MEMORIAL DE INGENIEROS
DEL EJÉRCITO

AÑO LXXXIII | MADRID = NOVIEMBRE DE 1928. | NÚM. XI

LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

No es mi objeto al tratar de las funciones hiperbólicas aportar novedad matemática alguna, tan sólo quiero recordar las principales propiedades de tales funciones o coordenadas, porque en el estado actual de la ingeniería es grande el interés que presentan por su general empleo. Hace algún tiempo, al cursar las asignaturas de aplicación de la carrera, en ninguna parte hacían su aparición las funciones hiperbólicas y casi su existencia pasaba inadvertida para nosotros; hoy, por el contrario, constituyen una nueva molestia del saber.

Dos ramas de nuestra carrera se sirven con preferencia de este recurso algorítmico, son la Construcción en sus cálculos fundamentales: llamémosles Mecánica aplicada, Cálculo de estructuras o como quiera, y la Electricidad; esta última ciencia, en el cálculo de líneas de muy alta tensión y en la teoría de la corriente telefónica, no sabe desenvolverse si no es anudándose fuertemente a las funciones hiperbólicas.

¿Cuál es el poder de este talismán matemático? Ante todo condensar considerablemente las fórmulas, después facilitar notablemente su manejo, no sólo por la mayor condensación, sino por la existencia de relaciones ya establecidas, que presentan analogía con aquellas de la trigonometría del círculo y, por último, porque los valores de las hiperbólicas, de modo parecido a los de las circulares, han sido catalogados en tablas y expuestos en nomogramas, debidos en gran parte a sabios electricistas, quienes con su labor han logrado conceder a estas funciones la alternativa con otros recursos matemáticos de uso familiar.

Por todo ello, el ingeniero hoy no debe desatender su estudio elemental; no es necesario penetrar profundamente en la materia, pero sí muy conveniente conocerla a la ligera.

El caso típico y frecuente de la aparición de las funciones hiperbólicas radica en la integración de ecuaciones diferenciales de segundo grado de la forma

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - M y = 0$$

o en la de estas mismas con segundo miembro distinto de cero. Ya se sabe que la integral general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con segundo miembro cero, está formada por la suma de dos términos, cada uno de ellos producto de una constante por una solución particular.

Son, en nuestro caso, soluciones particulares $e^{\sqrt{M x}}$ y $e^{-\sqrt{M x}}$, luego la solución general es

$$y = A e^{\sqrt{M x}} + e^{-\sqrt{M x}}.$$

Cuando la ecuación no tiene nulo su segundo término, la solución general es la misma adicionada de una solución particular.

Al determinar las constantes A y B en estas integraciones, sucede con frecuencia que tienen una parte común, y al reducir términos semejantes la ecuación adopta esta forma:

$$a \left[e^{\sqrt{M x}} \pm e^{-\sqrt{M x}} \right] + \text{otros términos.}$$

Pues bien, si el signo es el negativo, se nos ha presentado el seno hiperbólico, y si es el positivo el coseno, son sus expresiones

$$S h x = \frac{e^{\sqrt{M x}} - e^{-\sqrt{M x}}}{2} \quad \text{y} \quad C h x = \frac{e^{\sqrt{M x}} + e^{-\sqrt{M x}}}{2}.$$

Vamos a presentar dos ejemplos prácticos muy típicos del proceso de cálculo explicado; conservaremos al exponerlos las notaciones usadas por los autores de donde los tomamos.

Ejemplo primero: Del «Cálculo de estructuras», de D. J. M. de Zafra. Este sabio autor nos da a conocer el problema de flexión de una pieza empotrada en un extremo y sometida en el otro a un esfuerzo oblicuo cuya componente axial tiende a extender la pieza (fig. 1).

La ecuación diferencial base de la solución del problema es

$$E\,I\,\frac{d^2 z}{d\,x^2} = -M = -P\,(f-z) + F\,(l-x);$$

su integración nos permitirá determinar z y por lo tanto la flecha, el conocimiento de M ya entonces no ofrece duda.

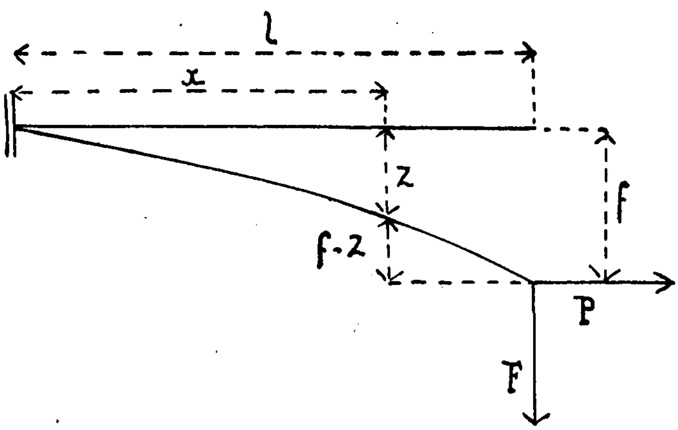

Fig. 1.

El autor acude en algunos de los problemas que estudia en la obra citada al empleo de la unidad elástica

$$u = \sqrt{\frac{E\,I}{P}},$$

representativa de la rigidez de la pieza ante el esfuerzo P; introduciendo esta notación en la ecuación anterior queda

$$\frac{d^2 z}{d\,x^2} - \frac{1}{u^2}\,z = -\left[\frac{f}{u^2} - \frac{F}{P\,u^2}\,(l-x)\right].$$

Busquemos una solución particular de esta ecuación; sea:

$$\alpha + \beta x = z'$$

(téngase en cuenta que la ecuación diferencial es de primer grado con relación a x en su segundo miembro),

$$\frac{d^2 z'}{d x^2} = 0, \quad \text{luego} \quad 0 - \frac{1}{u^2}\left[\alpha + \beta x\right] = -\left[\frac{f}{u^2} - \frac{F}{P u^2}(l - x)\right];$$

esto da $\alpha = f - \frac{F l}{P}$ y $\beta = \frac{F}{P}$, luego la solución particular es

$$z' = f - \frac{F}{P}(l - x)$$

y la solución general tendrá la forma

$$z = A e^{\frac{x}{u}} + B e^{-\frac{x}{u}} + f - \frac{F}{P}(l - x).$$

Para determinar las constantes A y B basta expresar la nulidad de desplazamiento lineal y angular de la base de la pieza, lo hacemos en las ecuaciones que siguen:

$$z_0 = o = A + B + f - \frac{F l}{P} \qquad A + B = \frac{F l}{P} - f$$

$$\left(\frac{d z}{d x}\right)_0 = o = \frac{A - B}{u} + \frac{F}{P} \qquad A - B = -\frac{F u}{P},$$

de donde:

$$z = \frac{1}{2}\left[\frac{F l}{P} - \frac{F u}{P} - f\right] e^{\frac{x}{u}} + \frac{1}{2}\left[\frac{F l}{P} + \frac{F u}{P} - f\right] e^{-\frac{x}{u}} + f - \frac{F}{P}(l - x),$$

y haciendo intervenir las expresiones $S h$ y $C h$ antes citadas, z toma la forma

$$z = \frac{F}{P}\left[l\, C h \frac{x}{u} - u\, S h \frac{x}{u} - l + x\right] + f\left[1 - C h \frac{x}{u}\right];$$

al valor de la flecha se llega con $l = x$

$$f = \frac{F}{P}\left[l\,Ch\,\frac{l}{u} - u\,Sh\,\frac{l}{u}\right] + f - f\,Ch\,\frac{l}{u},$$

y aquí vamos a presentar una nueva función hiperbólica $Th = \frac{Sh}{Ch}$, que utilizada en la expresión de la flecha nos da (1):

$$f = \frac{F}{P}\left[l - u\,Th\,\frac{l}{u}\right];$$

la elástica toma la forma

$$z = \frac{F}{P}\,u\left[\frac{x}{u} - Sh\,\frac{x}{u} + Th\,\frac{l}{u}\left(Ch\,\frac{x}{u} - 1\right)\right]$$

y la expresión del momento es:

$$M = F\,u\left[Sh\,\frac{x}{u} - Th\,\frac{l}{u}\,Ch\,\frac{x}{u}\right]$$

y en la base

$$M_0 = -F\sqrt{\frac{EI}{P}}\,Th\,\frac{l}{u}.$$

Vemos en este ejemplo cómo se condensan las fórmulas con el empleo de las funciones hiperbólicas. Aunque no interesa directamente en el asunto que tratamos, vale la pena de llamar la atención sobre este hecho curioso: si en el problema propuesto la componente axial hubiese tendido a comprimir la pieza, las fórmulas tendrían una estructura análoga a la de las precedentes y se diferenciarían casi tan sólo de ellas en que las funciones que contienen son circulares en lugar de ser hiperbólicas.

Véase a continuación:

Componente de extensión.	Componente de compresión.
Flecha	
$f = \frac{F}{P}\,u\left(\frac{l}{u} - Th\,\frac{l}{u}\right)$	$f = \frac{F}{P}\,u\left(\frac{l}{u} - \text{tang.}\,\frac{l}{u}\right)$

(1) No hemos seguido al pie de la letra la exposición del problema, según Zafra, hemos eludido el uso de las coordenadas unitarias, muy práctico, pero que fácilmente el lector puede no estar habituado a ellas.

Componente de extensión.	Componente de compresión.

Elástica.

$$z = \frac{F}{P}\, u \left[\frac{x}{u} - S h \frac{x}{u} + T h \frac{l}{u} \left(C h \frac{x}{u} - 1 \right) \right] \qquad z = \frac{F}{P} u \left[- \frac{x}{u} + \text{sen.} \frac{x}{u} + \text{tang.} \frac{l}{u} \cdot \left(1 - \cos. \frac{x}{u} \right) \right]$$

Momento.

$$M = F u \left[S h \frac{x}{u} - T h \frac{l}{u}\, C h \frac{x}{u} \right] \qquad M = F u \left[\text{sen.} \frac{x}{u} - \text{tag.} \frac{l}{u} \cos. \frac{x}{u} \right]$$

$$M_0 = - F u\, T h \frac{l}{u} \qquad M_0 = - F u \text{ tang. } \frac{l}{u}$$

Ejemplo segundo: De la «Corriente telefónica», de D. Ignacio María Echaide.—Refiere este ejemplo a la integración, a través de la cual llegamos a establecer las ecuaciones fundamentales que expresan las leyes porque se rige la corriente eléctrica en las líneas dotadas de resistencia, autoinducción, capacidad y pérdidas. Por cierto que al final de la obra de donde extractamos este segundo ejemplo su autor hace una reseña concisa, pero dotada de la misma claridad que preside en todo el texto, referente a funciones hiperbólicas.

No podemos desarrollar por completo el cálculo que nos ocupa por su excesiva extensión y sólo de él presentaremos un resumen encauzado a nuestro objeto.

Tomando un elemento infinitesimal de línea y expresando las relaciones sencillas que en él ligan a los infinitesimales de primer orden $d\,E$ y $d\,I$ con las constantes R resistencia, L autoinducción, C capacidad y G perditancia (todas unitarias) y ω pulsación; se plantean estas ecuaciones:

$$- \frac{d\,E}{d\,l} = (R + j\,\omega\,L)\,I,$$

$$- \frac{d\,I}{d\,l} = (G + j\,\omega\,C)\,E,$$

en ellas l indica la longitud de línea, $d\,E$ y $d\,I$ son la variación del voltaje y de la intensidad de uno a otro extremo del elemento infinitamente pequeño $d\,l$.

Cada una de estas ecuaciones contiene tres variables, una diferenciación eliminará a I de la primera y a E de la segunda.

$$\frac{d^2 E}{d l^2} = (R + j \omega L)(G + j \omega C) E;$$

$$\frac{d^2 I}{d l^2} = (R + j \omega L)(G + j \omega C) I;$$

estas ecuaciones ya presentan la forman que a nosotros interesa; sus integrales generales son:

$$E = A e^{\gamma l} + B e^{-\gamma l}$$

$$I = A' e^{\gamma l} + B' e^{-\gamma l} \quad \text{con} \quad \gamma = \sqrt{(R + j \omega L)(G + j \omega C)}$$

Omitimos, por abreviar, el cálculo de las constantes fácil, pero algo laborioso de seguir, son sus valores

$$A = \frac{1}{2}(E_1 - I_1 Z_0) \qquad A' = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{Z_0} - I_1\right)$$

$$B = \frac{1}{2}(E_1 + I_1 Z_0) \qquad B' = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{Z_0} + I_1\right)$$

en los que E_1 e I_1 son el voltaje e intensidad en el punto de origen de la corriente y Z_0, vale

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j \omega L}{G + j \omega C}}$$

constante de la línea sumamente interesante denominada *impedancia característica.*

Llevando los valores precedentes a las ecuaciones de E e I sacando factores comunes y utilizando las funciones hiperbólicas, llegamos a las ecuaciones conocidísimas en electridad;

$$E = E_1 \, Ch\, \Theta - I_1 Z_0 \, Sh\, \Theta$$

$$I = I_1 \, Ch\, \Theta - \frac{E_1}{Z_0} Sh\, \Theta \quad \text{»} \quad \Theta = \gamma l.$$

Son estas fórmulas el fundamento del estudio de la corriente telefónica, y puestas como sigue:

$$E = E_2 \, Ch \, \Theta + I_2 \, Z_0 \, Sh \, \Theta$$

$$I = I_2 \, Ch \, \Theta + \frac{E_2}{Z_0} \, Sh \, \Theta,$$

en que E_2 e I_2 se refieren al punto de llegada de la corriente, es como constituyen la base para el cálculo de líneas de muy alta tensión.

