

# Aerotecnia

## Las vibraciones del ala monoplana semivolada

Por JOSÉ CUBILLO FLUITERS

Teniente coronel de Aviación. Ingeniero Militar y Geógrafo  
 Profesor de Mecánica Elástica Aplicada en la Escuela Superior Aerotécnica

### Preliminares

EL sistema elástico constituido por el ala de un avión presenta un fenómeno del mayor interés en lo que se refiere a vibraciones, dando lugar a lo que, en lengua española, pudiera llamarse *flameo* (*flottement*), ya que no se trata de vibraciones armónicas simples, ni aun de la misma serie, sino de un género de vibración análogo al heterodino de los circuitos eléctricos, en el caso que va a ser considerado, por ser el más frecuente, de un ala monoplana semivolada.

El esquema del conjunto vibrante puede ser el que representa la figura 1.<sup>a</sup>: el ala volada está soportada por un

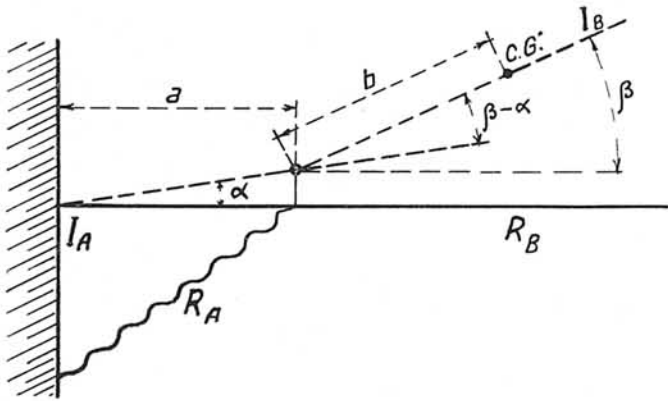


Fig. 1.<sup>a</sup>

montante constituido por una materia deformable; pero de ello resulta que la rigidez del primer tramo de ala es diferente de la del segundo tramo y entonces la vibración es un caso típico de vibraciones acopladas, pues aunque, en realidad, un sistema en el que intervengan diversas masas es ya un caso de acoplamiento, se consideran como tales más bien aquellos en los que los diferentes sistemas parciales, cuyas vibraciones se influyen mutuamente, están en condiciones diferentes, que es lo que ocurre con el caso que se examina.

**Método de planteo del problema.** — Se empleará, para deducir las ecuaciones del movimiento, el método de las ecuaciones de Lagrange, que es de cómoda aplicación en este caso.

Estas ecuaciones tienen la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad [0]$$

debiendo, por lo tanto, calcularse las cantidades que en ella figuran, en las que los parámetros  $q_i$  van a ser los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  que se indican en seguida.

Se adoptarán, para ello, las notaciones siguientes:

$\alpha, \beta$ , coordenadas angulares.

$a, b$ , longitudes marcadas en la figura.

$I_A$ , momento de inercia del primer tramo respecto a la unión con el fuselaje.

$I_B$ , momento del segundo tramo respecto a su centro de gravedad.

$M_B$ , masa del segundo tramo.

$R_A$ , rigidez del primer tramo o sea el momento que, por la deformación del montante, haría llegar a un radiante la deformación angular de rotación del primer tramo.

$R_B$ , rigidez del segundo tramo por la flexión de éste.

Se supone que el enlace del primero y segundo tramos es elástico mientras que, para todos los demás efectos, los sistemas son rígidos.

La energía cinética se calculará siguiendo el procedimiento del péndulo doble, a cuyo caso es completamente asimilable el sistema, en lo que se refiere a este aspecto de la cuestión.

