# Aerotecnia

## Sobre el cálculo de las hélices

por RICARDO VALLE

Especialista en aeromotores y alumno de la Escuela Superior Aerotécnica

El cálculo teórico de una hélice, como la mayoría de los problemas de Aerodinámica, es imposible de realizar con la seguridad de que las características deducidas sean exactamente las que experimentalmente comprobemos. Sin embargo, existen varios procedimientos de cálculo con los que logramos una aproximación aceptable. Entre éstos es muy conocido el de Drzewiecki, que es muy sencillo, al cual nos vamos a referir hasta el instante en que introduzcamos una función para las profundidades de las palas.

Sea $v_a$ la velocidad del avión paralela al eje de la hélice que gira a razón de $n$ vueltas por segundo, con un radio $R$ y un perfil cuya incidencia óptima sea $i^0$, con un rendimiento aerodinámico $K_z/K_x = \beta$ y un coeficiente de reacción $K$.

Consideremos una sección de la hélice por un cilindro del mismo eje que ella y de radio $r$. La velocidad real $v$ de esta sección, es la resultante de la velocidad de traslación $v_a$ del avión y de la velocidad tangencial $v_t$ y el ángulo de ataque será el $i$ señalado en la figura.

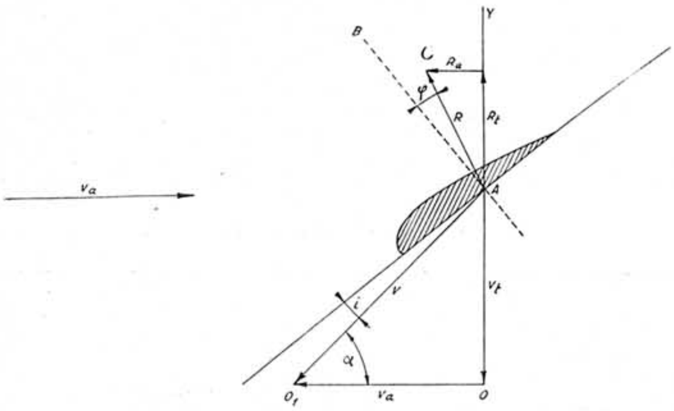


Figura 1.

Si llamamos $p$ a la profundidad de la sección y consideramos una longitud $dr$ en el sentido del radio de la hélice, la reacción del elemento de pala será:

$$R = K p \, dr \, v^2,$$

que podemos descomponer en una fuerza $R_a$ paralela al eje y que efectúa una tracción, y en otra $R_t$ que se opone al giro de la hélice. Los valores de estas componentes son:

$$R_a = R \operatorname{sen} CAY = R \operatorname{sen} (\alpha - \varphi)$$

$$R_t = R \cos CAY = R \cos (\alpha - \varphi)$$

Esta última producirá un momento resistente:

$$R_t \, r = R r \cos (\alpha - \varphi)$$

y absorberá una potencia:

$$dP_m = 2 \pi n R r \cos (\alpha - \varphi).$$

Ahora si se tiene en cuenta que

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{v_t}{v_a} = \frac{2 \pi n r}{v_a}$$

que

$$v^2 = v_a{}^2 + (2 \pi n)^2 r^2$$

y

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{\beta}$$

resulta:

$$R_a = \frac{K}{\sqrt{1 + \beta^2}} \cdot p \sqrt{v_a^2 + (2 \pi n)^2 r^2} \, (2 \pi n r \beta - v_a) \, dr,$$

o bien llamando $\omega$ a la velocidad angular en radiantes por segundo

$$R_a = \frac{K}{\sqrt{1 + \beta^2}} \cdot p \sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2} \, (\omega \beta r - v_a) \, dr$$

y

$$dP_m = \frac{\omega K}{\sqrt{1 + \beta^2}} \cdot p r \sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2} \, (\omega r + v_a \beta) \, dr.$$

Para obtener la tracción total y la potencia absorbida por la hélice habrá que integrar estas expresiones a lo largo de la pala y multiplicar por el número de palas, pero interviene en ellas la profundidad $p$ de la pala, que es función de $r$; pero la expresión matemática de esta función nos es desconocida y sólo sabemos la curva representativa de ella. Esta función tiene por lo pronto que ser positiva para todos los valores de $r$ menores que el radio $R$ de la hélice. Además, la mayoría de las hélices suelen tener un mínimo de profundidad para un valor pequeño de $r$ y un máximo que debe aproximarse al lugar en que el rendimiento mecánico de la hélice es también máximo. Como éste se verifica para