Debemos hacer ahora una importante observación; en el primer ejemplo hemos referido las funciones hiperbólicas a las cantidades reales $\frac{l}{u}$ y $\frac{x}{u}$, más en el segundo los Sh y Ch se referían a $\Theta = \gamma \, l$, pero γ es una cantidad, en general, de forma binomia imaginaria; la electricidad habituada al uso de las imaginarias, no quiere desprenderse de ellas al apoderarse de las funciones hiperbólicas, y amalgama a unas con otras creando una nueva aparente complicación.

Nos vemos, pues, precisados: primero, a concretar qué es el ángulo hiperbólico real, y después, a desentrañar el sentido o significación de las funciones hiperbólicas referidas a cantidades imaginarias.

Los ángulos hiperbólicos reales y sus líneas.

Hasta aquí nos hemos limitado a decir, sin justificación alguna, que las expresiones de la forma

$$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{e^{\alpha} + e^{+\alpha}}{2}$$

son el seno y el coseno de la cantidad α, que por el hecho de atribuirle líneas hiperbólicas, implícitamente la miramos como una magnitud angular hiperbólica.

El espíritu menos curioso siente ya impaciencia por conocer la afinidad de estas expresiones con las coordenadas de la hipérbola. Y al decir *la hipérbola,* lo hacemos anticipándonos a la afirmación de que tan sólo a una hipérbola, que es la equilátera, se refieren las funciones que nos ocupan.

Las coordenadas de la hipérbola son (fig. 3):

$$Sh = \frac{A\,B}{O\,M} \qquad Ch = \frac{O\,B}{O\,M} \qquad Th = \frac{A\,B}{O\,B},$$

la secante, la cosecante y la cotangente son las inversas del Ch, Sh y Th, respectivamente; estas líneas inversas son de poco uso.

Vamos a demostrar la afirmación gratuitamente antes expuesta de que

$$Sh = \frac{A\,B}{O\,M} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad \text{y} \quad Ch = \frac{O\,B}{O\,M} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

Pero ante todo es preciso fijar el concepto de ángulo hiperbólico. Comencemos por llamar la atención acerca de este hecho (fig. 2). El valor de un ángulo circular es la relación entre el arco y el radio; si conside-

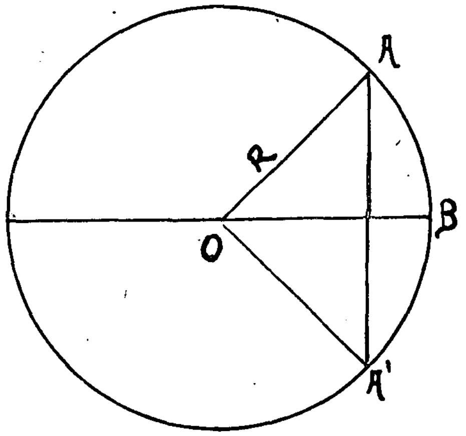

Fig. 2.

ramos (fig. 2) el arco $A\,B$ y el doble sector circular $A\;O\;A\;B$, notemos que el área de esa figura vale $A\,B \times R$, y si tomamos como unidad de áreas el cuadrado R^2, la medida de $A\,B$ con R dará un número que tanto expresará el valor del ángulo en radiantes como el del área en R^2.

Podemos, pues, mirar a las líneas trigonométricas refiriéndose tanto a los ángulos como a sus dobles sectores correspondientes; en tiempos remotos es en esta última forma como se consideraba a esas líneas.

Pues bien: al ángulo hiperbólico lo vamos a tener en cuenta, no como una magnitud precisamente angular, sino más bien como magnitud expresada por el área del doble sector hiperbólico determinado por el arco correspondiente. Si significamos el $Sh\,\alpha = \frac{A\,B}{O\,M}$ (fig. 3), α es el área del doble sector rayado, como expresión o medida de un ángulo hiperbólico real, cuyas coordenadas las determina el punto A. Análogamente a lo que ocurre en el círculo la comparación se hace con el cuadrado del semieje real, expresión del radiante hiperbólico.

Entremos ahora en la demostración que nos interesa (fig. 4). Sea la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

$$\alpha = 2\,A\,O\,M = 2\,\varepsilon \qquad \text{área } A\,O\,M = \varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi^1} r^2\,d\,\varphi$$

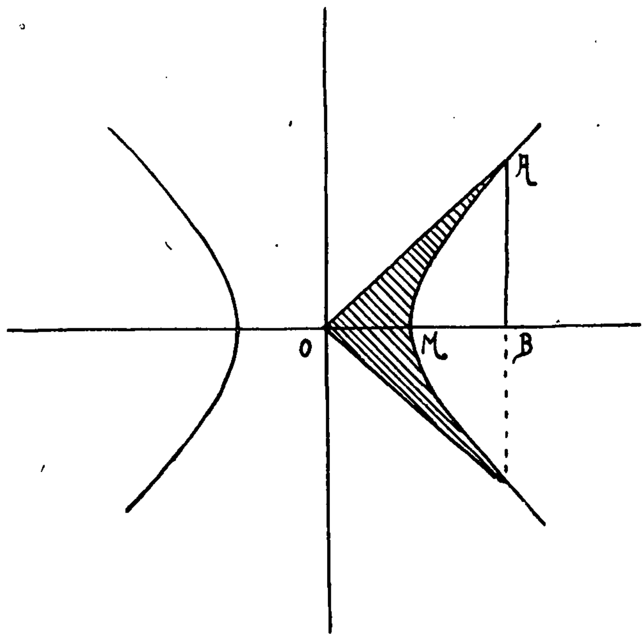

Fig. 3.

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos.\varphi \\ y = r\,\text{sen.}\,\varphi \end{array}\right\} \cdots\cdots \left\{\begin{array}{l} x^2 = r^2\cos.^2\varphi \\ y^2 = r^2\,\text{sen.}^2\,\varphi \end{array}\right\} \; x^2 - y^2 = r^2\,(\cos.^2\varphi - \text{sen.}^2\,\varphi)$$

$$r^2 = \frac{x^2 - y^2}{\cos.^2\varphi - \text{sen.}^2\,\varphi} = \frac{x^2 - y^2}{\cos.\,2\,\varphi}$$

valor que llevado a ξ da

$$\xi = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{d\,\varphi}{\cos.\,2\,\varphi} = \frac{1}{4}\,l\,e\,\frac{1 + \text{tang.}\,\varphi^1{}_1}{1 - \text{tang.}\,\varphi^1{}_1}$$

$$\frac{1 + \text{tang. } \varphi_1}{1 - \text{tang. } \varphi_1} = e^{4\varepsilon} \quad » \quad 1 + \text{tang. } \varphi_1 = e^{4\varepsilon} - \text{tang. } \varphi_1 = e^{4\varepsilon}$$

$$\text{tang. } \varphi_1 = \frac{e^{4\varepsilon} - 1}{e^{4\varepsilon} + 1}$$

dividiendo numerador y denominador por $e^{2\varepsilon}$ queda:

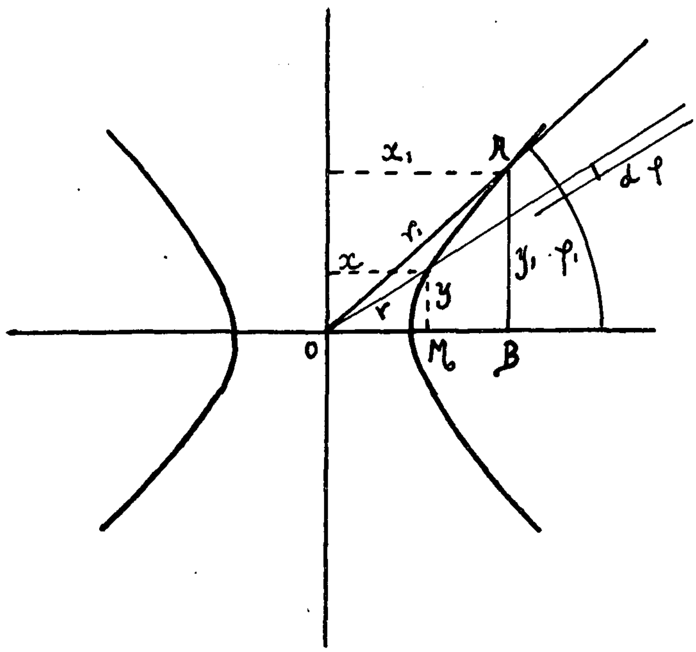

Fig. 4.

$$\text{tang. } \varphi_1 = \frac{e^{2\varepsilon} - e^{-2\varepsilon}}{e^{2\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}$$

$$\text{sen. } \varphi_1 = \frac{e^{2\varepsilon} - e^{-2\varepsilon}}{\sqrt{2\, e^{4\varepsilon} + 2\, e^{-4\varepsilon}}}$$

$$\cos. \varphi_1 = \frac{e^{2\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}{\sqrt{2\, e^{4\varepsilon} + 2\, e^{-4\varepsilon}}}$$

llevemos estos valores del seno y coseno a la expresión

$$r_1^2 = \frac{1}{\text{ces.}^2\,\varphi_1 - \text{sen.}^2\,\varphi_1},$$

y la convertirán en

$$r_1^2 = \frac{e^{4\varepsilon} + e^{-4\varepsilon}}{2}.$$

La hipérbola en que trabajamos tiene su semeje real igual a la unidad, o dicho de otro modo, adoptamos este semeje por unidad de longitudes, y su cuadrado como unidad de áreas; esto sentado, podemos escribir:

$$Sh\,\alpha = x_1 = r_1\,\text{sen.}\,\varphi_1 = \frac{\sqrt{e^{4\varepsilon} + e^{-4\varepsilon}}}{\sqrt{2}} \times \frac{e^{2\varepsilon} - e^{-2\varepsilon}}{\sqrt{2}\,\sqrt{e^{4\varepsilon} + e^{-4\varepsilon}}} = $$
$$= \frac{e^{2\varepsilon} - e^{-2\varepsilon}}{2}$$

$$Ch\,\alpha = y_1 = r_1\,\cos.\,\varphi_1 = \frac{\sqrt{e^{4\varepsilon} + e^{-4\varepsilon}}}{\sqrt{2}} \times \frac{e^{2\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}{\sqrt{2}\,\sqrt{e^{4\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}} = $$
$$= \frac{e^{2\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}{2}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Definidas estas dos líneas como coordenadas, o comprobados sus valores analíticos, nada nos resta decir de las otras funciones hiperbólicas del ángulo real. Exponemos a continuación sus valores más interesantes, fáciles de deducir.

$Sh\,o = 0$	$Ch\,o = 1$	$Th\,o = 0$
$Sh\,\infty = \infty$	$Ch\,\infty = \infty$	$Th\,\infty = 1$
$Sh\,(-\infty) = -\infty$	$Ch\,(-\infty) = \infty$	$Th\,(-\infty) = -1$
Cotang. $h\,o = \infty$	Sec. $h\,o = 1$	Cosec. $h\,o = \infty$
Cotang. $h\,\infty = 1$	Sec. $h\,\infty = 0$	Cosec. $h\,\infty = 0$
Cotang. $h\,(-\infty) = -1$	Sec. $h\,(-\infty) = 0$	Cosec. $h\,(-\infty) = 0$

A partir de los ángulos superiores a 7,5 radiantes, el Sh y el Ch tienen valores casi iguales y la tangente, por lo tanto, se mantiene con valores prácticamente confundibles con la unidad. Por encima del límite fijado las expresiones del Sh y Ch pueden considerarse reducidas a $\frac{1}{2}\,e^{\alpha}$.

Las funciones hiperbólicas de ángulos imaginarios.

Hemos hecho patente en el segundo ejemplo el empleo generalizado de las funciones hiperbólicas referidas a cantidades imaginarias, éstas pueden ser monomias o imaginarias puras de la forma $j\,\alpha$ y binomias o imaginarias mixtas del tipo $\beta + j\,\alpha$.

Mas hay que advertir que el uso de este género de hiperbólicas ha inducido a envidia a las funciones circulares, las que también hacen su aparición refiriéndose a ángulos o cantidades imaginarias. Así, en las transformaciones de funciones hiperbólicas y en muchas de las demostraciones de sus propiedades barájanse con las circulares, atribuyéndose unas y otras bien ángulos reales o bien imaginarios.

¿Qué significación pueden tener los ángulos imaginarios? En realidad, como tales ángulos ninguna; el nombre de ángulos les alcanza por extensión. Una función, sea circular, sea hiperbólica, al referirse a una imaginaria, es la *expresión analítica* que le corresponde, sustituyendo en ella la variable *ángulo* por una *cantidad imaginaria;* para nada hemos de ver en las aplicaciones que hacemos de estas funciones ni significación angular, en las que llamamos ángulos imaginarios, ni sentido de coordenadas en las líneas que a ellos se refieren, se trata sólo de expresiones algébricas condensadas.