Las coordenadas del c. de g. del segundo tramo son:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\alpha, \beta) = a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y_1 &= f_2(\alpha, \beta) = a \sin \alpha + b \sin \beta. \end{aligned} \quad [1],$$

con lo que la energía cinética del c. de g. será:

$$\frac{1}{2} M_B (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} M_B [a^2 \dot{\alpha}^2 + b^2 \dot{\beta}^2 + 2ab \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)]$$

y la de rotación alrededor del mismo:

$$\frac{1}{2} I_B \dot{\beta}^2$$

y puesto que la energía cinética del primer tramo es

$$\frac{1}{2} I_A \dot{\alpha}^2$$

resultará la energía total:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [I_A \dot{\alpha}^2 + I_B \dot{\beta}^2 + M_B [a^2 \dot{\alpha}^2 + b^2 \dot{\beta}^2 + \\ &+ 2ab \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)]] \end{aligned} \quad [2].$$

De esta expresión se deduce sucesivamente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= I_A \dot{\alpha} + M_B a^2 \cdot \dot{\alpha} + M_B ab \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= I_B \dot{\beta} + M_B b^2 \dot{\beta} + M_B ab \dot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) \end{aligned} \right\} [3]$$

y, por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= I_A \ddot{\alpha} + M_B a^2 \ddot{\alpha} + M_B ab \ddot{\beta} \cos(\beta - \alpha) - \\ &\quad - M_B ab \dot{\beta} (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \sin(\beta - \alpha) \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= I_B \ddot{\beta} + M_B b^2 \ddot{\beta} + M_B ab \ddot{\alpha} \cos(\beta - \alpha) - \\ &\quad - M_B ab \dot{\alpha} (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \right\} [4],$$

y puesto que el ángulo  $\beta - \alpha$  es muy pequeño, se pueden hacer las hipótesis habituales sobre el valor de sus líneas y resultará que [4] se convierten en

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= (I_A + M_B a^2) \ddot{\alpha} + M_B ab \ddot{\beta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= (I_B + M_B b^2) \ddot{\beta} + M_B ab \ddot{\alpha} \end{aligned} \right\} [5].$$

Además, de [2] se deduce:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 2 ab \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin(\beta - \alpha) = - \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0 \quad [6].$$

Por otro lado, la variación de energía potencial con relación a los parámetros o fuerza elástica, en este caso, es:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = R_A \alpha - R_B (\beta - \alpha) \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = R_B (\beta - \alpha) \quad [7].$$

*Ecuaciones del movimiento.* — Con todo ello, las ecuaciones de movimiento, sustituyendo en [0], resultarán siendo:

$$\left. \begin{aligned} (I_A + M_B a^2) \ddot{\alpha} + M_B ab \ddot{\beta} &= - R_A \alpha + R_B (\beta - \alpha) \\ (I_B + M_B b^2) \ddot{\beta} + M_B ab \ddot{\alpha} &= - R_B (\beta - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

o bien, ordenando:

$$\left. \begin{aligned} (I_A + M_B a^2) \ddot{\alpha} + (R_A + R_B) \alpha + M_B ab \ddot{\beta} - R_B \beta &= 0 \\ (I_B + M_B b^2) \ddot{\beta} + R_B \beta + M_B ab \ddot{\alpha} - R_B \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} [8];$$

y puesto que en cada una de ellas entran, no sólo cada variable y sus derivadas, sino términos dependientes de las otras, representa el caso típico, como antes se anunció, de *vibraciones acopladas*, que es exactamente análogo al de acoplamiento de circuitos eléctricos, puesto que en éstos, figura 2.<sup>a</sup>, las ecuaciones de la oscilación combinada son:

$$\left. \begin{aligned} (L_1 + L'_1) \ddot{i}_1 + i_1 \left( \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_{12}} \right) + M_{12} \ddot{i}_2 - \frac{i_2}{c_{12}} &= 0 \\ (L_2 + L'_2) \ddot{i}_2 + i_2 \left( \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_{12}} \right) + M_{12} \ddot{i}_1 - \frac{i_1}{c_{12}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

en donde los coeficientes representan las inducciones y capacidades que se indican en la figura.