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2},$$

la distancia a que debe ser máxima la función se deduce de

$$\frac{\omega r}{v_a} = \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

y resulta

$$r = \frac{v_a}{\omega} \operatorname{tag}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{v_a}{\omega} \frac{1 + \sqrt{1+\beta^2} - \beta}{1 - \sqrt{1+\beta^2} + \beta}.$$

Estudiemos la función siguiente:

$$p(r) = \lambda \sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2}\,(R - \mu r)$$

para que cumpla la condición de ser positiva para los valores de $r$ comprendidos entre $0$ y $R$ ha de verificarse

$$\lambda > 0 \qquad \mu < 1.$$

Calculemos ahora sus máximos y mínimos:

$$\frac{dp(r)}{dr} = \lambda \left[\frac{\omega^2 r^2}{\sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2}}(R - \mu r) - \mu \sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2}\right] =$$

$$= \lambda \cdot \frac{\omega^2 rR - 2\mu\omega^2 r^2 - \mu v_a^2}{\sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2}}$$

Igualando a cero:

$$r^2 - \frac{R}{2\mu} r + \frac{v_a^2}{2\omega^2} = 0$$

$$r = \frac{R}{4\mu} \pm \sqrt{\frac{R^2}{16\mu^2} - \frac{v_a^2}{2\omega^2}} \qquad [1]$$

Para saber si a estos valores de $r$ corresponden máximos o mínimos de la profundidad de la pala, derivemos nuevamente y tendremos:

$$\frac{d^2 p(r)}{dr^2} = \lambda \frac{(\omega^2 R - 4\mu\omega^2 r)\sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2}}{v_a^2 + \omega^2 r^2} -$$

$$- \lambda \frac{(\omega^2 rR - 2\mu\omega^2 r^2 - \mu v_a^2)\dfrac{\omega^2 r}{\sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2}}}{v_a^2 + \omega^2 r^2}$$

para los valores [1] de $r$ el sustraendo del numerador es nulo y el denominador, así como $\sqrt{v_a^2 + \omega^2 r^2}$, es siempre positivo, por lo que el signo de esta derivada, para los valores dichos de $r$, es el mismo que el que tome

$$R - 4\mu r$$

o sean

$$R - 4\mu\left(\frac{R}{4\mu} \pm \sqrt{\frac{R^2}{16\mu^2} - \frac{v_a^2}{2\omega^2}}\right) =$$

$$= \mp 4\mu \sqrt{\frac{R^2}{16\mu^2} - \frac{v_a^2}{2\omega^2}}$$

Se ve, pues, que el signo $+$ de los valores [1] corresponde al máximo y el — al mínimo.

Para que realmente existan el máximo y mínimo debe verificarse:

$$\frac{R^2}{16\mu^2} \geq \frac{v_a^2}{2\omega^2} \quad \text{o sea} \quad \mu \leq \sqrt{2}\,\frac{\omega R}{4 v_a}$$

y llamando $v_p$ a la velocidad tangencial de la punta de la pala

$$\mu \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{v_p}{v_a} \qquad \text{(A)}$$

Además, si queremos que la máxima anchura de la pala coincida con el lugar de máximo rendimiento de la hélice, tendremos:

$$\frac{R}{4\mu} + \sqrt{\frac{R^2}{16\mu^2} - \frac{v_a^2}{2\omega^2}} = \frac{v_a}{\omega} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

de donde se despeja; después de sencillas transformaciones

$$\mu = \frac{\omega R}{v_a} \frac{\beta}{1 + 3\sqrt{1+\beta^2}} \qquad \text{(B)}$$

para que este valor esté de acuerdo con la desigualdad (A), debe verificarse

$$\frac{\beta}{1+3\sqrt{1+\beta^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

lo cual es evidente, puesto que para cualquier valor de $\beta$ positivo el primer miembro es inferior a $\frac{1}{3}$, valor que alcanza asintóticamente para $\beta \rightarrow \infty$. El gráfico de la figura 2 representa los valores de $\frac{\beta}{1+3\sqrt{1+\beta^2}}$ en función de los valores corrientes de $\beta$ y facilita la determinación de $\mu$.

Si en vez de querer que la máxima anchura corresponda al máximo rendimiento de la hélice, se quiere que esté en un lugar determinado del radio, por ejemplo (como es frecuente) a los $\frac{2}{3}R$, bastará despejar $\mu$ de la ecuación:

$$\frac{R}{4\mu} + \sqrt{\frac{R^2}{16\mu^2} - \frac{v_a^2}{2\omega^2}} = \frac{2R}{3}$$

y resulta

$$\mu = \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\left(\frac{v_a}{\omega R}\right)^2} \qquad \text{(C)}$$

Comparando este valor (C) con la condición de realidad (A), se ve que ésta siempre se verifica para todos los valores de $v_a$ y $v_p$, tales que la relación $\frac{v_p}{v_a}$ tenga un valor no comprendido entre

$$\frac{3}{4\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \frac{9}{4\sqrt{2}},$$

la cual se verifica generalmente.