Sabido es que la expresión del seno circular desarrollado en serie es esta:

$$\text{sen.}\,\alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3\,!} + \frac{\alpha^5}{5\,!},$$

la expresión de seno $j\,\alpha$ es el resultado de reemplazar en la serie anterior α por $j\,\alpha$, así:

$$\text{sen.}\,j\,\alpha = \frac{j\,\alpha}{1} + \frac{j\,\alpha^3}{3\,!} + \frac{j\,\alpha^5}{5\,!}.$$

Del mismo modo con

$$\cos.\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2\,!} + \frac{\alpha^4}{4\,!} - \frac{\alpha^6}{6\,!}$$

llegamos a $\cos.\,j\,\alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2\,!} + \frac{\alpha^4}{4\,!} + \frac{\alpha^6}{6\,!}$ y nótese que seno $j\,\alpha$ es una imaginaria pura, al paso que coseno $j\,\alpha$ es una cantidad real.

Para dar sentido al Shj y $Chj\alpha$, basta en $\dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ y en $\dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$ hacer el cambio correspondiente y tendremos:

$$Shj\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2} \quad \text{y} \quad Chj\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2},$$

pero mejor es presentar los desarrollos en serie de éstas expresiones (1):

$$Sh\alpha = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^3}{3\,!} + \frac{\alpha^5}{5\,!} \qquad Ch\alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2\,!} + \frac{\alpha^4}{4\,!}$$

$$Shj\alpha = \frac{j\alpha}{1} - \frac{j\alpha^3}{3\,!} + \frac{j\alpha^5}{5\,!} \text{ (imaginaria pura)}$$

$$Chj\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2\,!} + \frac{\alpha^4}{4\,!} - \frac{\alpha^6}{6\,!} \text{ (real)}$$

$$Th\alpha = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{15}\alpha^5$$

$$Thj\sigma = \frac{j\alpha}{1} + \frac{j\alpha^3}{3} + \frac{2}{15}j\alpha^5 \text{ (imaginaria pura).}$$

La comparación de todos estos desarrollos nos permite establecer unas interesantísimas relaciones base de casi todas las demostraciones de las propiedades de las hiperbólicas imaginarias; son, a saber:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos.\,\alpha = Ch\,j\,\alpha & j\,\text{sen.}\,j\,\alpha = -\,Sh\,\alpha \\ \cos.\,j\,\alpha = Ch\,\alpha & j\,\text{sen.}\,\alpha = Sh\,j\,\alpha \end{array}\right\}(2) \qquad [1]$$

En todo lo que precede nos hemos referido a las cantidades imaginarias puras asimiladas a ángulos circulares o hiperbólicos, réstanos ahora expresar el sentido de las imaginarias binomias como ángulos y el de sus funciones.

(1) Algunos autores eluden el empleo de las tablas de funciones hiperbólicas haciendo uso de sus desarrollos en serie; ejemplos son el cálculo de líneas de alta tensión, según Blondel y Leroy, y el problema extractado del *Cálculo de estructuras*, de Zafra, al aparecer resuelto en la *Teoría de estructuras*, de Morley, en donde se utiliza el desarrollo en serie la Th.

(2) Pueden también deducirse estas propiedades haciendo aplicación de Euler:

$$e^{j\alpha} = \cos.\,\alpha + j\,\text{sen.}\,\alpha \qquad e^{-j\alpha} = \cos.\,\alpha - j\,\text{sen.}\,\alpha.$$

En principio se manifiesta con toda lógica que la sustitución que hemos hecho de una variable real por una imaginaria pura en las expresiones a que aludimos, puede igualmente extenderse al caso de que la imaginaria sea mixta. Mas la facilidad con que se obtienen los desarrollos de las funciones hiperbólicas referidas a ángulos, suma o diferencia de otros dos, hace que nos habituemos a considerar a las expresiones del tipo $Sh\,(\beta \mp j\alpha)$, $Ch\,(\beta \pm j\alpha)$, etc., como funciones de sumas o diferencias.

Por ejemplo, al desarrollo de $Ch\,(\beta + j\alpha)$ llegamos así:

$$\cos.\,(\beta + \alpha) = \cos.\,\beta \cos.\,\alpha - \operatorname{sen.}\beta \operatorname{sen.}\alpha$$
$$\cos.\,(j\beta + j\alpha) = Ch\,(\beta + \alpha) = Ch\,\beta\, Ch\,\alpha + Sh\,\beta\, Sh\,\alpha$$
$$Ch\,(\beta + j\alpha) = Ch\,\beta \cos.\,\alpha + j\, Sh\,\beta \operatorname{sen.}\alpha$$

(Basta hacer aplicación sistemática de las expresiones [1]).

En esta expresión final todas las funciones se refieren a ángulos reales; aun careciendo, pues, de tablas de funciones hiperbólicas, con solo el uso de tablas de logaritmos decimales y de tablas trigonométricas, podríamos obtener los valores de tales expresiones.

Vamos a exponer a continuación una serie de relaciones interesantes; procuraremos dar la demostración de una de cada clase o forma, omitiéndola para aquellas que hayan sido tratadas de modo directo en el transcurso de este artículo.

Relaciones entre las funciones hiperbólicas de ángulo real.

Son de mucho empleo estas. $Sh\,\alpha + Ch\,\alpha = e^{\alpha}$ demuéstrase así:

$$Sh\,\alpha + Ch\,\alpha = \frac{e^{\alpha} - \alpha^{-\alpha} + e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = e^{\alpha}$$

$$Ch\,\alpha - Sh\,\alpha = e^{-\alpha}$$
$$Ch^2\,\alpha - Sh^2\,\alpha = 1$$

$$Sh\,(\beta \pm \alpha) = Sh\,\beta\, Ch\,\alpha \pm Ch\,\beta\, Sh\,\alpha$$
$$Ch\,(\beta \pm \alpha) = Ch\,\beta\, Ch\,\alpha \pm Sh\,\beta\, Sh\,\alpha \quad \text{(ya demostrada)}$$
$$Th\,(\beta \pm \alpha) = \frac{Th\,\beta \pm Th\,\alpha}{1 \pm Th\,\alpha\, Th\,\beta}$$

$$Sh\,2\alpha = 2\,Sh\,\alpha\, Ch\,\alpha \qquad » \qquad Ch\,2\alpha = Ch^2\,\alpha + Sh^2\,\alpha$$

$$Th\,2\alpha = \frac{2\,Th\,\alpha}{1 + Th^2\,\alpha}$$

$$Sh\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(Ch\,\alpha - 1)}$$ dedúcese así:

$$\left.\begin{array}{l} Ch^2\,\frac{\alpha}{2} + Sh^2\,\frac{\alpha}{2} = Ch\,\alpha \\ Ch^2\,\frac{\alpha}{2} - Sh^2\,\frac{\alpha}{2} = 1 \end{array}\right\}$$ y restados dan $2\,Sh^2\,\frac{\alpha}{2} = Ch\,\alpha - 1$

$$Ch\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(Ch\,\alpha + 1)} \qquad Th\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{Ch\,\alpha - 1}{Ch\,\alpha + 1}}.$$

Es digno de observarse la analogía de estructura que presentan estas fórmulas con las correspondientes del círculo.

Relaciones entre funciones hiperbólicas de ángulo imaginario.

A las expresiones [1] podemos añadir:

$$Th\,j\,\alpha = j\ \text{tang.}\,\alpha,$$

que se deduce de ellas inmediatamente

$$Sh\,(\beta \pm j\,\alpha) = Sh\,\beta\,\cos.\,\alpha \pm j\,Ch\,\beta\,\text{sen.}\,\alpha,$$

$$Ch\,(\beta \pm j\,\alpha) = Ch\,\beta\,\cos.\,\alpha \pm j\,Sh\,\beta\,\text{sen.}\,\alpha \text{ (ya demostrada)},$$

$$Th\,(\beta \pm j\,\alpha) = \frac{Th\,\beta \pm \text{tang.}\,\alpha}{1 \pm j\,Th\,\beta\,\text{tang.}\,\alpha}.$$

Son interesantes los productos que siguen:

$$Sh\,(\beta + j\,\alpha)\,Sh\,(\beta - j\,\alpha) = \frac{1}{2}\,Ch\,2\,\beta - \frac{1}{2}\cos.\,2\,\alpha,$$

he aquí su deducción:

$$Sh\,(\beta + j\,\alpha)\,Sh\,(\beta - j\,\alpha) = (Sh\,\beta\,\cos.\,\alpha + j\,Ch\,\beta\,\text{sen.}\,\alpha)\,(Sh\,\beta\,\cos.\,\alpha - - j\,Ch\,\beta\,\text{sen.}\,\alpha) = Sh^2\,\beta\,\cos.^2\,\alpha + Ch^2\,\beta\,\text{sen.}^2\,\alpha,$$

y recordando las relaciones establecidas en imaginarias puras pondremos la expresión anterior como sigue:

$$\left(\frac{1}{2}\,Ch\,2\,\beta - 1\right)\cos.^2\,\alpha + \left(\frac{1}{2}\,Ch\,2\,\beta + 1\right)\text{sen.}^2\,\alpha =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta - 1\right) \cos.^2 \alpha + \left(\frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta + 1\right) (1 - \cos.^2 \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta \cos.^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta + 1 - \frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta \cos.^2 \alpha -$$

$$- \cos.^2 \alpha = \frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta + 1 - 2 \cos.^2 \alpha = \frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta - (\cos.^2 \alpha -$$

$$- \operatorname{sen.}^2 \alpha) = \frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta - \frac{1}{2} \cos.\, 2\, \alpha .$$

Mediante desarrollos análogos llegaríamos a

$$Ch\, (\beta + j\, \alpha)\; Ch\, (\beta - j\, \alpha) = \frac{1}{2}\, Ch\, 2\, \beta + \frac{1}{2} \cos.\, 2\, \alpha$$

$$Sh\, (\beta + j\, \alpha)\; Ch\, (\beta - j\, \alpha) = \frac{1}{2}\, Sh\, 2\, \beta + \frac{1}{3}\, j \operatorname{sen.}\, 2\, \alpha$$

$$Ch\, (\beta + j\, \alpha)\; Ch\, (\beta - j\, \alpha) = \frac{1}{2}\, Sh\, 2\, \beta - \frac{1}{2}\, j \operatorname{sen.}\, 2\, \alpha .$$

Derivadas de las funciones hiperbólicas.

$$\frac{d\, Sh\, \alpha}{d\, \alpha} = Ch\, \alpha$$

en efecto,

$$\frac{d\, \frac{1}{2}\, (e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{d\, \alpha} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = Ch\, \alpha$$

$$\frac{d\, Ch\, \alpha}{d\, \alpha} = \operatorname{sen.}\, h\, \alpha$$

$$\frac{d\, Th\, \alpha}{d\, \alpha} = \frac{1}{Ch^2\, \alpha}$$

$$\frac{d\, l_e\, Sh\, \alpha}{d\, \alpha} = \frac{d\, Sh\, \alpha}{d\, \alpha} \cdot \frac{1}{Sh\, \alpha} = \frac{Ch\, \alpha}{Sh\, \alpha} = \frac{1}{Th\, \alpha}$$

$$\frac{d\, l_e\, Ch\, \alpha}{d\, \alpha} = Th\, \alpha \qquad \frac{d\, l_e\, Th\, \alpha}{d\, \alpha} = \frac{1}{Ch\, \alpha\, Sh\, \alpha} = \frac{2}{Ch\, 2\, \alpha}$$

Integrales de funciones hiperbólicas.

$$\int Sh\,\alpha\,d\,\alpha = Ch\,\alpha + c \quad » \quad \int Ch\,\alpha\,d\,\alpha = Sh\,\alpha + c$$

$$\int Sh^2\,\alpha\,d\,\alpha = \frac{1}{2}(Sh\,\alpha\,Ch\,\alpha - \alpha) + c.$$

La demostración es así:

$$Sh^2\alpha = \left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - 2}{4}$$

$$Sh^2\,\alpha\,d\,\alpha = \frac{1}{8}e^{2\alpha} - \frac{1}{8}e^{-2\alpha} - \frac{1}{2}\alpha + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{4} - \alpha\right] + c = \frac{1}{2}(Sh\,\alpha\,Ch\,\alpha - \alpha) + e$$

según queríamos demostrar;

$$\int Ch^2\,\alpha\,d\,\alpha = \frac{1}{2}(Sh\,\alpha\,Ch\,\alpha + \alpha) + c$$

$$\int Th^2\,\alpha\,d\,\alpha = \alpha - Th\,\alpha + c.$$

Funciones hiperbólicas inversas.

Aunque su manejo no es corriente, vamos a indicar los valores de las funciones inversas:

$$y = \text{ángulo de } (Sh = x) \qquad y = \text{ángulo de } (Ch = x)$$

y

$$y = \text{ángulo de } (Th = x).$$

La primera de estas funciones implica

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

que multiplicada por e^y, nos da:

$$e^{2y} - 2\,x\,e^y - 1 = 0,$$

ecuación de segundo grado en e^y, que resuelta da

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1};$$

de estas soluciones sólo puede admitirse la correspondiente al signo más, pues e^y es necesariamente positivo, luego

$$y = l_e\,(x + \sqrt{x^2+1}\,).$$

Para la función $y =$ ángulo $(Ch = x)$, por el mismo camino se llega a

$$y = l_e\left[x \pm \sqrt{x^2-1}\right]$$

necesariamente $x > 1$, además en este caso y tiene dos valores, uno correspondiente a $x + \sqrt{x^2-1}$ y otro a $x - \sqrt{x^2-1}$; pero multiplicados dan como producto la unidad, es decir, son uno inverso del otro; los dos valores de y son, por consiguiente, iguales y de signo contrario, como no podía menos de suceder.