Se ve así que:  $I_A$  e  $I_B$  hacen el papel de autoinducciones propias mientras que  $M_B a^2$  y  $M_B b^2$  el de las autoin-

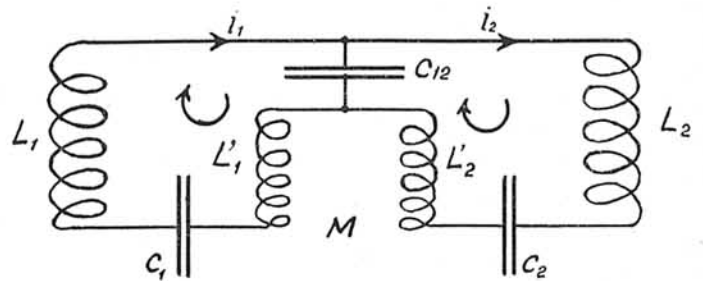


Fig. 2.<sup>a</sup>

ducciones que tienen influencia mutua, cuyo coeficiente de esta acción es precisamente  $M_B ab$ ; por fin,  $\frac{1}{R_B}$  representa la capacidad de la parte común a ambos circuitos.

*Propiedades generales de las vibraciones acopladas. Propiedades cinemáticas.* — Para poder deducir consecuencias aplicables al problema del ala, interesa presentar, aunque no sea más que en resumen, las propiedades más salientes de las vibraciones acopladas.

En primer lugar, éstas son, como se va a ver en seguida, de la forma

$$\left. \begin{aligned} \beta &= B_1 \sin(n_b t + \delta_1) + A_1 \sin(n_a t + \delta_2) \\ \alpha &= B_2 \sin(n_b t + \delta_1) + A_2 \sin(n_a t + \delta_2) \end{aligned} \right\} [9]$$

y, por consiguiente, conviene empezar por recordar las propiedades, simplemente cinemáticas, de una vibración de este género o heterodino que, según se ve, no es la suma de dos armónicos de la misma serie, pudiendo decirse en sentido estricto, que las funciones  $\beta$  y  $\alpha$  no tienen ciclo, a menos que  $n_a$  y  $n_b$  sean conmensurables entre sí.

Conviene transformar del modo siguiente, tomando, por ejemplo, la primera:

$$\begin{aligned} \beta &= \sin n_b t [B_1 \cos \delta_1 + A_1 \cos(\delta_1 + \Delta\delta)] \cos \Delta n \cdot t - \\ &\quad - A_1 \sin(\delta_1 + \Delta\delta) \cdot \sin \Delta n \cdot t + \cos n_b t [B_1 \sin \delta_1 - \\ &\quad - A_1 \cos(\delta_1 + \Delta\delta)] \sin \Delta n \cdot t + A_1 \sin(\delta_1 + \Delta\delta) \cdot \cos \Delta n \cdot t, \end{aligned}$$

siendo

$$\delta_2 - \delta_1 = \Delta\delta \quad , \quad n_a - n_b = \Delta n,$$

y haciendo las cantidades entre corchetes iguales a

$$P \cos \Delta \text{ y } P \sin \Delta$$

por fin, resulta:

$$\beta = P \sin(n_b t + \Delta) \quad [10]$$

que representa, es cierto, una vibración de período

$$T = \frac{2\pi}{n_b} \quad [11]$$

pero en la cual la *amplitud*, así como el *defasaje*, son *funciones* del tiempo, por lo que esta vibración debiera llamarse, y así se hará en lo sucesivo, *fluctuación* (en

alemán, *Schwebung*; en inglés, *beating*), ya que las palabras *pulsación* o *latido*, que han empleado otros autores españoles, no se acomodan a representar exactamente las circunstancias del movimiento.

