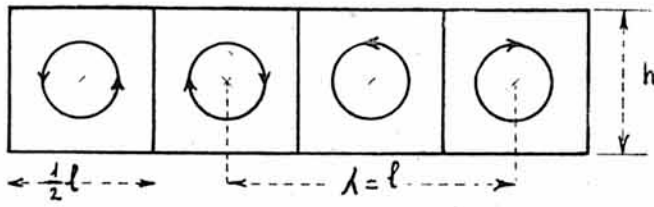
b) II.—DIMENSIONES DE LOS TORBELLINOS

En cuanto a las consecuencias de orden práctico que pueden deducirse de la organización de un régimen de torbellinos convectivos, se comprende que dependerán de sus propiedades geométricas. La característica esencial que las determina es la relación λ/h entre la dimensión transversal y el espesor.

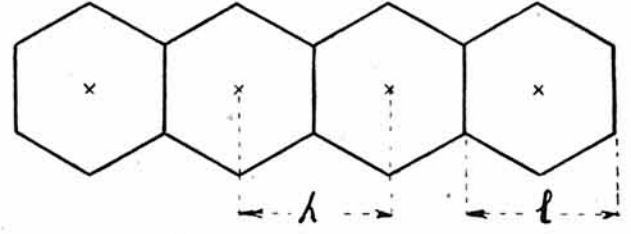
Se define como valor de λ la distancia más corta entre dos centros turbillonarios que tengan el mismo sentido de rotación; diversos casos están expresados en la figura 17, en la cual se diferencian las diversas formas de células.

Los experimentos de laboratorio han tratado de comprobar si normalmente el valor de la reacción característica se ajustaba a los datos teóricos. Los cuales son deducidos de la teoría general, según las condiciones en los límites, por medio del valor de la constante $a^2 = (l^2 + m^2) h^2$ anteriormente definida, que para un solo circuito es $a = 3,1$ para el problema 1.º y $a = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2,22$ para el problema 2.º.

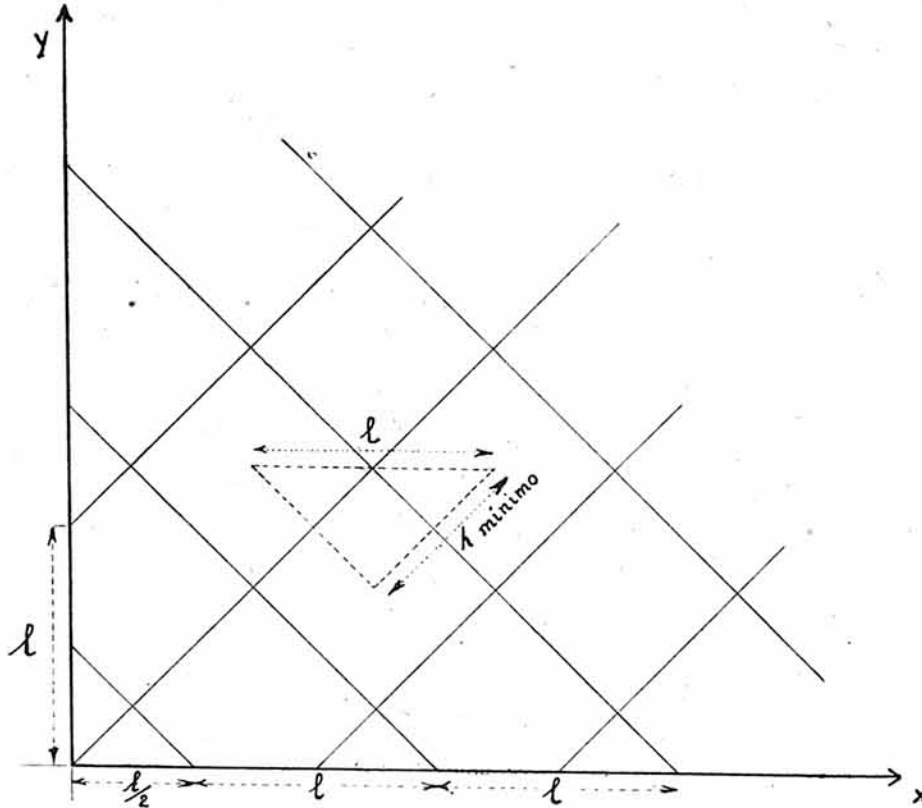
En el caso de torbellinos en bandas, en que puede tomarse $m = 0$, puesto que la sección transversal equivale a una célula de dos dimensiones, resultará $a^2 = l^2 h^2$, y, por tanto, a lo largo del eje X una longitud $\lambda = \frac{2 \pi}{a} h$, es decir, $\lambda/h = 2,03$, o sea células prácticamente cuadradas para las condiciones de laboratorio (problema 1.º), y $\lambda/h = 2,83$ para las condiciones de atmósfera libre (problema 2.º).