En cuanto a la función inversa de la tangente podemos escribir:

$$Th\,y = x \qquad\qquad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x,$$

en que dividiendo numerador y denominador por e^y, da:

$$\frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}} = x, \qquad \text{luego} \qquad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x},$$

y de aquí

$$y = \frac{1}{2}\,l_e\,\frac{1+x}{1-x},$$

valor mayor o menor que cero según que $x \begin{smallmatrix}<1\\>0\end{smallmatrix}$ ó $x \begin{smallmatrix}<0\\>-1\end{smallmatrix}$ como era de esperar.

Hemos señalado el interés de las funciones hiperbólicas haciendo palpable la simplificación que aportan en el desarrollo de cálculos de aplicación, tanto porque son condensación de expresiones extensas e incómodas de manejar, como por la simplicidad que presentan las relaciones que las ligan; nos falta aún hablar de las tablas y abacos en que se expresan sus valores, mas ello requiere alguna extensión y creemos no nos es permitido prolongar la fatiga que implica una lectura tan árida y monótona coma la del presente artículo; así, dejamos para ocasión más propicia el fin de nuestro propósito.

José A. PETRIRENA.

El último alarde del hormigón en campaña y las alambradas invisibles.

Dice el coronel Culmann en su libro *Tactique Générale* que, en verdad, únicamente pueden resistir los enormes efectos de los proyectiles de grueso calibre, los cuarteles y casamatas de la fortificación permanente, cuya masa y dimensiones sobrepasan la posibilidad de una improvisación en período de guerra.

Pone como ejemplos los fuertes de Verdún, Douaumont, Vaux y todos los abrigos de combate de aquella región que aguantó meses enteros de intenso bombardeo. Así, el Vaux, después de sufrir cerca de 5.000 impactos, de todos los calibres, diariamente, en marzo de 1916, conservaba intactas las obras de hormigón que tenían espesores resistentes próximos a *3* metros.

Verdún—añade—es el triunfo de la fortificación permanente. En cambio, los hormigones fabricados durante las operaciones no han dado, como abrigos, una seguridad absoluta, y no parecen rendir, en servicios, el trabajo que cuesta construirlos; *sin embargo, no puede negarse que su uso obliga, al asaltante, a efectuar preparaciones artilleras extremadamente costosas y con enormes calibres so pena de no conseguir ningún resultado útil.* Ejemplo: los ataques ingleses contra la «línea Hindenburg». Queda, pues, establecido que tratadistas franceses de la autoridad del citado, reconocen el valor de las organizaciones de hormigón, cuyo fin no puede ser otro que esa resistencia a que alude, y nunca la *absoluta seguridad* que no puede hallarse en parte alguna.

En artículos anteriores hemos visto el detalle de estas obras, que sirvieron de apoyo a notables retiradas estratégicas, siendo la base del sostenimiento de las líneas alemanas y apoyo de algunas ofensivas, no logradas por el agotamiento del ejército germánico en lucha tan desigual.

Siguiendo nuestro plan daremos a conocer, hoy, las posiciones defensivas a lo largo de la carretera y ferrocarril de Menin a Roulers (Flandes), preparadas, como último baluarte de la resistencia alemana, en otoño de 1917, por si acaso la batalla de Ypres hubiese obligado a una retirada.

Esta zona—siguiendo el método racional de que la retirada obligue a modificar toda la preparación artillera contraria, haciéndola cambiar de emplazamientos, avanzando dificultosamente por las destrucciones llevadas a cabo—estaba situada 8 kilómetros a retaguardia del escalón

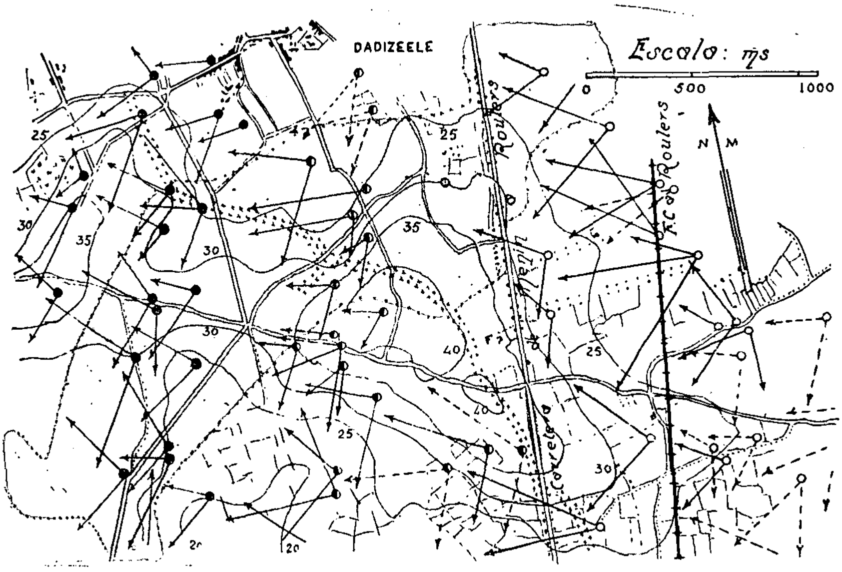

Fig. 1.—Línea defensiva de Menin-Roulers empleando exclusivamente abrigos de hormigón (Frente de Kezelberg).

anterior—el de Passchendaele—teniendo como campo de tiro un terreno llano, despejado y batido con eficacia.

La línea fortificada de este modo, en 12 kilómetros del frente, defendía los pasos del Lys, entre Menin y Desselghem y los del Canal de Roulers entre la población de este nombre y la última citada.

En la figura 1 representamos un trozo de frente al Oeste de Kezelberg, única parte en que el terreno tiene algunas elevaciones.

Consta la posición en toda su longitud:

De una línea de vigilancia, formada por gran número de abrigos de hormigón (círculos negros), situados indistintamente en pendiente o en contrapendiente, enmascarados aquéllos por casas, árboles o accidentes del suelo, procurando hacer muy difícil su observación, y no preocupándose del disimulo de los segundos.

De una primera zona de resistencia, integrada por grupos de abrigos diseminados en una profundidad de 1.200 metros (círculos blancos y negros). Ninguna de estas obras se hallaba enmascarada aunque sí rodeadas, como en la línea anterior y en la siguiente, de una red original de alambradas, difíciles de ver y de casi imposible destrucción por la artillería (luego las describiremos).

Y, por último, de una segunda zona de resistencia, 1.000 metros a re-

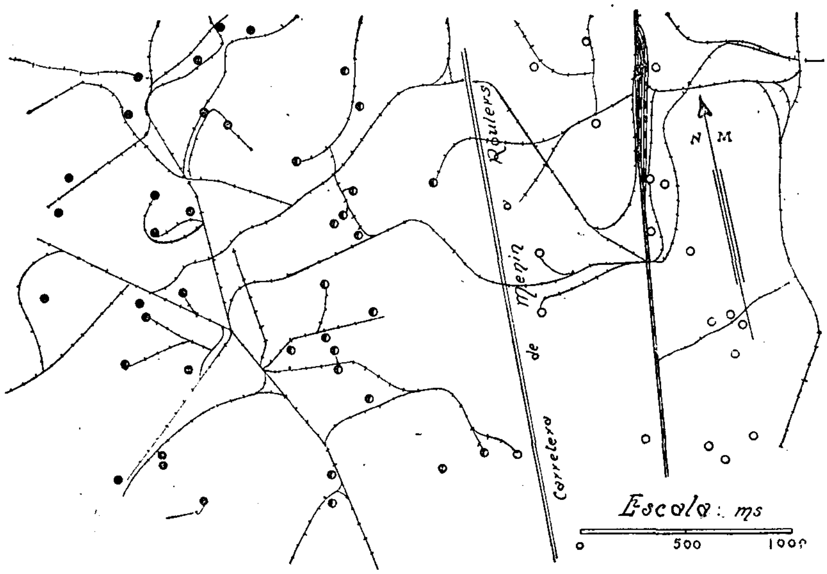

Fig. 2.—Esquema de las líneas auxiliares de ferrocarril para la repartición de materiales.

taguardia de la anterior, inspirada en iguales principios, pero con menos obras (círculos blancos).

Todos los abrigos son de un tipo único «Pill-box» (caja de píldoras le llamaron los ingleses). Cubren el terreno con fuego de ametralladoras que tiran, en el momento conveniente del ataque, desde emplazamientos a cielo abierto, y su reparto no responde a la organización de ninguna unidad combatiente, sino de un modo exclusivo a que, en la medida que requiera el relieve del suelo, sea batido el terreno con eficacia por el armamento automático.

Para la construcción de los *200* abrigos que había en la extensión considerada, fué necesario tender más de 100 kilómetros de vías auxiliares de transporte, recurriéndose por escaséz de carril a improvisarlos, usándose a este fin viguetas, de tres en tablón, reforzadas por un hierro en ángulo a lo largo del filo expuesto a la rodadura.

En la figura 2 se han dibujado las líneas de transporte de materiales correspondientes a las obras de la figura 1.

Descripción de un abrigo (figs. 3 y 4).—Tenían dos locales idénticos

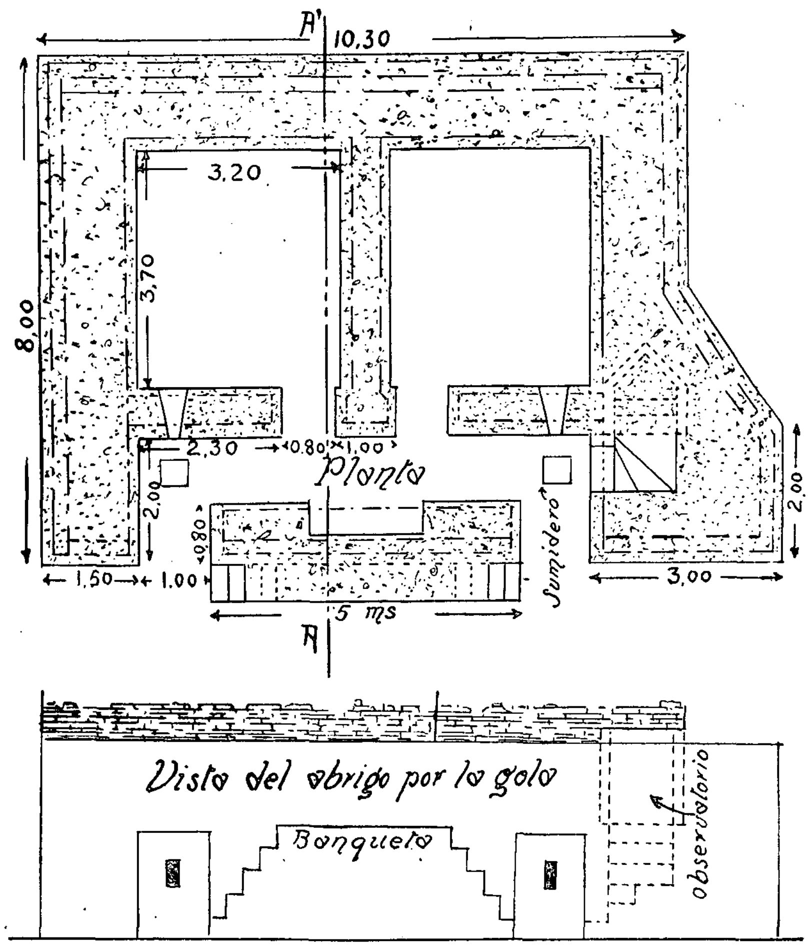

Fig. 3.—Planta y vista posterior del tipo de abrigo «Pill-box».

de 3,70 × 3,20 metros en planta con 1,80 de altura de techo; dábanles acceso un par de puertas de amplitud bastante para facilitar las maniobras de entrada y salida del personal. En el paramento interior del entrepaño se colocaban las municiones en un nicho. Dos sumideros en el pasillo impedían la inundación y encharcamiento de esta obra, semienterrada, contribuyendo también al saneamiento algunos ventiladores en la cubierta que eran utilizados en su totalidad cuando el enemigo, al rodear el refugio, hacía forzosa la defensa desde el interior, disparando por las aspilleras de gola. En los ataques frontales se disparaba desde la banqueta, a la que servía de parapeto la losa de cubrimiento, de espesor va-

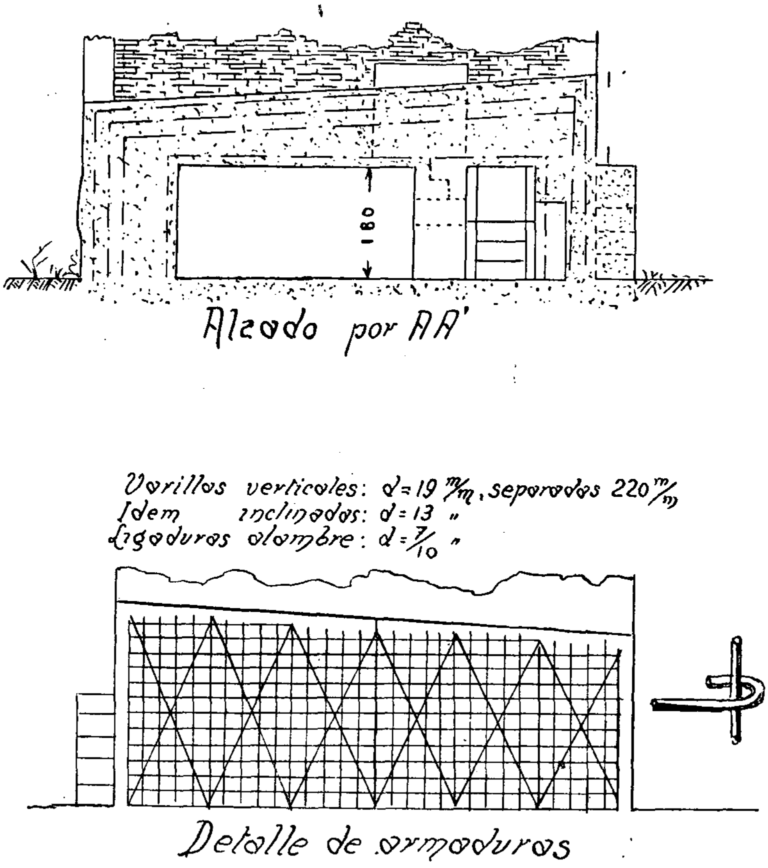

Fig. 4.—Alzado y detalle de armaduras de un abrigo.

riable entre 1 metro y 1,40. Para la vigilancia se establecía la centinela en un pequeño observatorio con cúpula de acero.