La amplitud variable tiene el valor:

$$P^2 = A_1^2 + B_1^2 + 2 A_1 B_1 \cos (\Delta \delta - \Delta n \cdot t) \quad [12]$$

y de esta expresión resulta que los valores extremos de esa cantidad son:

$$\pm (A_1 + B_1) \quad \text{y} \quad \pm (B_1 - A_1) \quad [13]$$

que los toma con intervalos  $\frac{1}{2} T_f$  de valor

$$\frac{1}{2} T_f = \frac{\pi}{\Delta n} \quad [14]$$

Esta cantidad  $T_f$  es la duración de la *fluctuación*, cuyo valor, en función de los períodos aislados de cada componente, es:

$$T_f = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

y, por lo tanto, será  $T_f$  tanto mayor cuanto *mayores* sean  $T_1$  y  $T_2$  y *menor* su diferencia.

A su vez, tiene una dependencia esta amplitud, respecto a las pulsaciones aisladas de los dos sistemas vibrantes, que se verá a continuación.

*Propiedades dinámicas.* — Es a M. Wien (1897) a quien se debe el conocimiento fundamental de este género de vibraciones y, usando su método de representación, la forma general de estos movimientos es:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\beta} + 2f_1 \dot{\beta} + \nu_1^2 \beta + \rho_1 \ddot{x} + 2f_1 \sigma_1 \dot{x} + \nu_1^2 \tau_1 x &= 0 \\ \ddot{x} + 2f_2 \dot{x} + \nu_2^2 x + \rho_2 \ddot{\beta} + 2f_2 \sigma_2 \dot{\beta} + \nu_2^2 \tau_2 \beta &= 0 \end{aligned} \right\} [15]$$

En cada ecuación los tres primeros términos representan la oscilación *libre propia*, con amortiguamiento de cada sistema, ya que a ellos se reduciría cada una, si fuesen nulos los coeficientes  $\rho_1, \sigma_1, \tau_1$  y  $\rho_2, \sigma_2, \tau_2$ , que son los coeficientes de *acoplamiento* y, precisamente, siguiendo el criterio de *Schuler* (1929):  $\rho_1, \rho_2$  los coeficientes de acoplamiento de *inercia* (en electricidad, *inductivo* o *magnético*);  $\tau_1$  y  $\tau_2$  los de acoplamiento de *fuerza* o *elástico* (en electricidad, *capacitivo*) y, por fin, los  $\sigma_1, \sigma_2$  los de acoplamiento de *fricción* o de amortiguamiento:  $f_1$  y  $f_2$  son los coeficientes de amortiguamiento propio de cada sistema.

*Caso de acoplamiento elástico de fuerza.* — Para obtener más fácilmente los resultados de este estudio conviene prescindir del amortiguamiento, es decir, suponer  $f_1 = f_2 = 0$  y, además, que sólo existe acoplamiento elástico, o sea:  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ .

Las ecuaciones serán:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\beta} + \nu_1^2 \beta + \nu_1^2 \tau_1 x &= 0 \\ \ddot{x} + \nu_2^2 x + \nu_2^2 \tau_2 \beta &= 0 \end{aligned} \right\} [16]$$

Se ve ahora que  $\nu_1$  y  $\nu_2$  son las pulsaciones de las vibraciones, sin fricción de cada sistema aislado.

La solución de las ecuaciones [16] es de la forma  $Ae^{i\lambda t}$ , en donde  $\lambda$  es raíz de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \nu_1^2 & \nu_1^2 \tau_1 \\ \nu_2^2 \tau_2 & \lambda^2 + \nu_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

o sea:

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \left( \nu_1^2 + \nu_2^2 \pm \sqrt{(\nu_2^2 - \nu_1^2)^2 + 4 \nu_1^2 \nu_2^2 \tau_1 \tau_2} \right) [17]$$