En cuanto al valor de $\lambda$ diremos: que lo podemos determinar de manera que la anchura máxima tenga un valor dado, o mejor aún, como veremos después, por la condición de que la potencia absorbida o la tracción de la hélice sea una cantidad dada.

Con la expresión de $p$, en función de $r$, será fácil obtener la tracción total $T$ por medio de la integral

$$\text{[I]} \quad T = \int_o^R \frac{K}{\sqrt{1+\beta^2}} \lambda \sqrt{v_a^2+\omega^2 r^2}\,(R-\mu r)\sqrt{v_a^2+\omega^2 r^2} \times$$

$$\times (\omega\beta r - v_a)\,dr =$$

$$= \int_o^R \frac{K\lambda}{\sqrt{1+\beta^2}} (v_a^2+\omega^2 r^2)(R-\mu r)(\omega\beta r - v_a)\,dr =$$

$$= \frac{K\lambda}{\sqrt{1+\beta^2}} R^2 v_a^3 \beta \left[\alpha^3\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{5}\right) - \frac{\alpha^2}{3\beta}(1-\mu) + \alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{3}\right) - (1-\mu)\right].$$

en la que se ha puesto $\alpha = \frac{v_p}{v_a}$, y la potencia absorbida por la hélice será:

$$\text{[II]} \quad P = \int_o^R \frac{\omega K}{\sqrt{1+\beta^2}} \lambda \sqrt{v_a^2+\omega^2 r^2}\,(R-\mu r)\, r \sqrt{v_a^2+\omega^2 r^2} \times$$

$$\times (\omega r + v_a\beta)\,dr =$$

$$= \int_o^R \frac{\omega\lambda K}{\sqrt{1+\beta^2}} (v_a^2+\omega^2 r^2)(R-\mu r)(\omega r + v_a\beta)\, r\,dr =$$

$$= \omega \frac{K\lambda}{\sqrt{1+\beta^2}} R^3 v_a^3 \left[\alpha^3\left(\frac{1}{5}-\frac{\mu}{6}\right) + \alpha^2\beta\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{5}\right) + \right.$$

$$\left. + \alpha\left(\frac{1}{3}-\frac{\mu}{4}\right) + \beta\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{3}\right)\right].$$

El rendimiento mecánico de la hélice se obtiene entonces multiplicando la tracción por la velocidad de tras-

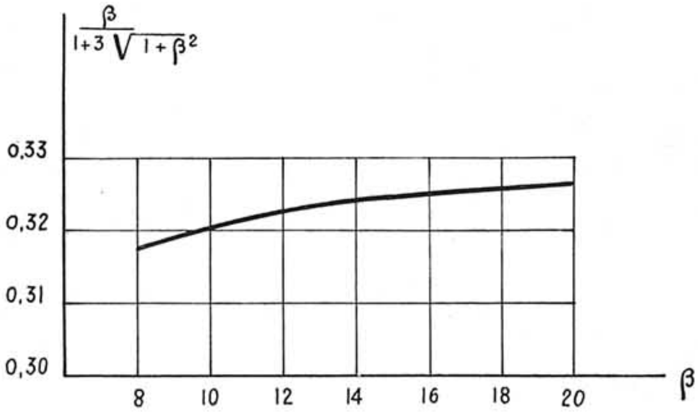


Figura 2.

lación para obtener la potencia útil y dividiéndola por la potencia absorbida

$$\text{[III]} \qquad \rho = \frac{Tv_a}{P}.$$

Para dibujar la curva de profundidades de la pala, puede ser conveniente hacer la transformación siguiente:

$$p = \lambda\sqrt{v_a^2+\omega^2 r^2}\,(R-\mu r) = \lambda v_a R \sqrt{1+\frac{\omega^2 R^2}{v_a^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2}\left(1-\mu\frac{r}{R}\right),$$

y haciendo

$$\delta = \frac{r}{R}$$

$$p = \lambda\, v_a\, R\,(1 - \mu\,\delta)\,.\,\sqrt{1 + \alpha^2\delta^2}$$

Si llamamos

$$P_1 = \lambda\, v_a\, R\,(1 - \mu\delta)$$

y

$$P_2 = \sqrt{1 + \alpha^2\delta^2}$$

$P_1$ estará representada por las ordenadas de la recta $AB$ y $P_2$ por las de la hipérbole $CD$ cuyos semiejes tiene por valor $\frac{1}{\alpha}$ y 1. El producto de las ordenadas dará la curva $C$ de