La fábrica, de hormigón armado, cubica, por unidad, 183,50 metros cúbicos. Lo que supone, en los 200 abrigos, un volumen de 36.700 metros cúbicos y el transporte de 91.750 toneladas de materiales, correspondiendo más de 400 a cada uno.

Los detalles de las armaduras se ven en la figura 4 y en las plantas y alzados representados por líneas de trazo y punto. Es verdaderamente extraño que las armaduras verticales no estén arriostradas entre sí por otras horizontales que aumenten la solidez, evitando la tendencia natural de agrietamientos por aquéllas, en los impactos de granadas de grueso calibre.

El trabajo exigido en la ejecución de esta zona defensiva puede calcularse suponiendo que seis soldados (atendiendo al transporte de materiales, colocación en obra, etc.) terminan en una jornada 1,35 metros cúbicos de hormigón armado, disponiendo de mezcladoras mecánicas. Resulta así una obra de 157.200 hombres-día, es decir, que trabajando 2.000 hombres simultáneamente, vendrían a tardar alrededor de tres meses en concluirlo. Los ingenieros ingleses que han analizado con detenimiento estas organizaciones dan como dato práctico, por abrigo, el de *30 hombres y un mes de trabajo,* que coincide con nuestro cálculo. Las incidencias de campaña pueden, naturalmente, influir en la rapidez prevista, que es la que próximamente correspondió al caso concreto que estudiamos.

La guerra se terminó sin presentarse ocasión de apreciar el mérito de estas disposiciones. Critícanlas muchos por ser una posición defensiva absoluta, olvidando, a nuestro entender, que, en el año 18, las circunstancias del ejército alemán (al que no puede tachársele de poco maniobrero) eran tales que, a pesar de las «doctrinas» preconizando la ofensiva a todo trance, la defensiva como excepcional y momentánea, la trinchera como único abrigo de combate, etc., etc., había que atenerse a la realidad, y la realidad debió sintetizarse, a lo último, en la idea de resistir hasta allí y pedir la paz, sin repasar las fronteras, esperando momentos propicios. Así lo patentizan la multitud de centros defensivos—que no se enmascararon más que mientras se construían—que se ofrecieron en toda su desnudez a la artillería, retando sus medios de corrección de tiro por la masa protectora, el número, y la diseminación; y así lo demuestran igualmente la carencia de abrigos para las reservas y la zona de alambradas, de más de un kilómetro de profundidad, sin pasos dispuestos para el contrataque (parte sombreada de la figura 1).

Esta inmensa alambrada es la que hemos llamado *invisible;* de hecho lo fué, porque ni la observación aérea, directa, del terreno que ocupaba, ni la interpretación minuciosa de fotografías desde avión, lograron descubrir su existencia, pues en vez de construirse siguiendo la rutina se estableció de la manera racional expresada por la figura 5, esto es, siguiendo las lindes de parcelación, ribazos, acequias u otras líneas adecuadas para su disimulo. En general, el obstáculo era una alambrada plana, sencilla, de una sola fila de piquetes metálicos, al estilo de cerca de ganado, de 1,20 metros de altura; la disposición de doble fila de piquetes y faldones también se usó donde la sombra propia resultaba con fundida con las de ciertos elementos naturales.

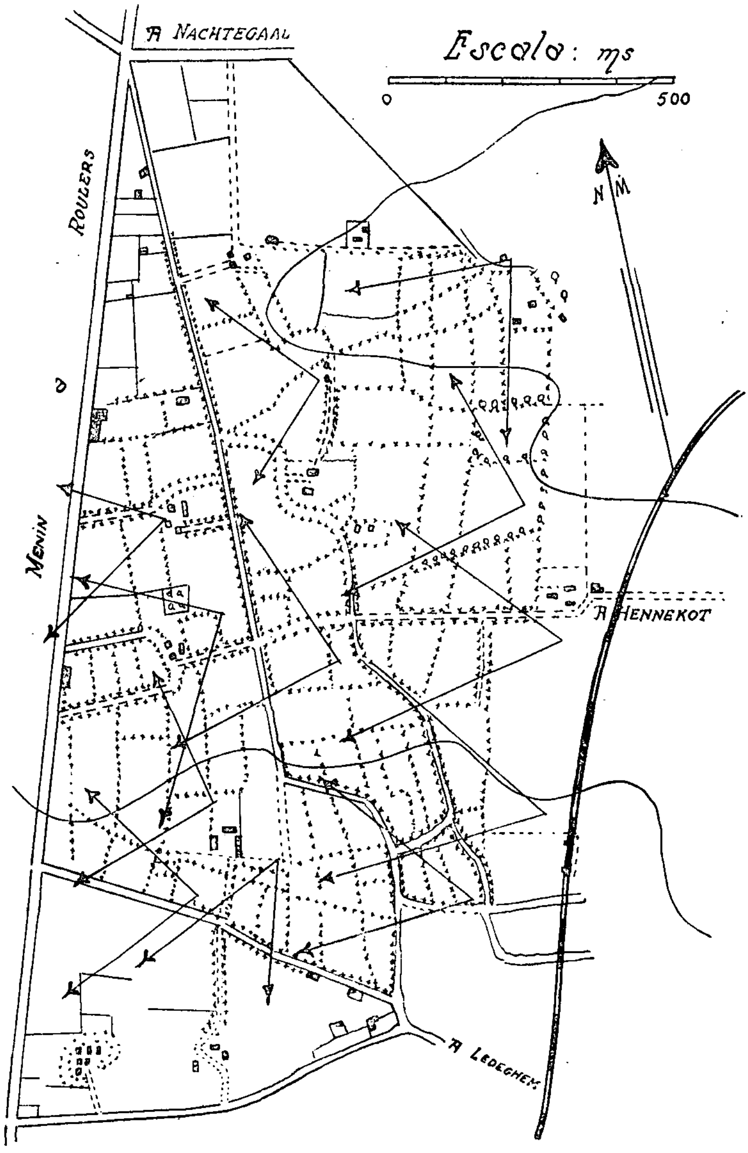

Fig. 5.—Repartición de alambradas según las lindes naturales del terreno.

Se complementó la red con otras líneas del tipo plano, orientadas de Este a Oeste, con objeto de que las sombras arrojadas diesen la impresión de divisorias de predios, sobre todo en esas horas de la mañana y del atardecer en que los observadores aéreos, buscando sombras alargadas como indicio de objetivo, despliegan su máxima actividad.

El obstáculo así formado es de casi imposible destrucción por la artillería, y aunque pudiera pensarse que alambradas tan sencillas son rápidamente cortadas por las tropas de asalto, no hay que olvidar la repetición del obstáculo y su dominación por el fuego de los abrigos, de frente, de flanco y de revés.

ANTONIO SARMIENTO.

CONSTRUCCION DE VAGONES SOBRE EL PROPIO TERRENO

De todos es conocida la importancia de los ferrocarriles en la guerra y el papel que desempeñan las líneas de 60 centímetros para abastecer los puntos avanzados de un frente.

En muchas ocasiones será necesario intensificar el tráfico en puntos determinados, y esto repercutirá en los ramales de vía normal que se unen a la de 60 centímetros; si en este momento nos encontramos, además, con insuficiencia de material rodante de vía estrecha, el problema se agudiza doblemente y no habría más remedio que traerlo de otros puntos alejados, recargando así el tráfico con este transporte preliminar.

Con el empleo del hormigón, para fabricar estos vagones, puede resolverse el problema de un modo rápido: en los talleres de reparaciones que necesariamente han de existir en los puntos de contacto de la vía ancha con la de 60 centímetros, siempre habrá existencia de ejes, y aunque no la hubiera, será más sencillo organizar un transporte de ejes sueltos que no de vagones enteros.

Con cementos aluminosos, de un gran tanto por 100 de aluminio en su composición y, por tanto, de rápido endurecimiento, se pueden obtener piezas que, al poco tiempo de hormigonadas, tengan igual resistencia que la que les correspondería al cabo de un tiempo mucho mayor si estuviesen fabricadas con cemento portland ordinario.

Recordaremos las propiedades de estos cementos de endurecimiento rápido. De experiencias de fractura realizadas sobre probetas a base de 150 kilogramos de cemento por metro cúbico de gravilla y 500 de arena, y con probetas de 200 kikogramos de cemento de la misma composición, se obtuvieron los resultados del siguiente modo:

	Resistencia a la compresión en kilogramos por centímetro cuadrado.		
	En 24 horas.	En 48 horas.	En 7 días.
Dosificación 150 kilogramos...	78,8	72,6	75,00
Idem 200 kilogramos..........	95,6	148,00	155,00

Las mismas pruebas, con hormigón de cemento portland de 250 kilogramos y la misma composición de gravilla y arena dieron:

	Resistencia en kilogramos por centímetro cuadrado.	
	En 7 días.	En 21 días.
Dosificación 250 kilogramos...........	58,2	84,4

Claro es que en todas las experiencias de fractura influye, además de la composición, la dosis de agua empleada en el batido; pero si tenemos en cuenta que estos resultados han sido obtenidos por fractura a compresión simple, y que la resistencia a compresión por flexión puede considerarse 1,5 veces la anterior, si la dosis mínima de cemento la fijamos en 300 kilogramos, se comprende la posibilidad de poner rápidamente en servicio las piezas construidas en estas condiciones, y tanto más si sometiendo los encofrados a la percusión del martinete de aire comprimido durante el fraguado, aprovechamos el aumento de resistencia que de este modo resulta.

Observando en los cuadros anteriores que el hormigón de 200 kilogramos de cemento, de endurecimiento rápido, tiene ya a las veinticuatro horas resistencia superior a la que resulta para el portland ordinario de 250 kilogramos a los veintiún días, no creemos aventurado afirmar que con hormigones de 300 kilogramos será posible poner los vagones en servicio a las veinticuatro horas de encofrados.

Si a esto añadimos que, según parece por los resultados observados en algunas fábricas donde se emplan, para el servicio interior de las mismas, la influencia perjudicial de las trepidaciones es escasa, que su estructura monolítica los hace más sólidos que los ordinarios, y que fabricados en serie resultan más baratos, creemos que habrá ocasiones en que su fabricación en el mismo frente por las tropas de ingenieros esté indicadísima. Pesan un poco más que los vagones corrientes.

Además, una vez pasado el período crítico de transportes a que nos

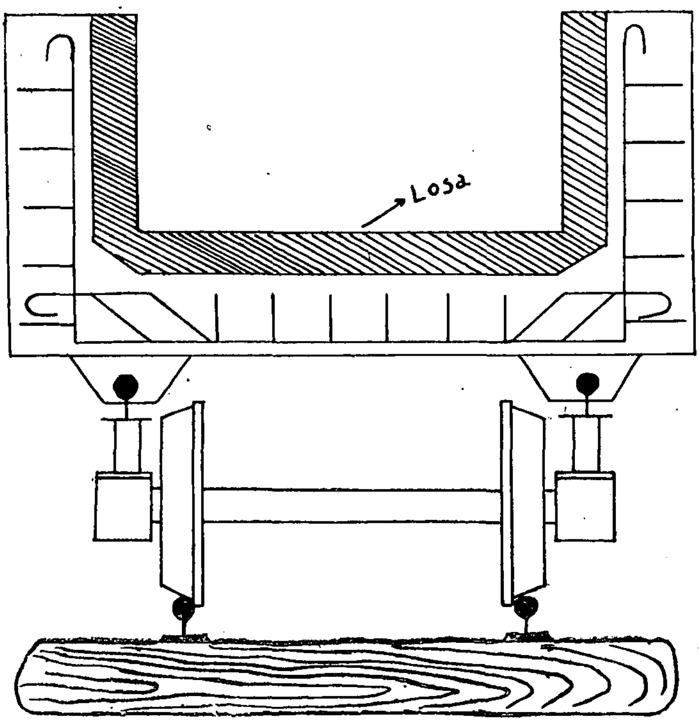

Fig. 1

estamos refiriendo, también será posible sacar provecho de ellos, pues separados del bastidor podrían servir para la reparación de estribos de puente parcialmente destruídos.