Resultan los valores de  $\lambda^2$  negativos y, por tanto,  $\lambda$  de la forma:  $\pm in_a$  y  $\pm in_b$ , y suponiendo:  $\nu_1 < \nu_2$  y que  $(\nu_2^2 - \nu_1^2)^2$  sea grande respecto a  $4 \nu_1^2 \nu_2^2 \tau_1 \tau_2$ , los valores de  $n_a$  y  $n_b$  pueden ponerse:

$$n_b^2 = \nu_1^2 - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \tau_1 \tau_2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \quad \text{y} \quad n_a^2 = \nu_2^2 + \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \tau_1 \tau_2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \quad [18]$$

y, por consiguiente, los valores de  $\beta$  y  $\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= B_1 \sin (n_b t + \delta_1) + A_1 \sin (n_a t + \delta_2) \\ \alpha &= B_2 \sin (n_b t + \delta_1) + A_2 \sin (n_a t + \delta_2) \end{aligned} \right\} [19]$$

Las vibraciones compuestas están, como indican las fórmulas [18], fuera del intervalo de las de cada sistema aislado, es decir, la más lenta lo es más que la más lenta de las dos aisladas, y la más rápida lo es más que la más rápida de ellas.

Las amplitudes de las dos componentes de  $\alpha$  tienen el valor en función de las de  $\beta$ :

$$B_1 = B_1 \frac{n_b^2 - \nu_1^2}{\nu_1^2 \tau_1} = -B_1 \mu_1 A_1 = A_1 \frac{n_a^2 - \nu_2^2}{\nu_2^2 \tau_2} = A_1 \mu_2 \quad [20]$$

y quedan así cuatro constantes arbitrarias que se fijarán por las condiciones iniciales, tales como:

$$\beta = p \quad \dot{\beta} = 0 \quad \alpha = 0 \quad \dot{\alpha} = 0. \quad [21]$$

y entonces resulta:

$$B_1 = \frac{p \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{p \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad \text{y} \quad \delta_1 = \delta_2 = \frac{\pi}{2} \quad [22]$$

y, por consiguiente:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{p}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \mu_1 \sin \left( n_b t + \frac{\pi}{2} \right) + \mu_2 \sin \left( n_a t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ \alpha &= -\frac{p \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \sin \left( n_b t + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin \left( n_a t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} [23]$$

De estas expresiones se deduce que las *fluctuaciones* tienen el período [14]:

$$T_f = \frac{2\pi}{n_a - n_b} \quad [24]$$

y las amplitudes oscilan [13]: la de  $\beta$ , entre  $\pm p$  y  $\pm p \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ , y la de  $\alpha$ , entre  $0$  y  $\pm 2p \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$  con el correspondiente cambio de energía entre ambos sistemas, como indica la figura 3.<sup>a</sup>

En el sistema  $\alpha$ , el valor máximo de la amplitud depende de:

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \tau_{11} \tau_{22}}{(\nu_2^2 - \nu_1^2) (\nu_1^2 \tau_{11} + \nu_2^2 \tau_{22})} \quad [25]$$

que es tanto mayor cuanto más fuerte es el acoplamiento y menor la diferencia  $\nu_2 - \nu_1$ .

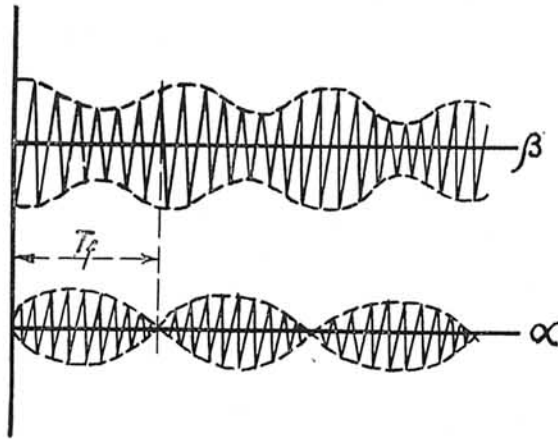


Fig. 3.<sup>a</sup>

Como la otra amplitud, depende de

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

que vale

$$\frac{\nu_2^2 \tau_{12} - \nu_1^2 \tau_{11}}{\nu_2^2 \tau_{12} + \nu_1^2 \tau_{11}} \quad [26]$$

no puede tomar valores muy grandes si no son  $\tau_{11}$  y  $\tau_{12}$  de signos contrarios, lo que no suele ocurrir generalmente.