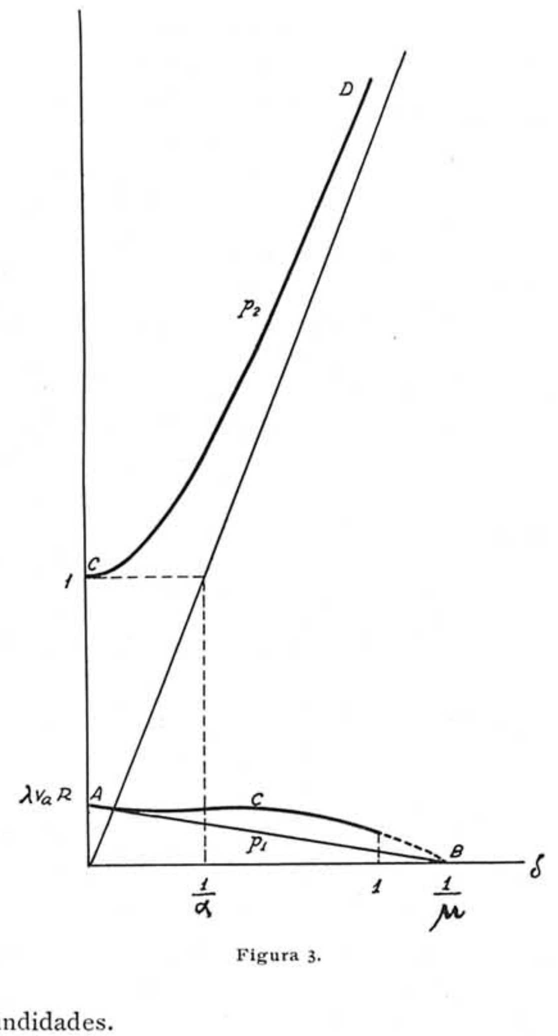


Figura 3.

profundidades.

En resumen:

*a*) Si los datos son la velocidad del avión $v_a$ en metros por segundo, el número de vueltas por minuto $N$ de la hélice, el radio $R$ en metros y el perfil de la pala o sean $\beta$ y $k$ y se quiere saber la tracción, la potencia absorbida y el rendimiento, sólo nos falta para poder realizar las expresiones [I], [II] y [III] los valores de $\alpha$, $\mu$ y $\lambda$.

Se tiene:

$$\alpha = \frac{2\pi\,\frac{N}{60}\,R}{v_a}$$

$$\mu = \alpha\cdot\frac{\beta}{1 + 3\sqrt{1+\beta^2}} \text{ o bien } \mu = \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{3}{2\alpha^2}}$$

según que se quiera que la máxima anchura coincida con el sitio de máximo rendimiento o esté a las 2/3 del radio. Si se ha tomado el primer valor de $\mu$, entonces el valor de $\delta$ en el lugar de máxima anchura es

$$\delta = \frac{1}{4\mu} + \sqrt{\left(\frac{1}{4\mu}\right)^2 - \frac{1}{2\alpha^2}}$$

y si se elige el segundo, entonces $\delta = \frac{2}{3}$, y si fijamos una anchura máxima $p_m$ tendremos $\lambda$ por la fórmula

$$\lambda = \frac{p_m}{v_a\cdot R\,(1 - \mu\delta)\,\sqrt{1 + \alpha^2\,\delta^2}} \qquad [2]$$

si, por ejemplo, se toma $p_m = \frac{R}{6}$ resulta

$$\lambda = \frac{1}{6\,v_a\,(1 - \mu\delta)\sqrt{1 + \alpha^2\,\delta^2}}$$

*b*) Si se conoce $v_a$, $N$ y la potencia del motor $P$; se adopta un perfil y se tienen $\beta$ y $K$, después se fija un radio aproximado $R$ y las fórmulas anteriores dan $\alpha$ y $\mu$; entonces la fórmula [II] en que se conoce $P$ nos dará $\lambda$ y ésta por la fórmula [2] nos da la anchura máxima. Si ésta es aceptable tendremos ya determinada la hélice, pues las fórmulas [I] y [II] dan la tracción y el rendimiento.

Si la anchura máxima fuese demasiado grande o demasiado pequeña se modifica el radio elegido en sentido contrario que la anchura, es decir, se aumenta o disminuye respectivamente. Generalmente con un solo tanteo basta.

Por último, si se quisiera afinar más en el cálculo, se pueden extender las integrales de la tracción y la potencia desde el radio del núcleo de la hélice hasta $R$,