En la figura 1 se indica al esquema de una batea.

Una losa continua va apoyada en una serie de nervios colocados de trecho en trecho.

Para la descarga se puede hacer abatible un trozo entre dos nervios, girando alrededor de una charnela horizontal.

Dos carriles colocados a lo largo se unen con los muelles de suspensión, y transmiten el peso a los ejes; otros dos carriles colocados en los testeros, sirven para sujetar los enganches y los topes.

Vamos a indicar ligeramente la marcha del cálculo a seguir.

El cálculo de la losa se hace como el de una viga apoyada en varios puntos.

Para el cálculo del nervio se procede como sigue:

La viga $A\ B\ C\ D$ dibujada en la figura 2 es hiperestática.

Los momentos en los empotramientos son iguales por la simetría de las cargas.

Sabemos por teoría de elasticidad, que las deformaciones elásticas

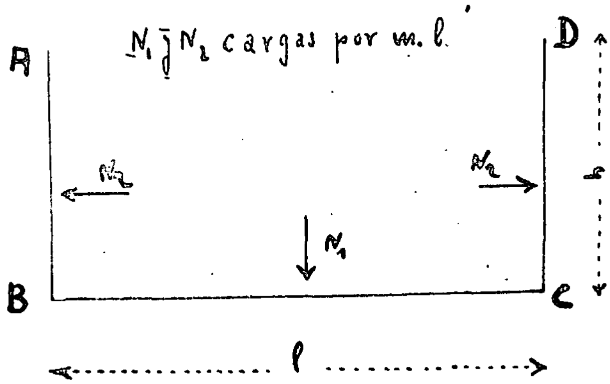

Fig. 2.

producidas en esos empotramientos por la acción del momento flector, vienen expresadas por

$$\varphi = \frac{l}{E\,I} \int_0^1 \left(M\,\varphi\,d\,\varphi + \frac{m}{2} \right),$$

siendo φ el ángulo que gira la sección, M el momento flector, considerando la pieza simplemente apoyada tomando l como unidad, y m el valor del momento en el empotramiento; E es el coeficiente de elasticidad e I el momento de inercia de la pieza.

Como tomando l por unidad la ley de momentos flectores es la parábola $M = \frac{1}{2}\,p\,\varphi\,(1 - \varphi)\,l^2$ para pieza simplemente apoyada, el valor de la integral es

$$\int_0^1 M\,\varphi\,d\,\varphi = \frac{N_1\,l^2}{2\,Y}.$$

Por otra parte, dicha deformación en función del coeficiente de Ritter vale $\varphi = \frac{-m\,h}{3\,E\,I}$ ecuación que junto con la anterior nos permite hallar

$$m = \frac{-N_1\,l^3}{4\,(2\,h + 3\,l)}.$$

En las paredes verticales y por consecuencia de los empujes dibujados en la figura, la ley de momentos es

$$M = m + X\,Y - \frac{1}{2}\,N_2\,Y^2$$

con la condición

$$M + X\,h - \frac{1}{2}\,N_2\,h^2 = o$$

por estar libre el extremo.

Hallado, pues, el coeficiente X, conoceremos exactamente la ley de momentos a lo largo de las paredes verticales.

Julio DUESO.

NECROLOGIA

En fin de mayo falleció nuestro compañero el comandante Rodero, de cuya brillante historia militar da ligera idea el extracto de su hoja de servicios que reproducimos. Con verdadera afición a nuestra profesión, sobre todo en su aspecto militar, supo distinguirse en cada uno de los empleos por que pasó en el Cuerpo en las campañas de Marruecos, a partir de la iniciación de la acción española en ese territorio, demostrando su talento, decisión y preparación técnica para los difíciles cometidos que se pueden presentar a nuestros oficiales en campaña.

El Memorial expresa a su familia y en especial a su hermano Francisco, compañero nuestro, el más sentido pésame por la desaparición de tan brillante jefe, del que tanto podía esperar nuestra Colectividad y el País. Descanse en paz.

EXTRACTO DE LA HOJA DE SERVICIOS DEL COMANDANTE DE INGENIEROS

Don José Rodero Carrasco.

Nació el 23 de mayo de 1887, ingresando en la Academia en septiembre de 1904, siendo promovido a segundo teniente-alumno en julio de 1907 y a teniente del Cuerpo en el mismo mes de 1909, destinándosele al 1.er Regimiento Mixto en la propuesta de dicho mes. Incorporado a Logroño, salió en octubre para Melilla con la compañía de zapadores expedicionaria, realizando varios trabajos en la zona de Zeluán y Nador y tomando parte en la ocupación de Atlaten y Sebt. En 3 de abril de 1910 salió para Ceuta, destinándosele a la compañía de telégrafos. Prestó el servicio de su clase, y desde febrero a junio de 1911 asistió al curso de radiotelegrafía. En noviembre fué destinado a la compañía de telégrafos del 5.° Regimiento Mixto, incorporándose a San Sebastián, donde sólo prestó dos meses de servicio, pues en enero de 1912 fué nuevamente destinado al 1.er Regimiento en Ceuta, mandando su compañía de telégrafos hasta septiembre, en que tras una breve estancia en el 4.° Mixto en Barcelona, pasó al 2.°, mandando su 1.ª y 2.ª compañía de zapadores. Por cambio de denominación fué destinado en diciembre al 2.° de Zapadores, donde continuó hasta junio de 1913, fecha en que ascendió a capitán.

Después de pasar un mes en la Comandancia de Ciudad Rodrigo y otro en el Regimiento de Ferrocarriles, fué destinado en agosto al 2.° de Zapadores, donde tomó parte en su Escuela Práctica y prestó los servicios de su clase. En noviembre fué nombrado para el mando de la 4.ª compañía del 2.° Batallón, destacada en Arcila, teniendo ocasión a poco de incorporarse de tomar parte en las operaciones para la ocupación de Seguelda, próximo a Tánger, distinguiéndose de un modo especial en la elección de la posición y en su rápida puesta en estado de defensa. En enero de 1914 realizó otro brillante trabajo propio de la especialidad del Cuerpo: la construcción de un puente sobre el río Haxef, empleando solamente poste y alambres telegráficos, trabajo que ejecutó en breves días y que era un modelo de sencillez y de utilización racional de los materiales; dicho puente fué utilizado permanentemente durante muchos meses. El primero de julio entregó su compañía, por haber sido designado para mandar una de las que se encontraban en la península, incorporándose a banderas el día 5 y pasando el mes de agosto a desempeñar el cargo de auxiliar de mayoría. El siguiente año 1915 fué nombrado cajero, en cuyo puesto continuó hasta julio, en que fué nombrado alumno de la Escuela Superior de Guerra.

Después de cursar brillantemente los estudios y de realizar las prácticas reglamentarias en los Regimientos de Húsares de la Princesa, de Artillería a caballo, Comisión Geográfica del Norte de España, Aviación y Capitanía General de la 1.ª Región, obtuvo el diploma de Estado Mayor y fué destinado en 23 de agosto de 1920 al 1.er Regimiento de Telégrafos. Durante su destino en este Cuerpo, asistió a las Escuelas Prácticas y desempeñó distintos cometidos, confiriéndosele una comisión para Inglaterra para perfeccionarse en el idioma, que realizó de agosto a octubre de 1921 y de 5 de mayo de 1922 a 30 de abril de 1923. En este intervalo ascendió a Comandante con antigüedad de octubre de 1922 y fué destinado al 6.° de Zapadores, al cual se incorporó en agosto de 1923, haciéndose cargo de la jefatura de Instrucción en su guarnición de Oviedo.

En 1924 asistió al curso de conjunto de Buñol durante el mes de febrero, encargándose después de las obras de la Comandancia de León por disposición del capitán general de la 8.ª Región, regresando a banderas a primeros de mayo y desempeñando los cargos de jefe de material y mayor con carácter accidental. En 15 de octubre salió al mando del grupo expedicionario del Regimiento para Tetuán, tomando parte en numerosos trabajos de defensa y construcción de caminos y en varias acciones con las columnas Saro y Fanjul en las zonas de Ben Karrik, Kudia Tajar y Beni-Madam, en la última fué citado como distinguido. En 1925, en funciones de comandante de ingenieros de la columna Saro, tomó parte en la liberación de Melusa, instalación del puesto Ceudón, reconocimientos del monte Cónico y Casa Aspillerada, instalación de posiciones en Beni Osmar, Busemesal, Moncal, Blocao Sur de Xeyera, llanura del Martín y diez puestos en las inmediaciones del Fondak de Ait Yedida.

En abril de este año fué declarado disponible en la 1.ª Región y en julio pasó a la Comandancia General de la 7.ª Región, donde permaneció hasta noviembre en que fué nombrado profesor de la Academia con carácter forzoso. En 30 de mayo de 1926 y sin perjuicio de su destino, asistió al curso de conjunto de ingenieros, que se verificó en Torrejón de Ardóz, mandando uno de los batallones de zapadores y regresando a la Academia en fin de junio.

En septiembre fué destinado por concurso al Negociado Central de la Dirección General de Instrucción y Administración del Ministerio de la Guerra, y en diciembre del mismo año fué designado como agregado militar en Japón y China, de donde tuvo que regresar en noviembre de 1927, por causa de la enfermedad que poco después le llevó al sepulcro. Fué destinado en la propuesta de diciembre al 1.er Regimiento de Zapadores Minadores, en cuyo destino continuaba al ocurrir su fallecimiento en 28 de mayo último.

Se encontraba en posesión de las condecoraciones siguientes:

Una cruz de 1.ª clase del Mérito Militar con distintivo blanco.

Dos de la misma orden y clase sencillas y una pensionada.

Otra de 2.ª clase, roja.

Medalla de Africa con pasadores Atlaten, Ceuta y Larache.

Medalla Militar de Marruecos.

SECCIÓN DE AERONÁUTICA

El pilotaje ciego de los aviones.

Hace algunos meses viene ocupando la atención de las esferas aeronáuticas del mundo un nuevo procedimiento de educación y de entrenamiento de los pilotos de avión que fué iniciado en los Estados Unidos por el capitán William C. Ocken, auxiliado por el médico del servicio aéreo David A. Meyers, y que con ligeras variantes ha sido ensayado en el aeródromo que tiene en Toussus le Noble la casa Farman, bajo la dirección del técnico de este constructor M. L. Rougerie.

En los comienzos de la aviación, aparte de la mayor o menor imperfección de los medios materiales para volar, el hombre se encontraba con el obstáculo de su inexperiencia. Para sus movimientos en los medios normales, contaba con un hábito ancestral, fijado de tal modo en el patrimonio hereditario de su fisiología, que llegaba a moverse desembarazadamente casi sin aprendizaje. En cambio para volar era preciso adquirir reacciones que respondieran automáticamente a cada movimiento o situación en que un medio tan extraño le colocara, y así se ve que en los primeros tiempos, en la época heroica de la aviación, la mayor parte de los accidentes se producían durante el aprendizaje; en la propia guerra, en la que los vuelos de combate aumentaban en proporción extraordinaria el simple peligro de moverse en el aire, los accidentes durante la enseñanza y entrenamiento de los pilotos fueron mucho más numerosos que las bajas acaecidas en combate aéreo.

En esta época fué una preocupación de los inventores la de lograr la estabilidad automática; se trataba de buscar un sistema en que, bajo la acción de mecanismos más o menos ingeniosos y accionados por fuerzas naturales, produjera lo que por movimientos instintivos del organismo humano era tan difícil conseguir. Pero el fracaso de estos intentos por un lado y por otro el progreso en los sistemas de volar y en su enseñanza, hizo que al finalizar la guerra se hubiese dado de lado a lo que durante tanto tiempo parecía el principal problema para el progreso del vuelo humano, y hoy día, aunque siempre hay inventores al acecho de la realización de las más peregrinas y aun absurdas ideas, son ya muy contados los que tratan de conseguir mecanismos para el vuelo automático.

Pero si bien se ha logrado, no sólo que los hombres con cualidades nativas se adapten al vuelo rápidamente, sino que aun los que carecen de esas aptitudes innatas, adquieran mecánicamente un hábito para volar con una seguridad suficiente en las circunstancias corrientes, queda una causa de accidentes, cuya proporción en lugar de disminuir, acrece. Los vuelos en la bruma, entre nubes o en noches poco claras vienen dando una proporción de accidentes, que el año 1926 se estimaba en un tercio del total, y aunque es cierto que la causa principal es que cada vez se va volando más en estas difíciles condiciones, atendiendo a las exigencias de nu medio de locomoción cuyas aplicaciones se extienden de día en día y animando a este atrevimiento la confianza que se va adquiriendo con la atmósfera, la realidad es que otras causas de accidentes, debidas al personal o al material, disminuyen en proporciones que van haciendo del vuelo un procedimiento de moverse sobre nuestro planeta con riesgos dentro de límites admisibles, y en cambio la poca visibilidad continúa siendo el verdadero enemigo de la navegación aérea.