En el caso de que  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , es decir, sean de igual período las vibraciones aisladas de cada sistema, las fórmulas anteriores no son aplicables, y los valores de  $n_b$  y  $n_a$ , son ahora deducidos directamente de [17]:

$$n_b^2 = \nu^2 (1 - \sqrt{\tau_{11} \tau_{12}}) \quad , \quad n_a^2 = \nu^2 (1 + \sqrt{\tau_{11} \tau_{12}}) \quad [27]$$

que si es  $\tau_i = \sqrt{\tau_{11} \tau_{12}}$  una cantidad pequeña, se pueden poner:

$$n_b = \nu \left( 1 - \frac{\tau_i}{2} \right) \quad , \quad n_a = \nu \left( 1 + \frac{\tau_i}{2} \right) \quad [28]$$

Contra lo que a primera vista parece, no hay ahora una sola vibración, sino dos separadas, por debajo y por encima del período común, la misma cantidad.

Como se verifica:

$$\mu_1 = \mu_2 = \sqrt{\frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}}$$

resulta:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{p}{2} \left[ \sin \left( n_b t + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( n_a t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ \alpha &= -\frac{p}{2} \sqrt{\frac{\tau_{12}}{\tau_{11}}} \left[ \sin \left( n_b t + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left( n_a t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad [29]$$

y las fluctuaciones de ambos sistemas, tienen amplitudes que van de 0 a  $\pm p$ , por consiguiente, ahora el cambio

de energía es total en cada período; pasa del sistema  $\alpha$  al  $\beta$  e inversamente con la duración del cambio:

$$T_f = \frac{2\pi}{n_b - n_a} = \frac{2\pi}{\nu \tau_i}$$

cuya relación al período de cada sistema  $\frac{2\pi}{\nu}$  es:

$$\frac{T_f}{T} = \frac{1}{\tau_i}$$

Acoplamiento de inercia. — Entonces son las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\beta} + \nu_1^2 \beta + \rho_1 \ddot{\alpha} &= 0 \\ \ddot{\alpha} + \nu_2^2 \alpha + \rho_2 \ddot{\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [30]$$

que dan lugar a consecuencias análogas con los valores de  $n_b$  y  $n_a$  en la misma hipótesis anterior de ser  $\nu_2^2 - \nu_1^2$  grande respecto a  $4 \nu_2^2 \nu_1^2 \tau_{11} \tau_{22}$

$$\left. \begin{aligned} n_b^2 &= \left( \nu_1^2 - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \rho_1 \rho_2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \right) \frac{1}{1 - \rho_1 \rho_2} \\ n_a^2 &= \left( \nu_2^2 + \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \rho_1 \rho_2}{\nu_2^2 - \nu_1^2} \right) \frac{1}{1 - \rho_1 \rho_2} \end{aligned} \right\} \quad [31]$$

y resultan las vibraciones, como en el caso anterior, fuera del intervalo de las dos aisladas.

En el caso de ser  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , resulta:

$$n_b^2 = \frac{\nu^2}{1 + \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \quad , \quad n_a^2 = \frac{\nu^2}{1 - \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \quad [32]$$

Acoplamiento elástico y de inercia. — Si existen los dos géneros de acoplamientos, entonces se combinan los resultados obtenidos en los dos casos anteriores, fijándose en que el efecto de ambas clases de acoplamiento es, cuando son de tal índole que los dos coeficientes  $\rho$  y los dos  $\tau$  son de igual signo, precisamente contrario sobre los valores de las pulsaciones de combinación  $n_b$  y  $n_a$ , como puede verse en las fórmulas halladas.

En el caso de que fuesen  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , resultará:

$$n_b^2 = \frac{\nu^2 (1 - \sqrt{\tau_{11} \tau_{12}})}{1 - \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \quad , \quad n_a^2 = \frac{\nu^2 (1 + \sqrt{\tau_{11} \tau_{12}})}{1 + \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \quad [33]$$

y si fuese, además,  $\tau_{11} \tau_{12} = \rho_1 \rho_2$ , ambas vibraciones coinciden con las aisladas, pues sería:  $n_a = n_b = \nu$ , y no hay cambio de energía.