Células de dos dimensiones.



Células exagonales.



Células cuadradas con su orientación verdadera $\lambda = l/\sqrt{2}$

Fig. 17.—Dimensiones transversales de diversas formas de torbellinos celulares.

En el caso de células poligonales, considerando las cuadradas es $a^2 = 2 \cdot l^2 \cdot h^2 = 2 \cdot m^2 \cdot h^2$. Y las longitudes a lo largo de los ejes coordenados serán

$$\frac{2 \sqrt{2} \cdot \pi}{a} \cdot h.$$

Pero no representan la distancia más corta entre ejes verticales de torbellinos del mismo sentido de giro; la figura 17 nos muestra que el valor mínimo es el anterior, dividido por $\sqrt{2}$ y, por tanto, $(\frac{\lambda}{h})_{\text{mínimo}} = \frac{2 \pi}{a}$ lo cual nos da los mismos valores que para torbellinos en bandas. Benard, por una parte, y los japoneses con Terada, por otra, han realizado experiencias con líquidos en las que han tratado de comprobar los resultados teóricos. Corresponden, sin embargo, a Avsec las experiencias más concluyentes en el aire. Sus resultados se refieren más principalmente a los torbellinos en

bandas longitudinales y, como es natural, consisten en el estudio del número de rodillos formados en una anchura determinada, lo cual determina el valor de $\frac{\lambda}{h}$.

Este número de rodillos depende de las diversas causas siguientes:

La constitución física de los torbellinos experimentales, es decir, el medio de visualización empleado influye en las dimensiones.

La diferencia de temperaturas extremas; con tal de que no llegue a modificar la forma exterior y la velocidad de traslación mientras sea superior a la crítica para las bandas longitudinales, no influyen apenas en el número de rodillos.

El valor $\frac{\lambda}{h}$ es normalmente superior a 2. Al aumentar de espesor aumenta también la relación.

El número de rodillos en régimen permanente es par. Toda variación de este resultado indica, general-

mente, la aparición de un rodillo complementario, que acaba por desaparecer.

Las experiencias han podido ser bastante concluyentes para los torbellinos en bandas longitudinales, porque su formación es la más estable; pero también se han obtenido datos para los otros tipos. En el caso de bandas transversales, la relación $\frac{\lambda}{h}$ parece alcanzar el valor 2 cuando las bandas están completamente desarrolladas.

Para las células poligonales se ha obtenido el valor medio $\lambda = \frac{N}{N}$ por procedimientos fotográficos.

Para los exágonos, por ejemplo, $N = 2n - 3$, siendo n el número de células, y han resultado valores que oscilan entre 2,10 y 2,70. Sin embargo, no pueden tomarse estos resultados como definitivos, puesto que por la transformación de las células poligonales en bandas vermiculadas aquéllas no llegan a establecerse homogéneamente con dimensiones definitivas.

Mayor interés encierra el hecho de que la relación $\frac{\lambda}{h}$ no es constante en todas las experiencias similares, y como consecuencia procede estudiar las causas que hacen posible esa variación y sus consecuencias en orden a la mayor o menor estabilidad del resultado.

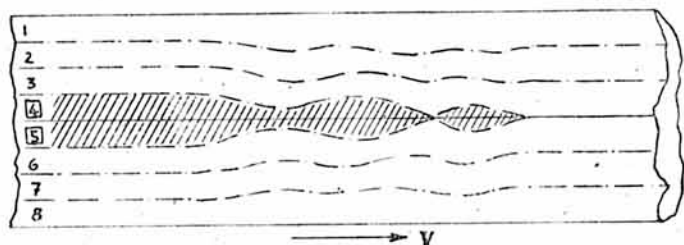


Fig. 18.—Aumento de dos rodillos. Formación en cono, ondulado las paredes intermedias.