De dos maneras influye la poca visibilidad para hacer peligroso el empleo del aeroplano: una de ellas es la dificultad de tomar tierra a grandes velocidades y pudiendo tropezarse con obstáculos que no se ven, o se ven deficientemente, y otra, la de maniobrar en el aire sin referencias sobre la posición que se ocupa. La primera es de muy difícil solución, habiéndose tratado de buscarla, bien por sondas que prolongando por debajo la sensibilidad del aeroplano, avisen a su piloto con tiempo suficiente de su proximidad a tierra para darle lugar a maniobrar, bien por señales que definan los aeródromos conocidos y principalmente por procedimientos que permitan aterrizar a velocidades pequeñas, haciendo poco peligroso un choque, como se va camino de lograr con el autogiro. De todos modos, salvo circunstancias meteorológicas excepcionales, que serían prohibitivas para el vuelo, cabe concebir que con una información del tiempo bien organizada y extensamente difundida, se pueda elegir el sitio para aterrizar en donde la visibilidad en tierra sea la menos desfavorable. Sin embargo, el problema no está todavía cerca de su solución.

En cambio la influencia de esas circunstancias hostiles sobre el piloto en pleno vuelo, se dominan fácilmente con el procedimiento, objeto de estas líneas. En el equilibrio del hombre intervienen todos sus sentidos, pero de un modo especial el de la vista, el del tacto en su modalidad que pudiera llamarse *sentido muscular* y el de orientación que reside en los otolitos situados en el oído interno, que aunque no con la finura que en ciertas aves, como las mensajeras, da la sensación de posición con respecto al esfuerzo más importante a que normalmente estamos sometidos, que es la acción de la gravedad.

Pero de estos sentidos, el único que nos da con seguridad idea de la posición respecto a la tierra es el de la vista, cuando tenemos puntos de referencia; los dos restantes son verdaderos registradores de inercia y, por lo tanto, cuando nuestro cuerpo está sometido a fuerzas excepcionales, nos puede dar sensaciones erróneas. En la silla Jones Baran, empleada en los Estados Unidos para la primera selección de los aspirantes a piloto, se observa que estando con los ojos vendados es imposible formarse idea de la posición durante los movimientos alrededor de tres ejes a que se somete a los que se sientan en ella, y sobre todo los errores respecto a los movimientos son de gran importancia. Un giro, por ejemplo, a la derecha, seguido de una parada o simplemente de un amortiguamiento, da la impresión de que se ha cambiado de sentido y con esto se explica que aun los pilotos dotados de mayor sensibilidad, se engañen respecto a las maniobras que realizan en cuanto pierden puntos de referencia por la vista.

Para precaverse contra este engaño de los propios sentidos se han ideado diferentes aparatos de a bordo, fundados en los efectos combinados de la acción de la gravedad y de órganos giroscópicos. Con estos aparatos, de diferentes tipos según los inventores, combinados con el compás y los indicadores de velocidad aerodinámica, se puede desde el asiento del piloto y sin necesidad de referencias exteriores, marchar en una dirección determinada con el avión en posición correcta de vuelo, virar y hacer toda clase de maniobras. Pero esta posibilidad es algo teórica; la mayor parte de los pilotos y con mayor razón cuanto mejores sean y mayor práctica del vuelo tengan, prescinden difícilmente de sus sensaciones personales y no se deciden a seguir ciegamente las indicaciones de sus aparatos de a bordo, que en esas situaciones difíciles en que la visibilidad exterior no les ayuda, aparecen señalando indicaciones tan distintas de lo que sus propias reacciones parecen dictarles. La consecuencia es que el aparato entra en una posición peligrosa, y si una referencia no permite darse cuenta de ello con tiempo para maniobrar antes de llegar al suelo, sobreviene el accidente, que es siempre gravísimo. La historia de los de esta clase es por desgracia muy numerosa, y uno de los primeros que ocurrieron en la aviación española, el del médico militar Cortijo, en noviembre de 1914, obedeció a esta causa.

Se trata, pues, de entrenar a los pilotos en utilizar los instrumentos de un modo absoluto, adquiriendo una confianza ciega en ellos, hasta el punto de prescindir de lo que sus propios sentidos les digan. Para ello se ejecutan vuelos en aparatos de doble mando, el asiento de uno de los pilotos está completamente envuelto en una cubierta de tela que no deja ver nada del exterior y sólo permite comunicarse con el segundo piloto, que en cambio tiene al exterior la visibilidad normal.

El despegue se hace por el que ocupa este segundo puesto, que cuando alcanza una altura suficiente para que se pueda maniobrar sin peligro, deja los mandos al piloto que va a entrenarse. Las referencias de los que se han sometido a esta experiencia, son que en los comienzos la impresión es muy desagradable por mucha confianza que se tenga en el piloto testigo, pues los aparatos parecen dictar maniobras absurdas, pero al poco tiempo de vuelo se empieza a adquirir seguridad y el entrenamiento es cosa de unas cuantas horas de práctica.

En los Estados Unidos el método fué recibido con hostilidad por los pilotos, pero el apostolado de Ocker y Meyer se ha abierto camino y ya lo han adoptado no sólo los principales ases, sino muchos pilotos de línea, sobre todo los que sirven las del Pacífico, en cuyas rutas se encuentran abundantes nieblas.

En Francia, la casa Farman lo ha ensayado con 12 pilotos, algunos que llevaban hasta más de 4.000 horas de vuelo, quedando todos muy pronto convencidos de que el nuevo sistema les daba un arma poderosa para defenderse en casos difíciles, mejorando notablemente sus cualidades como tales pilotos. El avión empleado era un Farman 71, con motor Salmson de 260 caballos, que es de estabilidad indiferente, es decir, que no tiende por sí sólo a volar en buenas condiciones, de este modo la enseñanza era mucho más eficaz.

Se ha aplicado asimismo a un aspirante a piloto, que nunca había volado solo, y deduce M. Rougerie que el comenzar la enseñanza desde el principio con su método sería muy conveniente, pues no se tendría que reaccionar contra costumbres ya adquiridas; el aprendizaje no es más difícil, y el piloto que ha aprendido a volar a ciegas, lo hace, como es natural, muy desembarazadamente cuando después se puede auxiliar con la visibilidad exterior. El manejar el avión estando pendiente de los aparatos, no fatiga como a primera vista parece ha de ocurrir.

En España se están realizando unos ensayos por el oficial aviador D. Carlos de Haya, bien conocido por el circuito que hizo el verano último, con gran éxito por las capitales europeas en una avioneta de propiedad particular. □

REVISTA MILITAR

Curso de capitanes, próximos al ascenso.

Siguiendo la orientación iniciada por el disuelto Estado Mayor Central y continuada por la Dirección General de Preparación de Campaña, se dispuso por Real orden de 4 de abril último, que desde el 20 de septiembre al 12 de octubre, se verificara en el Campamento de Carabanchel un curso de aptitud para los capitanes próximos al ascenso, al cual habían de asistir ocho del Cuerpo de Estado Mayor, 40 de Infantería, 20 de Caballería, 30 de Artillería y 10 de Ingenieros, bajo la dirección del jefe de la Escuela Central de Tiro.

El conjunto del curso se dividía en tres períodos, el primero de estudio teórico-práctico de los medios de acción que comprendía dos subperíodos: uno de ocho días en que los capitanes de cada Arma estudiarían los elementos propios de ella, y un segundo subperíodo de dos días, en que analizarían someramente los de las otras Armas en conexión con la propia.

El segundo período, en grupos separados para los de distintas Armas, comprendía otros ocho días y en él se resolverían temas tácticos peculiares de cada especialidad, derivados de un tema general de conjunto, que para los capitanes del Cuerpo se refería a empleo de los zapadores y de las transmisiones, con las órdenes de los jefes de servicio de la División.

El tercer período, se componía primero a una visita al aeródromo de Cuatro Vientos para informarse del empleo y las posibilidades de la aviación y de un tema táctico de conjunto sobre el terreno, con tropas reales, que se figuraba formaban parte de una gran unidad. Este tema final tuvo lugar el día 12 de octubre, a pesar de ser fiesta nacional.

Para los capitanes del Cuerpo, el primer subperíodo se desarrolló en varias sesiones por mañana y tarde en el Museo de Ingenieros, bajo la dirección del comandante del Cuerpo, con destino en la Jefatura de la Escuela de Tiro, D. Ladislao de Ureña. Durante él y simultaneándolo con el segundo período, se dieron varias conferencias.

El teniente coronel Cañellas explicó en tres de ellas la gestación y alcance del reglamento para la organización del terreno, sus relaciones con el de transmisiones y el servicio de ferrocarriles; el comandante Ureña otras tres sobre influencia de los fuegos en la organización del terreno y paso de ríos a viva fuerza, las primeras se publicarán *in extenso* en el MEMORIAL; el teniente coronel La Llave pronunció otras dos: una sobre el estado actual de la fortificación permanente, a la cual asistió el general Sojo, jefe de la Sección de Ingenieros, y otra sobre fortificación de costa; el teniente coronel Pruneda, una sobre el estado actual y aplicaciones de la aerostación; el comandante Beigbeder sobre automovilismo en campaña.

El tema general, del cual se dedujeron los especiales para los ejercicios sobre el plano y el de conjunto sobre el terreno, suponía que un ejército propio (bando oeste) se había de oponer a un adversario que avanzaba contra Madrid, tratando de ocupar la divisoria entre los ríos Guadarrama y Manzanares. El eje de marcha de las tropas propias debía ser la carretera de Brunete y Boadilla del Monte, siendo las fuerzas actuantes parte de las de la 1.ª división, que debía maniobrar para alcanzar la línea Polvorines, Ventorro del Cano, Cañada de Castilla y Venta de la Rubia, desarrollándose por tanto su acción táctica dentro de los límites del Campamento de Carabanchel.

Entre los temas redactados sobre el plano por los capitanes de Ingenieros, se adoptaron íntegramente las soluciones propuestas por el capitán D. Luis Troncoso para el tema de zapadores, consecuencia de la orden del comandante de Ingenieros de la 1.ª división, con la organización de la posición y por el del mismo empleo don Alberto de Montaud para el de transmisiones, con la orden del jefe divisionario de este servicio y cuatro esquemas con la distribución de centros de información avanzada y de líneas y estaciones durante las sucesivas situaciones en el desarrollo del ejercicio.

Las tropas reales que tomaron parte en el ejercicio final, fueron: un batallón de Infantería, una sección de carros de combate, dos escuadrones de sables y otro de armas automáticas, dos baterías ligeras, una sección de zapadores, una unidad de aerostación (que puso dos globos en el aire: uno, para observación general y otro afecto a la artillería) y un avión de reconocimiento y enlace.

Los resultados del curso han sido muy satisfactorios, comprobándose una vez más la excelente tendencia del plan de instrucción de la oficialidad, que va mejorándose notoriamente en años sucesivos a partir de 1923 en que se iniciaron las actuales orientaciones. □

CRÓNICA CIENTÍFICA

Los residuos de carbón en el hormigón armado.

Un comité inglés, que representa a once diferentes sociedades u otras corporaciones interesadas en el empleo del hormigón armado para las construcciones y edificaciones, ha hecho estudios acerca del empleo de los residuos de carbón, en sustitución de la grava, en la elaboración del cemento armado, y particularmente de los efectos sobre las barras de acero incrustadas en la masa.

El Comité ha llegado a la conclusión, terminante, de que tales residuos, a saber: cenizas, escorias, cagafierros, cisco de coke y *clinkers* que pasan por la malla de seis milímetros son perjudiciales para el objeto de que se trata. El Comité propone, en consecuencia, que se hagan cuanto antes las gestiones necesarias para obtener la revisión de las leyes británicas que autorizan el empleo de los residuos de carbón en la fabricación de los hormigones, armados o no. Esta conclusión está basada en tres consideraciones fundamentales. En primer lugar, el hormigón elaborado con residuos de carbón está expuesto a dilatación durante el fraguado, o después, si llegara a humedecerse o estuviera constantemente en contacto con la humedad. Segundo, el hormigón fabricado con tales residuos posee gran permeabilidad, lo que permite el acceso del aire y la humedad hasta las barras u otros elementos de acero, con el consiguiente riesgo de corrosión. Tercero, la presencia de compuestos de azufre en el conjunto puede dar lugar a reacciones que tengan por resultado la corrosión del acero.

La comisión no ha llegado aún a conclusiones completamente definitivas respecto al empleo de escorias totalmente vitrificadas, limpias de carbón u otros detritus y pasados por la zaranda en forma que las retenga la malla de seis milímetros. Aun sin esperar el dictamen del Comité, podemos, por nuestra cuenta, adelantar la opinión de que tales inclusiones no pueden ser perjudiciales porque no reaccionan en frío con los aceros, ni aun en el caso de contacto inmediato. △

Utilización de los residuos de la pulpa de madera.