También es digno de notar que si, siendo  $\nu_1 \neq \nu_2$  es  $\tau_{11} = \rho_1$  y  $\tau_{12} = \rho_2$ , entonces es  $n_b = \nu_1$  y  $n_a = \nu_2$ , y tampoco hay cambio de energía entre los dos sistemas.

Aplicación al problema del ala. — Se ven las notables consecuencias que del estudio hecho resultan.

Salvo los casos particulares citados, hay cambio de energía de un sistema a otro de tal modo, que las amplitudes de cada uno son mayores que las que tendría si vibrase aisladamente, y en especial el efecto es tanto más peligroso cuanto más pequeña sea la diferencia entre los períodos de vibración de ambos sistemas, sin que por ello se llegue a que el caso más perjudicial sea el de existir igualdad de estos períodos, pues aunque entonces el cambio de energía es total entre ambos sistemas, en nin-

guno llega su amplitud a crecer ilimitadamente, sino que permanece igual a la elongación inicial.

Es el fenómeno que resulta cuando  $\nu_2 - \nu_1$  es pequeña, sin ser nula, y además es débil el acoplamiento, al que puede llamarse *flameo*, que, como se ha visto, es un movimiento de *fluctuación* de gran amplitud.

Del estudio hecho resulta también que pueden existir alas que por su misma organización tengan predisposición al flameo, aun solamente con su vibración natural.

Pero aun resulta más peligroso este *flameo* si puede presentarse, no espontáneamente, sino como *flameo excitado* o *forzado* por acciones aerodinámicas, sean las producidas por viento en régimen laminar, sea las que se producen por el desprendimiento de los torbellinos de Kármán; por ello es importante tratar también el caso de vibraciones forzadas.

*Vibraciones acopladas forzadas.* — Se comprende que este caso es de mayor complicación que el anterior, por lo que se limitará el estudio a indicaciones sobre los resultados que se obtienen cuando una causa sinusoidal actúa sobre uno de los sistemas, que se considerará como *primario* y con un acoplamiento solamente elástico.

Entonces las ecuaciones toman la forma:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} + \nu_1^2 \beta + \nu_1^2 \tau_{11} z = R \text{ sen } \omega \\ \ddot{z} + \nu_2^2 z + \nu_2^2 \tau_{22} \beta = 0 \end{cases} \quad [31]$$

Los valores máximos de las amplitudes son:

$$P_b = R \frac{Z_2^2}{\sqrt{Z_1^2 Z_2^2 - 2pK^4 + K^8}}$$

$$P_a = R \frac{\nu_2^2 \tau_{22}}{\sqrt{Z_1^2 Z_2^2 - 2pK^4 + K^8}}$$

siendo

$$Z_1^2 = (\nu_1^2 - \omega^2)^2 \quad Z_2^2 = (\nu_2^2 - \omega^2)^2$$

$$p = \omega^4 - \omega^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) + \nu_1^2 \nu_2^2 \quad K^4 = \nu_1^2 \nu_2^2 \tau_{11} \tau_{22}$$

La dependencia de  $A$  y  $B$  respecto de  $\omega$  es de décimo

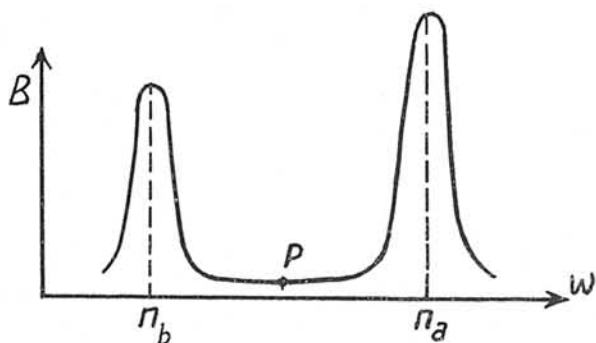


Fig. 4.ª — Acoplamiento fuerte, amortiguamiento débil.