Hemos visto que el criterio Λ , en función del número a , está dado por una curva, tal como la de la figura 16, cuyo mínimo corresponde con $a = 3,1$, dando dos valores de a para todos los otros de Λ . Por otra parte, también hemos visto que $\lambda = \frac{2\pi}{a} h$, luego corresponden dos valores de λ para cada valor de Λ , el cual depende del gradiente térmico y del espesor.

Si se toma el valor mínimo $\Lambda_c = 1710$ (para $a = 3,1$) hay un solo valor $\frac{\lambda}{h} = 2,03$. Pero puede ocurrir que el movimiento se retarde por una acción cualquiera y Λ sea algo mayor que el valor crítico; entonces λ y, por tanto, $\frac{\lambda}{h}$ variarán del valor teórico, tal como lo demuestra, por ejemplo, el cuadro adjunto.

Λ real	a_1	$\frac{\lambda_1}{h} = \frac{2\pi}{a_1}$	a_2	$\frac{\lambda_2}{h} = \frac{2\pi}{a_2}$
1'05 · $\Lambda_c = 1800$	2,52	2,5	3,76	1,67
1'10 · $\Lambda_c = 1880$	2,36	2,66	2,95	1,6

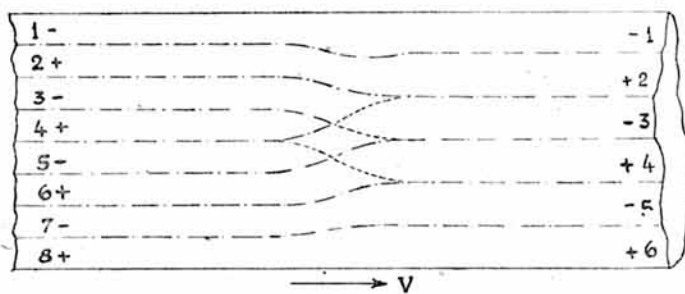


Fig. 19.—Reducción del número de rodillos. Los 3 y 5 por una parte y los 4 y 6 por otra se han refundido, quedando un solo par.

Por tanto, si hay una causa accidental que retrase la iniciación de las corrientes convectivas por encima del valor crítico Λ mínimo, se modificará el número de rodillos resultantes.

Esto es, por otra parte, lo que ha demostrado la experiencia de laboratorio: que las variaciones son debidas a perturbaciones iniciales. Para comprobarlo se han provocado artificialmente perturbaciones regulares iniciales que han ocasionado modificación del número de rodillos, dando lugar a regímenes diferentes más o menos estables. Así, por ejemplo, partiendo de una capa fluida de espesor = 40 mm. y anchura = 200 mm., lo cual dió, en condiciones normales, cuatro rodillos de relación $\frac{\lambda}{h} = 2,5$, fué posible reducir a dos el número de rodillos con $\frac{\lambda}{h} = 5$, y aumentarlo a seis con $\frac{\lambda}{h} = 1,67$, e incluso a ocho con $\frac{\lambda}{h} = 1,25$, aunque este último régimen se manifestó como poco estable, transformándose pronto en el de seis (Experiencias de Avsec).

Las figuras 18, 19 y 20 señalan diversos mecanismos de aumento o reducción del número de rodillos, buscando la mayor estabilidad.

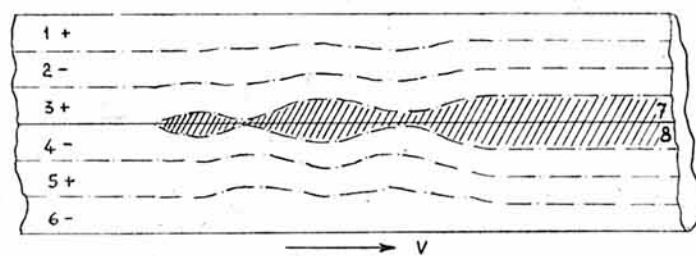


Fig. 20.—Supresión de dos rodillos ondulados.

Es difícil señalar el número de rodillos que corresponden al régimen más estable, es decir, a aquél que sucedería en condiciones normales sin perturbación ninguna, pues pequeñas variaciones, como las anteriormente relatadas, quedan estables una vez introducidas. Otras, en cambio, se transforman rápidamente anulando rodillos o creando otros nuevos. Sólo cabe decir que el régimen más estable será probablemente el más frecuente y que estará, desde luego, dentro de las condiciones antes citadas en relación con el número de rodillos.