Un químico sueco, el doctor Erik Rinman, ha ideado, con la colaboración de un ingeniero inglés, un procedimiento para utilizar la «lejía negra», desecho de la producción de pulpa de madera, destinada a la fabricación de papel, por el método químico. Se evapora la «lejía negra» en el vacío hasta que adquiere la consistencia de una mermelada; el producto se carboniza en retortas a temperatura que no exceda de 750° Fahr. (560° C), con lo que se obtiene toda una serie de valiosos compuestos, entre los que figuran alcohol metílico, acetona, metiletilketona, aceite de acetona, aceites ligeros y pesados de brea y trementina. El residuo que queda en las retortas, conocido con el nombre de «carbón de sosa», consiste esencialmente en carbonato de sodio y carbono libre; ese residuo se quema en un horno especial alimentado automáticamente, donde se consume el 97 por 100 del carbono; utilizando el calor obtenido en la producción de vapor mientras que el carbonato de sodio es extraído con agua, transformándole, por último, en sosa cáustica. Una gran instalación, establecida sobre las líneas indicadas, funciona actualmente en Regensburg (Baviera), bajo la superintendencia del Dr. Rinman, con agua del Danubio; en ella se tratan mensualmente 600 toneladas de pulpa, y se están efectuando ampliaciones que permitirán aumentar esa cifra hasta 2.000 toneladas. Se ha constituído un grupo financiero inglés para explotar el invento en todo el mundo, asociado con la compañía original *Aktiebolaget Cellulosa,* de Stockolmo. Mil toneladas de «lejía negra» producen 25 toneladas de alcohol metílico, 18 de acetona, 18 de metiletilketona, 12 de aceite de acetona, 8 de aceites ligeros y 8 de aceites pesados. △

Telegramas en facsímile.

Durante estos últimos meses, la Oficina General de Correos, británica, ha venido efectuando experimentos de telegrafía en facsímile, sin que hasta ahora pueda decirse si de ellos resultará la implantación de un servicio público. Las pruebas efectuadas entre Londres y París empleando un sistema alemán han dado buenos resultados. También se está ensayando un procedimiento francés entre París y Burdeos, pero hasta ahora el único servicio público establecido es el que funciona entre Berlín y Viena. Todo lo que tiene que hacer el remitente de un telegrama en facsímile, es pedir en la oficina de telégrafos una hoja del papel especial que existe para ese servicio y escribir el despacho o trazar el dibujo en él, utilizando la tinta especial que facilitan también en la misma oficina, y entregarlo en el ventanillo correspondiente. Después de practicar ciertas operaciones, el telegrama pasa al aparato transmisor que lo envía a su destino. El tiempo invertido en la transmisión varía, naturalmente, según la clase de despacho o dibujo.

Un dibujo con mucho detalle requiere un «grano» muy fino a fin de que se destaque con claridad y su transmisión invertirá más tiempo que un dibujo al tiralíneas. En el último sistema francés, imaginado por Belin, se emplea una célula fotoeléctrica en lugar del lápiz mecánico empleado en otros sistemas.

Se dice que la telegrafía en facsímile está progresando rápidamente, pero la cuestión de si conviene o no establecer un servicio público para ese género de comunicación, depende, sobre todo, de si es probable una demanda suficiente para cubrir gastos. △

Los ruidos en los tranvías eléctricos.

El Consejo de Administración de los tranvías de Melbourne ha acometido el empeño, muy laudable, de reducir a un mínimo los ruidos causados, dentro de la ciudad, por los vehículos de su red, y a ese efecto los ingenieros de la Compañía vienen practicando experimentos interesantes. Al discutir el tema la junta técnica, manifestó el presidente que no se pretendía obtener vehículos absolutamente silenciosos, pues bien se comprende que tal intento no es posible, pero que se puede conseguir una reducción muy importante del estrépito, que, por otra parte, no es mayor en Melbourne que en otras ciudades de las naciones más adelantadas.

Varios son los factores, en parte inevitables, que contribuyen a la producción de ruido por los coches de tranvías. La causa más frecuente, quizá, es el desgaste ondulado de los carriles, visible a simple vista en todas las líneas que llevan tiempo en explotación, particularmente en las curvas; este desgaste no puede evitarse, pero es posible, y la compañía va a intentarlo, emplear una máquina cepilladora que' con pequeñísima pérdida de materia, suprimirá las ondulaciones, conservando lisos los rieles. Otra causa muy importante de producción de ruido son las facetas de las ruedas, originadas por patinación, las cuales, aun siendo casi invisibles, dan lugar a choques comparables a los de un martillo pilón cuando el coche está en marcha.

Los tramos de una pieza que los reglamentos imponen en Australia son más ruidosos que los formados por carriles independientes sobre traviesas y balasto.

También contribuye al ruido el traqueteo de los coches a que da lugar el movimiento de lanzadera, originado a su vez por los huelgos excesivos. Todas estas causas han sido estudiadas cuidadosamente y serán remediadas en lo posible.

Las autoridades municipales de Madrid, que han emprendido una campaña contra el ruido, altamente meritoria, podrán, para el mejor logro de sus fines, utilizar, con su propia experiencia, la obtenida en otros lugares, como Melbourne; no hay duda de que el poco envidiable renombre de Madrid como *Ciudad de los Ruidos* o *Estruendópolis*, es debido en parte, aunque no la más importante, a la circulación de los tranvías. △

Los aceros al níquel modernos.

La Oficina de Información del Níquel ha publicado la primera de una serie de memorias sobre aceros al níquel. La presente trata del níquel y de los aceros níquel-cromo.

Estos se dividen en dos grupos principales: con pequeño y con gran contenido de níquel. Por el examen de la memoria se ve que el níquel se emplea hoy día en un gran número y variedad de aceros especiales. Dos de sus grandes campos de aplicación, son las industrias del automóvil y del aeroplano. También son importantes las series de aleaciones dotadas de gran permeabilidad magnética, entre las que figuran las llamadas Permalloy, Permex, Rhometal y Mumetal. Una nueva aleación, tipo Invar, denominada Elinvar, ha sido obtenida recientemente; contiene 36 por 100 de níquel y 12 por 100 de cromo. A las temperaturas ordinarias el Elinvar posee un módulo de elasticidad prácticamente invariable, en unión con un coeficiente de dilatación térmica muy bajo. La obtención de este metal ha aumentado las posibilidades de usar compensadores de metal único en los relojes de precisión y cronómetros: así lo afirma la Revista de la Sociedad de las Artes (británica). △

BIBLIOGRAFÍA

Bases para el estudio de la Geografía Militar, *por el teniente coronel de Estado Mayor, Profesor de la Escuela Superior de Guerra,* D. Luis Villanueva y López Moreno. *Madrid, 1827 (sin pie de imprenta) Un tomo de 24 por 16,5 con 183 páginas; precio, 6 pesetas.*

Según se desprende del propio título, no se trata de un tratado de Geografía, sino de unas orientaciones de cómo se acomete actualmente el estudio de esta ciencia, separándose del método puramente descriptivo que ha imperado hasta hace pocos años, que más que verdadera ciencia hacían de esta disciplina un catálogo de nombres, imposible de mantener en la memoria, y de los cuales no se deducía síntesis alguna, sustituyéndolo por la que relaciona el factor humano con los restantes del medio en que el hombre habita, de lo que se deducen las fecundas consecuencias a que se ha llegado en la Geografía moderna. En la generalización de esta nueva forma de la enseñanza de la Geografía, se ha distinguido en nuestra Patria el señor E. del Villar, y no ha sido el Ejército el último en entrar por el nuevo camino, pues se adoptó como texto para el ingreso la obra de los artilleros Izquierdo Croselles, muy superior a las que utilizaban otros centros de enseñanza, que debían por su historia y fines dar el ejemplo en la orientación de esta disciplina, unas de las fundamentales de la cultura de toda clase de profesiones intelectuales.

Nada tiene de extraño, por lo tanto, que uno de los Centros de Enseñanza superiores del Ejército, como es la Escuela de Guerra, entrara igualmente por la vía indicada, siendo el libro del teniente conorel Villanueva una excelente norma para el estudio con dichas modernas orientaciones.

Un simple resumen de los principales epígrafes dará idea de los problemas que en el libro (de condensada lectura con tipos 8 como normal y del 6 para aclaraciones y notas) se tocan, y aunque muchos de ellos puede parecer que *no son Geografía*, e autor explica razonadamente cómo entran en el moderno concepto geográfico.

Capítulo I. Concepto de la Geografía, los factores geográficos, escuelas extranjeras, la Geografía en nuestro país, relación de la Geografía con otras ciencias, la interpretación geográfica, coordinación de factores geográficos, el factor ecético, el método en Geografía.

Capítulo II. Geografía Militar, su importancia, métodos y enseñanza.

Capítulo III. El factor físico; influencia del terreno en las operaciones.

Tipos geográficos y elementos que influyen en sus distintas características.

Capítulo IV. La Geología y la guerra, utilidad de los conocimientos geológicos, organización del servicio geológico en campaña. Las operaciones y la geología, relación entre la geología y la estrategia. Se muestra aquí el teniente coronel Villanueva entusiasta hasta el extremo de la geología, a la que ha procurado dar la mayor extensión posible en su clase de la Escuela Superior de Guerra.

Capítulo V. El factor humano, política, economía, demografía, psicología y cultura, organización administrativa, fuentes de energía y riqueza.

Capítulo VI. Problemas político-geográficos, la hulla, el petróleo y otros carburantes.

Capítulo VII. El factor militar. Su significación, el Ejército. La fortificación, las costas, fronteras, vías de comunicación, objetivos geográficos.

Capítulo VIII. Trabajos geográfico-militares. Evaluación de la potencialidad de un país. Reconocimientos geográfico-militares.

Son para nosotros de especial interés los capítulos sobre fortificación y vías de comunicación (páginas 140 a 168). En ellos demuestra el autor amplitud de miras y claridad de criterio, no dejándose sugestionar por las tendencias de fobia irrazonada contra la fortificación. En algunos juicios sobre puntos concretos de la defensa de nuestra frontera pirenaica, aunque en el fondo razonables, hubiera podido tener más en cuenta que los errores que menciona están explicados por las opiniones que reinaban entonces. El juzgar hechos pasados con un criterio actual, aunque frecuente, no es justo ni da los resultados fructíferos que debe esperarse de toda crítica.

El libro del teniente coronel Villanueva debe ser leído por todo oficial que desee tener una base de cultura indispensable, y estudiarse y tomarse como guía por los que se preparen a penetrar más hondamente en el extenso campo de la geografía moderna. □

***

Heroísmos del Cuerpo de Estado Mayor del Ejército, *por el teniente coronel* GARCIA PÉREZ, *diplomado de Estado Mayor, Comendador de las órdenes de Carlos III y Alfonso XII. Un tomo de 21,5 por 15, con 111 páginas. Imprenta de Huérfanos de María Cristina, Toledo; 3 pesetas.*

Realeza y Juventud, *por el teniente coronel* GARCÍA PÉREZ, *diplomado de Estado Mayor, Gentilhombre de S. M., ex Profesor de la Academia de Infantería. Un tomo de 21,5 por 15, con 51 páginas. La misma imprenta, año 1928; una peseta.*

Dos nuevos libros, de la misma contextura, igual alcance y hasta idéntica presentación tipográfica, ha dado a la prensa el incansable publicista teniente coronel de Infantería, D. Antonio García Pérez. En repetidas veces hemos tenido ocasión de hacer notas sobre los trabajos que siempre tiene la atención de remitir al MEMORIAL, y sería, por lo tanto, inútil que cansáramos a nuestros lectores repitiendo sus características; a modo de ramos de flores, se reúnen en ellos citas de hechos históricos, episodios de mayor o menor trascendencia, frases que sirven para retratar a las figuras que hace pasar rápidamente a la vista del lector, resultando en conjunto un recordatorio de las glorias de una colectividad, o de un sector de la vida nacional. El que quiera buscar ejemplos en que inspirar grandes hechos, sólo tiene que abrir cualquier libro de García Pérez, no importa por qué página.

Su trabajo sobre los héroes del Estado Mayor, se divide en cinco capítulos: el primero, dedicado a los de la orden de San Fernando (51 páginas); el segundo, a los condecorados con la Medalla Militar (5 páginas); el tercero, a los muertos en campaña (34 páginas); el cuarto, a los heridos en Marruecos (12 páginas), y el último (3 páginas), es una breve reseña de la historia de la Brigada Obrera y Topográfica de Estado Mayor. Termina con dos planas en que constan las 32 obras que ha publicado, hasta ahora, el autor.

La obra *Realeza y Juventud*, está dedicada al personal de la Academia General Militar. Empieza por una poesía del poeta de Palencia, D. Marciano Zurita, titulada «La Raza». El capítulo primero, cita hechos militares o frases históricas de los Reyes Alfonso V, Ramiro I, Alfonso VI, Alfonso I, Berenguela de Berenguer, Alfonso VIII, Pedro II, Jaime I, Alfonso XI, Fernando I, Alfonso V, Fernando V, Carlos V, Felipe II, Felipe V, Alfonso XII. El capítulo segundo está dedicado a hechos de algunos cadetes militares, y el tercero a los llevados a cabo por juventud civil.

Felicitamos a nuestro querido amigo García Pérez por la situación espiritual envidiable de que da muestras con su persistente trabajo. □

Madrid. — Imprenta del Memorial de Ingenieros del Ejército.