grado y, por consiguiente, de estudio muy complejo, habiéndose deducido por M. Wien, curvas de la forma de la figura 4.ª, cuyos máximos están en las regiones próximas a las vibraciones de combinación, es decir,

cuando la causa exterior tiene una frecuencia igual a una de ellas, lo que indica la importancia de la determinación de éstas para evitar la *resonancia* con la causa excitatriz.

Si existe amortiguamiento importante los máximos toman la forma de la figura 5.ª

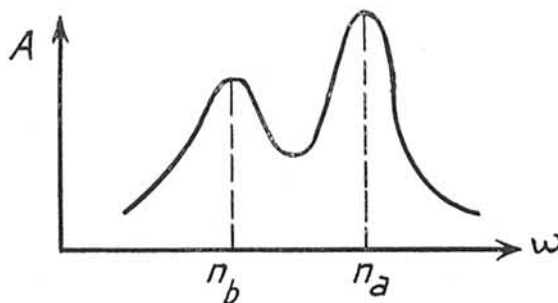


Fig. 5.ª — Acoplamiento débil, amortiguamiento fuerte.

El máximo efecto del cambio de energía del primario al secundario tiene lugar cuando la causa exterior está en *resonancia* con el segundo, sin que parezca tener influencia la frecuencia del primario.

Donde ésta tiene efecto es en la consideración de que los menores valores del efecto mutuo o cambio de energía, tienen lugar cuando las frecuencias aisladas de los sistemas parciales y la de la causa exterior son iguales, es decir, cuando se verifica:  $\nu_1 = \nu_2 = \nu = \omega$ ; el sistema entonces vibra en las proximidades de un punto, tal como  $P$  de la figura 4.ª, con amplitudes pequeñas.

*Consecuencias.* — Si se ponen las ecuaciones de la vibración del ala bajo la forma de Wien, resultan las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} \ddot{z} + \frac{R_A R_B}{I_A + M_B a^2} z + \frac{M_B ab}{I_A + M_B a^2} \ddot{\beta} - \frac{R_B}{I_A + M_B a^2} = 0 \\ \ddot{\beta} + \frac{R_B}{I_B + M_B b^2} \beta + \frac{M_B ab}{I_B + M_B b^2} \ddot{z} - \frac{R_B}{I_B + M_B b^2} = 0 \end{cases}$$

y los coeficientes de Wien serán:

$$\nu_2^2 = \frac{R_A + R_B}{I_A + M_B a^2} \quad \rho_2 = \frac{M_B ab}{I_A + M_B a^2} \quad \tau_{11} = -\frac{R_B}{R_A + R_B}$$

$$\nu_1^2 = \frac{R_B}{I_B + M_B b^2} \quad \rho_1 = \frac{M_B ab}{I_B + M_B b^2} \quad \tau_{22} = -1$$

Como, a su vez, las cantidades  $I_A, I_B, M_B, R_A$  y  $R_B$  dependen de la organización del ala, será posible variar esta organización para conseguir que las frecuencias naturales no predispongan al flameo, ni tampoco hagan posible la resonancia con las acciones aerodinámicas.

Una vez, pues, hecho el proyecto de avión por los cálculos de resistencia, bastará hacer, de una parte, la determinación de las frecuencias naturales de vibración en la forma expuesta, y de otra, hacer ver que las acciones aerodinámicas, a las velocidades de vuelo y dentro de distintas hipótesis atmosféricas, no están en resonancia con las vibraciones naturales halladas, y, en caso contrario, será preciso modificar el proyecto, sea modificando la rigidez o posición del montante para actuar sobre  $R_A$ , sea variando la rigidez de flexión del ala para actuar sobre  $R_B$  o empleando ambos medios.